

УДК 629.7.052

**ТЕОРЕМА О ЛИНИЯХ n -СИММЕТРИИ
ВЫПУКЛОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ****Ал.А. Шум¹, А.М. Ветошкин²**¹ *Тверской государственный технический университет (г. Тверь)*² *Мытищинский филиал Московского государственного
технического университета им. Н.Э. Баумана
(г. Мытищи, Московская область)*

© Шум Ал.А., Ветошкин А.М., 2025

Аннотация. Рассмотрено понятие момента n -го порядка плоской пластины относительно заданной прямой. Прямая является линией n -симметрии в том случае, если моменты n -го порядка двух подпластин, на которые исходная пластина делится этой прямой, одинаковы. Установлено, что момент n -го порядка выпуклой плоской пластины относительно прямой L , проводимой параллельно данной прямой, достигает наименьшего значения тогда, когда прямая L представляет собой линию $(n-1)$ -симметрии пластины.

Ключевые слова: момент n -го порядка, линия n -симметрии, линия полумасс, линия равновесия, выпуклая плоская пластина, функция плотности, масса, центр масс, электрическая машина.

DOI: 10.46573/2658-7459-2025-1-74-81**ВВЕДЕНИЕ**

В специальной литературе описан большой спектр разнообразных технологий и методов механической и физико-технической обработки деталей машин (см., например, работы [1–13]). Чтобы выбрать из этого длинного списка подходящие к данному случаю методы и технологии, определяющие процесс изготовления или балансировки детали электрической машины, требуется учет распределения массы внутри рассматриваемой детали. Поскольку распределение массы внутри детали определяется соответствующей функцией плотности, то может представлять интерес изучение свойств функции плотности, в том числе и тех ее свойств, которые связаны с тем или иным видом симметрии. В статье [22] предметом исследования была одномерная деталь (*линейный стержень*), а соответствующая функция плотности являлась функцией одной переменной. В статьях [14–17, 20] рассматривались плоские детали (*пластины*), соответствующая функция плотности представляла собой функцию двух переменных. В статьях [18, 19] в качестве деталей рассматривались уже пространственные тела, функция плотности в этом случае являлась функцией трех переменных. В настоящей работе продолжаются исследования плоских пластин, и данная статья посвящена вопросам симметрии функции плотности, зависящей от двух переменных.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Рассматривается плоскость вместе с заданной на ней прямоугольной декартовой системой координат. Под *областью* понимается часть плоскости, ограниченная замкнутой линией без самопересечений (при этом граница области считается частью области, потому

всякая область *замкнута*). Точки области, не лежащие на ее границе, являются *внутренними* точками этой области. Область называется *выпуклой*, если всякая прямая, проведенная через любую ее внутреннюю точку, пересекает границу этой области ровно в двух точках. Область S_1 является *подобластью* области S , если $S_1 \subseteq S$. Область S вместе с определенной в этой области непрерывной неотрицательной функцией двух переменных $f(x, y)$ представляет собой *пластину* D , при этом функция $f(x, y)$ определяет *плотность* пластины D (являясь, таким образом, функцией точки пластины). Подобласть области S вместе с соответствующим ограничением функции $f(x, y)$ называется *подпластиной* пластины D .

Пластина D является *выпуклой*, если соответствующая область S выпукла. Отметим, что в рамках данной статьи рассматриваются в первую очередь выпуклые пластины.

Пусть имеются (так, как это показано на рис. 1) прямая L и пластина D с областью S и функцией плотности $f(x, y)$. В соответствии с определениями из статьи [16] *моментом n -го порядка пластины D относительно прямой L* называется

$$M_n(D) = \iint_S (r(x, y))^n f(x, y) dx dy,$$

где n – произвольное неотрицательное целое число, а $r(x, y)$ – расстояние от точки (x, y) до прямой L (можно заметить, что значение момента $M_n(D)$ не зависит от выбора системы координат, поскольку функция $f(x, y)$ и функция $r(x, y)$ при заданной прямой L являются функциями точки пластины).

Некоторые частные случаи этого определения заслуживают отдельного рассмотрения.

Момент нулевого порядка пластины D не зависит от положения прямой L и равен *массе* пластины D : $M_0(D) = \iint_S (r(x, y))^0 f(x, y) dx dy = \iint_S f(x, y) dx dy = m(D)$. Заметим, что функция плотности $f(x, y)$ определением объявлена неотрицательной, а значит, в некоторых точках области S она может обращаться в ноль. Однако следует иметь в виду, что в настоящей статье (как и в статье [16]) предполагается выполненным обязательное дополнительное условие: для любой пластины D масса самой пластины D и масса любой ее подпластины больше нуля.

