

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.В. Ганичева, А.В. Ганичев

**МЕТОДЫ И МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, ОПТИМИЗАЦИИ
И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ**

Монография

Тверь 2024

УДК 519.8
ББК 87.256.631.0

Рецензенты: профессор кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», доктор технических наук, профессор, академик РАЕН Попов П.Г.; доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета кандидат физико-математических наук Лесик А.И.

Ганичева А.В., Ганичев А.В. Методы и модели решения задач принятия решений, оптимизации и распределения ресурсов: монография. Тверь: Тверской государственной технический университет, 2024. 172 с.

Содержит материал по исследованию влияния отношения человека к риску на принятие решений, принятие решений на основе формализации рискованных ситуаций и процессов, новые методы решения задач линейного и нелинейного программирования, методы распределения ресурсов в условиях наличия четкой и нечеткой информации, модели взаимовлияния и противоборства индивидуумов в группах, а также модели создания и управления резервными средствами.

Предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов вузов.

ISBN 978-5-7995-1331-3

© Тверской государственной
технический университет, 2024
© Ганичева А.В., Ганичев А.В., 2024

ВВЕДЕНИЕ

Монография содержит пять глав.

В первой главе разработаны математические методы и модели принятия решений в условиях риска и неопределенности. Исследована проблема влияния отношения индивида к риску на принятие решений. Для этого рассмотрены типовые модели страхования (экологическая, финансово-экономическая, в юриспруденции, учебном процессе). Выделено одиннадцать характерных типов личности на основе их отношения к риску. Для каждого типа получены оптимальные значения средней полезности решений и страховой выплаты. Разработан метод оптимального страхования, а также алгоритм определения страховой суммы. Сформулированы условия оптимального функционирования системы «страховщик – страхователь», представленные в виде матрицы оптимального страхования. Разработанные теоретические положения строго доказываются с помощью теорем.

Для описания риска и полезности ситуаций и процессов применено их векторное описание для дискретного и непрерывного множества факторов и результатов. Разработан метод измерения ситуаций и процессов для обеспечения возможности их сравнения друг с другом. Рассмотрение материала для наглядности иллюстрируется конкретными числовыми примерами. Показано линейное преобразование ситуаций и процессов. Введено понятие портфеля ситуации и процесса. Разработаны методы принятия решений на основе анализа риска и полезности, в том числе на основе приведенной полезности ситуации (процесса). Введено понятие эффективности ситуации.

Разработана новая технология принятия решений в информационных условиях риска и неопределенности. Отличительной особенностью этого метода является обеспечение возможности эффективной работы лица, принимающего решение, с помощью некоторой информационной модели, отличающейся специфической структурой.

Во второй главе разработаны математические методы и модели решения некоторых классов задач линейного и нелинейного программирования. Разработаны новые методы максимизации линейной функции при одном линейном ограничении с положительными коэффициентами (доказано две теоремы) и максимизации линейной функции при нескольких линейных ограничениях (доказана теорема). Предложен новый метод решения задач линейного программирования, названный методом

проектирования и приращений. Метод проектирования заключается в поиске опорного решения задачи. Он обосновывается теоремой. Для демонстрации практической реализации метода проектирования рассмотрен числовой пример. Метод приращений позволяет найти оптимальное решение задачи. Данный метод формализован в виде алгоритма. Его практическая реализация показана на числовом примере. Выполнена оценка сложности метода проектирования и приращений. Показано, что вычислительная сложность разработанного метода меньше по сравнению с симплекс-методом.

Разработанный метод решения задач нелинейного программирования является приближенным. Он основан на аппроксимации (разложении в ряды) целевой функции и ограничений. Доказана теорема об условном максимуме нелинейной функции. Рассмотрен конкретный пример.

В третьей главе предложены новые модели распределения ресурсов, инвестирования, диверсификации и логистики. Решение задачи оптимизации распределения целочисленного ресурса основано на методе неопределенных множителей Лагранжа. Получен новый научный результат: оптимальное решение задачи распределения целочисленного ресурса возможно только для однородных средств.

Разработана математическая модель оптимизации распределения ресурсов с учетом важности объектов для условий неопределенности. Для этого выделяются три оптимизационных задачи нелинейного программирования для наилучших, средних и наихудших условий. Каждая задача решается аналитически методом неопределенных множителей Лагранжа; исследуются необходимые и достаточные условия существования экстремума целевой функции.