Момент первого порядка пластины D относительно прямой L представляет собой *статический момент* пластины D относительно прямой L в смысле традиционного определения [23]: $M_1(D) = \iint_S r(x, y) f(x, y) dx dy$.

Момент второго порядка пластины D относительно прямой L представляет собой *момент инерции* пластины D относительно прямой L в смысле традиционного определения [23]: $M_2(D) = \iint_S (r(x, y))^2 f(x, y) dx dy$.

Пусть теперь прямая L делит пластину D на две подпластины D_1 и D_2 с областями соответственно S_1 и S_2 так, как это показано на рис. 2. В соответствии с определениями, рассмотренными в работе [16], прямая L является *линией n -симметрии пластины D* , если $M_n(D_1) = M_n(D_2)$. Таким образом, прямая линия представляет собой *линию n -симметрии*

пластины, если она делит ее на две подпластины так, что моменты n -го порядка этих подпластин относительно данной прямой одинаковы.

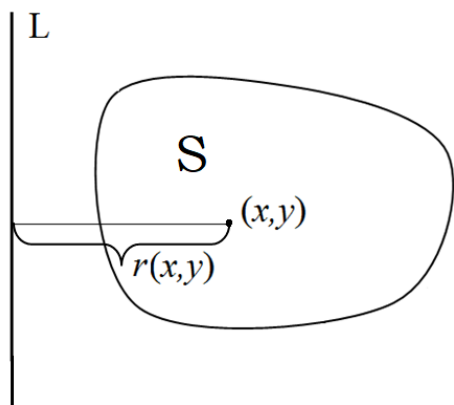


Рис. 1. Момент относительно прямой

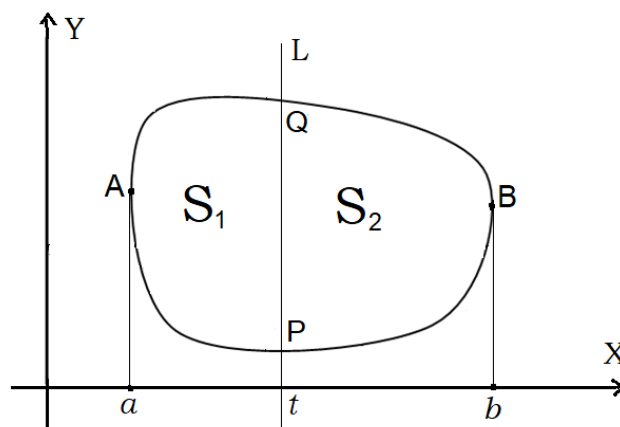


Рис. 2. Область S и прямая L

Как отмечено в статье [16], линии 0-симметрии пластины (делящие ее на подпластины одинаковой массы) представляют собой *линии полумасс*, а линии 1-симметрии (делящие ее на подпластины с равными статическими моментами) представляют собой *линии равновесия* (это название оправдано тем, что пластина, положенная на лезвие бритвы вдоль такой прямой, сохранит равновесие). Линии 2-симметрии пластины – это прямые, которые делят пластину на две подпластины с равными моментами инерции. Кроме того, точка пересечения всех линий n -симметрии пластины является *центром n -симметрии данной пластины*. Таким образом, центр 0-симметрии пластины оказывается ее *центром полумасс* (т.е. ее *центром s -симметрии*), а центр 1-симметрии пластины – ее *центром масс* (т.е. ее *центром c -симметрии*). Как было установлено в статье [14], центр 1-симметрии всегда существует, в то время как центр 0-симметрии может не существовать. Там же было показано, что в случае, когда существуют оба эти центра симметрии, они могут не совпадать.

В статье [16] было установлено, что для каждого целого неотрицательного числа n , любой пластины D и произвольно проведенной прямой существует единственная линия n -симметрии пластины D , параллельная заданной прямой. Цель настоящей работы – доказать, что справедлива нижеследующая теорема.

Теорема. Момент n -го порядка (при $n > 0$) выпуклой пластины D относительно прямой L , проводимой параллельно заданной прямой, достигает наименьшего значения тогда, когда прямая L представляет собой линию $(n-1)$ -симметрии пластины D .

Для доказательства теоремы понадобится техническая лемма, установленная в статье [22].

Лемма. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $n > 0$, то

$$a) \left(\int_a^t (t-x)^n f(x) dx \right)' = n \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx;$$

$$б) \left(\int_b^t (x-t)^n f(x) dx \right)' = -n \int_b^t (x-t)^{n-1} f(x) dx.$$

Доказательство теоремы.

Не ограничивая общности, можно считать, что та прямая, параллельно которой проводится прямая L , есть ось OY заданной на плоскости прямоугольной декартовой системы координат. Пусть прямая L , разбивающая пластину D на две подпластины D_1 и D_2 и, соответственно, область S на две подобласти S_1 и S_2 , проходит через точку t на оси OX (так, как это показано на рис. 2). Тогда момент n -го порядка пластины D относительно прямой L может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} M_n(D) &= M_n(D_1) + M_n(D_2) = \iint_{S_1} (r(x, y))^n f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} (r(x, y))^n f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{S_1} |x-t|^n f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} |x-t|^n f(x, y) dx dy = \iint_{S_1} (t-x)^n f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} (x-t)^n f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Очевидно, $M_n(D)$ оказывается функцией, зависящей от переменной t :

$$M_n(D) = M_n(t).$$

Запишем эту функцию более подробно, предположив, что дуга APB задана уравнением $y = \varphi_1(x)$, а дуга AQB – уравнением $y = \varphi_2(x)$:

$$\begin{aligned} M_n(t) &= \iint_{S_1} (t-x)^n f(x, y) dx dy + \iint_{S_2} (x-t)^n f(x, y) dx dy = \\ &= \int_a^t dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (t-x)^n f(x, y) dy + \int_t^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x-t)^n f(x, y) dy = \\ &= \int_a^t (t-x)^n dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \int_t^b (x-t)^n dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^t (t-x)^n F(x) dx + \int_t^b (x-t)^n F(x) dx, \end{aligned}$$

где $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ – функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$.

Функция $M_n(t)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$, можно находить ее экстремум на этом отрезке, используя производную:

$$M_n'(t) = \left(\int_a^t (t-x)^n F(x) dx + \int_t^b (x-t)^n F(x) dx \right)' = \left(\int_a^t (t-x)^n F(x) dx - \int_t^b (x-t)^n F(x) dx \right)'$$

Применяя лемму, доказанную в статье [22], получаем:

$$\begin{aligned} M_n'(t) &= n \int_a^t (t-x)^{n-1} F(x) dx + n \int_t^b (x-t)^{n-1} F(x) dx = n \int_a^t (t-x)^{n-1} F(x) dx - n \int_t^b (x-t)^{n-1} F(x) dx = \\ &= n \int_a^t (t-x)^{n-1} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy - n \int_t^b (x-t)^{n-1} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \\ &= n \iint_{S_1} (t-x)^{n-1} f(x, y) dx dy - n \iint_{S_2} (x-t)^{n-1} f(x, y) dx dy = nM_{n-1}(D_1) - nM_{n-1}(D_2). \end{aligned}$$

Теперь, приравнявая $M_n'(t)$ к нулю, находим, что экстремум функции $M_n(t)$ приходится на то положение прямой L , при котором $M_{n-1}(D_1) = M_{n-1}(D_2)$, а это значит, что прямая L является линией $(n-1)$ -симметрии пластины D . Очевидно, что данный экстремум единственный для функции $M_n(t)$ на отрезке $[a; b]$. Осталось только подтвердить, что он представляет собой минимум. Это можно сделать, найдя вторую производную функции $M_n(t)$ при помощи той же леммы из статьи [22]. Если $n > 1$, то

$$\begin{aligned} M_n''(t) &= \left(n \int_a^t (t-x)^{n-1} F(x) dx + n \int_b^t (x-t)^{n-1} F(x) dx \right)' = \\ &= n(n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} F(x) dx - n(n-1) \int_b^t (x-t)^{n-2} F(x) dx = \\ &= n(n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} F(x) dx + n(n-1) \int_t^b (x-t)^{n-2} F(x) dx = \\ &= n(n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + n(n-1) \int_t^b (x-t)^{n-2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \\ &= n(n-1) \iint_{S_1} (t-x)^{n-2} f(x, y) dx dy + n(n-1) \iint_{S_2} (x-t)^{n-2} f(x, y) dx dy = \\ &= n(n-1) M_{n-2}(D_1) + n(n-1) M_{n-2}(D_2). \end{aligned}$$

Очевидно, что данное выражение больше нуля при любом $t \in [a; b]$, а это означает вогнутость графика функции $M_n(t)$. Отсюда следует, что рассматриваемый экстремум есть минимум. В случае $n = 1$ будет

$$M_1''(t) = \left(\int_a^t F(x) dx + \int_b^t F(x) dx \right)' = F(t) + F(t) = 2F(t).$$