Данная глава содержит также материалы по новому методу расчета инвестиций в условиях неопределенности, модели диверсификации. С помощью теории эластичности функций оценено влияние на риск составляющих портфеля инвестиций, их дисперсий и степени коррелированности (факторных признаков). Приведены динамические модели планирования инвестиций на примере покупки нового оборудования и вложения инвестиций в проекты. В данной главе рассмотрены вопросы системного анализа логистического процесса. Для этого логистический процесс описан как сложная система; разработан граф состояний и переходов системы; составлены уравнения Колмогорова. Получен важный результат: для существования пуассоновской логистической системы в случае наличия забракованной продукции необходимым и достаточным условием является: плотность потока забракованной продукции должна быть больше суммарной плотности продукции, поступающей на участок контроля и в хранилище.

Четвертая глава посвящена моделированию динамического взаимовлияния и противоборства индивидуумов в группах. Разработана новая модель динамики взаимовлияния индивидуумов в группах. Получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений модели. Для построенной модели изучена зависимость решения от входных данных.

Рассмотрена проблема системного представления двухсторонних конфликтных ситуаций для общего случая зависимости эффективности сторон от времени и от количества противоборствующих единиц. Разработана дифференциальная модель средних численностей сторон. Для оценки средних численностей сторон получена рекуррентная формула. Предложенный метод дает возможность оценивать интервалы имеющихся средних численностей единиц обеих сторон с заданной точностью. Представлена оценка основных характеристик системы, в том числе коэффициента превосходства, зависящего от времени, что существенно улучшает аналогичный показатель разных моделей статистического характера и родственных моделей.

В данной главе разработана математическая модель конкуренции политических партий. Для описания конкуренции партий используется модифицированная модель Ричардсона в виде динамической системы дифференциальных уравнений. Система аналитически решена операторным методом. Для пояснения разработанного метода рассмотрен конкретный числовой пример. Определены перспективы дальнейшего развития нового метода.

В пятой главе рассматриваются новые методы и модели создания и управления резервными средствами. На примере резерва денежных средств показано в общем виде изменение доли резервного значения как функции времени. Определено, как осуществляется оптимальное управление резервными средствами. Рассмотрены различные ситуации, определяемые соответствующими соотношениями между параметрами, характеризующими данную модель. Разработана новая модель мобилизации налоговых платежей. Построены дифференциальная и разностная модели изменения доли добросовестных налогоплательщиков во времени. Показано оптимальное планирование доли добросовестных налогоплательщиков.

Данная монография охватывает большое разнообразие практически важных задач во многих областях. Следует отметить, что разработанные методы и модели могут использоваться во многих других сферах человеческой деятельности, не рассмотренных в монографии.

Авторы выражают большую признательность Павлу Георгиевичу Попову и Александре Ильиничне Лесик за рецензирование рукописи.

ГЛАВА 1

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

В УСЛОВИЯХ РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ И ПРОЦЕССОВ

В данной главе рассмотрена общая задача оценки ситуаций и событий с использованием понятий страховой суммы и полезности проводимых мероприятий. Приведены различные модели этой задачи. Построены и исследованы функции полезности для разных типов личности в соответствии с психологическими характеристиками индивида. Получен критерий наибольшей полезности страхования согласно приведенной типологии. Разработан метод оптимального страхования, а также реализующий его алгоритм. Получено оптимальное условие функционирования системы «страховщик – страхователь». Рассмотрено векторное представление ситуаций и процессов. Определены риск и полезность ситуаций и процессов для дискретного и непрерывного множества исходов.

§ 1.1. Исследование влияния отношения индивида к риску на принятие решений

В социально-производственной жизни любого человека встречаются ситуации, которые связаны с потерей каких-либо объектов, денежных средств и т.п. Задача противодействия потерям является очень актуальной. Общеизвестный выход из подобных ситуаций заключается в страховании от возможных потерь, например, от несчастного случая, в частности, в период различных стихийных бедствий (пожара, наводнения, землетрясения, экологических бедствий и т.д.). Встает вопрос: на какую сумму надо застраховаться, чтобы полезность такого страхования была максимальной?

В настоящее время в отечественной и зарубежной литературе достаточно большое внимание уделено вопросу страхования. Так, в источниках [21] и [47] приведена типология личности согласно отношению индивидуума к риску. Для случая конкуренции между страховыми компаниями для несклонного к риску индивидуума установлено, что он должен страховаться на сумму, которую может потерять в результате несчастного случая [47]. Установлены характеристические соотношения между полезностью среднего выигрыша и ожидаемой полезностью игры для склонного, безразличного и несклонного к риску типа. Автором [79] рассматривается критерий ожидаемой полезности и детерминированный денежный эквивалент, используемый для выражения склонности и несклонности принимающего решение к риску.

В данном параграфе проведено исследование влияния психологических характеристик страхователя на величину страховой суммы. Исследованы функции полезности для разных типов личности, разработан метод оптимального страхования, дано описание оптимального функционирования системы «страховщик – страхователь».

1.1.1. Общая постановка задачи

Сначала рассмотрим общую постановку задачи оценки ситуаций и событий. Предположим, что

D – характеристика данного события или ситуации. Это может быть численная или функциональная мера. Например, в области финансов – капитал, в социальной сфере – коэффициент инфляции или безработицы, в психологии – показатель доверия и т.п.;

p – вероятность изменения величины D под воздействием некоторых обстоятельств (факторов);

L – величина, на которую может измениться D под воздействием этих обстоятельств (факторов);

v – выделенная доля таких обстоятельств.

Допустим, существует возможность противодействовать изменению величины D , причем сила этого противодействия равна W . Величина W называется **страховой выплатой**. Возможны два исхода изменения D . В результате первого исхода, который оценивается как x_1 , с вероятностью p величина D уменьшается на величину $L+v \cdot W$ и увеличивается на величину W ; при втором исходе, оцениваемом как x_2 , величина D с вероятностью $1-p$ уменьшается на $v \cdot W$. Пусть $U(x)$ – полезность данного мероприятия, где x – ожидаемая оценка исхода. Заметим, что $U(x)$ – неубывающая функция.

Средняя полезность воздействия данных обстоятельств в общем виде запишется как

$$\bar{U} = p \cdot U(x_1) + (1-p) \cdot U(x_2),$$

где $x_1 = D - L - v \cdot W + W$; $x_2 = D - v \cdot W$.

Функция \bar{U} в общем случае зависит от переменных D, L, W, p, v . При фиксированных значениях D, L, W, p, v \bar{U} является функцией страховой выплаты W , т.е.

$$\bar{U} = p \cdot U(x_1) + (1-p) \cdot U(x_2). \quad (1.1.1)$$

Пусть $W_1 \leq W \leq W_2$. Установим зависимость между границами W_1 и W_2 страховой выплаты W и границами a и b ожидаемой оценки исхода x . Обозначим через a минимальное из значений $D - L - vW + W$ и $D - vW$ при $W_1 \leq W \leq W_2$, а через b максимальное. Найдем выражение для a и b через D, L, v, W_1 и W_2 , а также для W_1 и W_2 через a, b, D, L, v .

Возможны следующие типы зависимостей.

Первый случай: $W_1 \leq L \leq W_2$, $v \leq (W_2 - L)/(W_2 - W_1)$ и $v \leq (L - W_1)/(W_2 - W_1)$.

Тогда $D - L - vW_1 + W_1 \leq D - L - vW_2 + W_2$, $D - L - vW_1 + W_1 \leq D - vW_1$, $D - L - vW_1 + W_1 \leq D - vW_2$, $D - L - vW_2 + W_2 \geq D - vW_2$, $D - L - vW_2 + W_2 \geq D - vW_1$.

Таким образом, в этом случае $a = D - L - vW_1 + W_1$, $b = D - L - vW_2 + W_2$, $W_1 = (a - D + L)/(1 - v)$, $W_2 = (b - D + L)/(1 - v)$.

Второй случай: $W_1 \leq L \leq W_2$, $v \leq (W_2 - L)/(W_2 - W_1)$, $v \geq (L - W_1)/(W_2 - W_1)$. Тогда $b = D - L - vW_2 + W_2$, $a = D - vW_2$, $W_2 = (D - a)/v$, при этом $D = a + vb - va + vL$, $W_1 \geq \max\{(a - D + L)/(1 - v), (L - (1 - v)W_2)/v\}$.

Третий случай: $W_1 \leq L \leq W_2$, $v \geq (W_2 - L)/(W_2 - W_1)$, $v \leq (L - W_1)/(W_2 - W_1)$. Тогда $b = D - vW_1$, $a = D - L - vW_1 + W_1$, $W_1 = (D - b)/v$, причем $D = b - vb + va + vL$, $W_2 \leq \min\{(L - vW_1)/(1 - v), (L - (1 - v)W_1)/v\}$.

Четвертый случай: $W_1 \leq L \leq W_2$, $v \geq (W_2 - L)/(W_2 - W_1)$, $v \geq (L - W_1)/(W_2 - W_1)$. Тогда $b = D - vW_1$, $a = D - vW_2$, $W_1 = (D - b)/v$, $W_2 = (D - a)/v$.

Пятый случай: $L > W_2$, $v < (W_2 - W_1)/(L - W_1)$, $b = D - vW_1$, $a = D - L - vW_1 + W_1$, $W_1 = (D - b)/v$, причем $D = b - vb + va + vL$, $W_2 < (L - W_1)/v + W_1$.