Функция $F(t)$ в силу своего определения неотрицательна на отрезке $[a; b]$ и притом может обращаться в ноль только в отдельных изолированных точках этого отрезка (последнее есть следствие того требования, что масса всякой подпластины пластины D должна быть больше нуля). Поскольку тем же свойством обладает и функция $M_1''(t)$, функция $M_1'(t)$ строго возрастает и обращается в ноль в единственной точке – именно в той, для которой выполнено равенство $M_0(D_1) = M_0(D_2)$. Таким образом, и для случая $n = 1$ утверждение теоремы справедливо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Линии n -симметрии плоской пластины D и ее моменты n -го порядка относительно прямой изучались ранее для частных значений n . Случай $n = 0$ связан с понятием s -симметрии, а случай $n = 1$ – с понятием c -симметрии. Рассматривался ранее также и случай $n = 2$, связанный с понятием момента инерции. Соответствующие исследования можно найти в статьях [14–16].

Переход к рассмотрению общих понятий n -симметрии при произвольном целом неотрицательном n , предложенный в статьях [16, 17, 20], позволил выявить такие связи между этими видами симметрии, которые не были отчетливо видны на описанных частных случаях. Теорема, доказанная в данной статье, представляет собой пример установления связи такого рода. При этом применение ее к известным ранее частным случаям оказывается также важным и полезным. Так, следствием данной теоремы являются следующие утверждения:

1) статический момент выпуклой пластины D относительно прямой L , проводимой параллельно заданной прямой, достигает наименьшего значения тогда, когда прямая L представляет собой линию полумасс пластины D ;

2) момент инерции выпуклой пластины D относительно прямой L , проводимой параллельно заданной прямой, достигает наименьшего значения тогда, когда прямая L представляет собой линию равновесия пластины D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Б.А., Волков Ю.С., Дрожжалова В.И., Седыхин Ф.В., Смоленцев В.П., Ямпольский В.М. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов: учебное пособие: в 2 т. М.: Высшая школа, 1983. Т. 1. 247 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение, 1993. 336 с.
3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1979. 487 с.
4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 1981. 266 с.
5. Немилев Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов: учебное пособие. Л.: Машиностроение, 1983. 160 с.
6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение, 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение, 1979. 152 с.
8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение, 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение, 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и пресс-форм: методические рекомендации по проектированию. М.: ОНТИ ЭНИМС, 1983. 47 с.
11. Этин А.О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом. М.: Машгиз, 1953. 173 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1, 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание, 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С. 19–23.
15. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о центрах s -симметрии и s -симметрии плоской пластины // *Вестник Тверского государственного технического*

университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2021. № 1 (9). С. 63–70.

16. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 2 (10). С. 78–84.

17. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 3 (11). С. 65–72.

18. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О понятии n -симметрии пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2022. № 3 (15). С. 66–72.

19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. О центрах симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 2 (18). С. 64–72.

20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре n -симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 3 (19). С. 75–82.

21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре n -симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 4 (20). С. 76–82.

22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Заметка об n -симметрии линейного стержня // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2024. № 2 (22). С. 63–71.

23. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2001. Т. 3. 662 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУМ Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru

ВЕТОШКИН Александр Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и вычислительной техники, Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 141005, Россия, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, 1. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о линиях n -симметрии выпуклой плоской пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2025. № 1 (25). С. 74–81.

**THE THEOREM ON THE n -SYMMETRY LINES
OF A CONVEX FLAT PLATE****Al.A. Shum¹, A.M. Vetoshkin²**¹ *Tver State Technical University (Tver)*² *Mytishchi filial of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman
(Mytishchi city, Moscow region)*

Abstract. The concept of the moment of the n -th order of a flat plate relative to a given straight line is considered. A straight line is a line of n -symmetry if the moments of the n -th order of the two sub-plates into which the original plate is divided by this line are the same. It is established that the moment of the n -th order of the convex flat plate relative to a straight line L , drawn parallel to a given straight line, reaches the smallest value when the straight line L is a line of $(n-1)$ -symmetry of this plate.

Keywords: moment of n -th order, line of n -symmetry, half-mass line, equilibrium line, convex flat plate, density function, mass, center of mass, electric machine.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SHUM Alexander Anatolievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Tver State Technical University, 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru

VETOSHKIN Alexander Mikhailovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering, Mytishchi filial of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 1, 1st Institutskaya street, Mytishchi city, Moscow region, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M. The theorem on the n -symmetry lines of a convex flat plate // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2025. No. 1 (25), pp. 74–81.