Шестой случай: $L < W_1$, $b = D - L - vW_2 + W_2$, $a = D - vW_2$, $W_2 = (D - a)/v$, $D = a + vb - va + vL$.

Из проведенных рассуждений следует

Теорема 1.1. Существует шесть типов зависимости между границами страховой выплаты W_1, W_2 и границами a, b ожидаемой оценки исхода x .

Пусть $U(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b) . Тогда $\bar{U}(W)$ будет непрерывной на отрезке $[W_1, W_2]$ и дифференцируемой в интервале (W_1, W_2) . Основная задача страхования заключается в отыскании оптимального значения w_{opt} величины W , называемого **страховой суммой**. Значение w_{opt} максимизирует среднюю полезность $\bar{U}(W)$ при фиксированных значениях остальных переменных. Для определения оптимального значения w_{opt} вычисляется $\bar{U}'(W)$:

$$\begin{aligned} \bar{U}'(W) = & p \cdot U'_x(D - L - v \cdot W + W) \cdot (D - L - v \cdot W + W)'_w + \\ & + (1 - p) \cdot U'_x(D - v \cdot W) \cdot (D - v \cdot W)'_w, \end{aligned}$$

т.е.

$$\bar{U}'(W) = p \cdot U'_x(D - L - v \cdot W + W) \cdot (1 - v) + (1 - p) \cdot U'_x(D - v \cdot W) \cdot (-v). \quad (1.1.2)$$

Затем $\bar{U}'(W)$ приравнивается к нулю, откуда находится стационарная точка w^0 . Если $W_1 \neq W_2$, решается задача отыскания наибольшего значения $\bar{U}(W)$ на отрезке $[W_1, W_2]$. Если же $W_1 = W_2$, то в качестве w_{opt} берется та из точек W_1 или w^0 , в которой значение функции $\bar{U}(W)$ больше. Причем если $w_{opt} = w^0 > W_2$, то это означает, что страховая сумма больше той суммы, на которую рассчитывает страхователь (выгодоприобретатель – лицо, в пользу которого заключен договор страхования) в соответствии с его страховой премией. Поэтому он будет в этом случае выбирать из значений W_1 и W_2 исходя из условий наибольшей полезности; w_{opt} , определяемое таким образом, будем называть **субъективно оптимальной страховой выплатой**.

В случае, когда \bar{U}' не зависит от W и стационарной точки нет, в то же время \bar{U} зависит от W , поэтому w_{opt} – та из точек W_1 и W_2 , в которой значение \bar{U} больше. Если $\bar{U} = const$ на $[W_1, W_2]$, то w_{opt} можно найти из условия наибольшего суммарного среднего значения прибыли и убытка при страховании. Среднее значение вычисляется по формуле $p \cdot (W - vW) - (1 - p) \cdot vW$, откуда $w_{opt} = \max\{W_2, L\}$ при $p > v$, $w_{opt} = \min\{W_1, L\}$ при $p \leq v$.

1.1.2. Модели страхования

Экологической моделью рассмотренной общей задачи является задача оценки необходимого наряда средств для предотвращения возможного ущерба при экологическом бедствии. В этой модели D – объем (стоимость) данных ресурсов; p – вероятность потери ресурсов; L – объем (стоимость), который (которую) индивид может потерять; W – наряд средств (мероприятий) по предотвращению ущерба, выраженный через объем или стоимость; v – доля средств (мероприятий), выделенная для предотвращения ущерба; $W \cdot v$ – плата за причиненный ущерб.

Финансово-экономической моделью общей задачи является задача оценки страховой суммы для возмещения возможного ущерба в следующей интерпретации: D – финансовое состояние данного индивида; p – вероятность потери части капитала; L – капитал, который индивид может потерять; W – страховая выплата; v – страховая ставка; $W \cdot v$ – страховая премия.

При первом исходе, когда часть капитала теряется, на выходе будет сумма $D - L - v \cdot W + W$, так как от имеющегося капитала D нужно

вычесть 1) капитал L , который теряется в результате некоторой ситуации; 2) страховую премию $v \cdot W$, а также 3) прибавить страховую выплату W , которая представляет собой возмещение нанесенного ущерба; полезность этого исхода $U_1 = U(D - L - v \cdot W + W)$, где U – функция полезности.

При втором исходе, когда нет потери части капитала, на выходе будет сумма $D - v \cdot W$, т.е. из имеющегося капитала D вычитается страховая премия $v \cdot W$. Полезность этого исхода $U_2 = U(D - v \cdot W)$. Средняя полезность для страхователя

$$\bar{U} = p \cdot U_1 + (1 - p) \cdot U_2.$$

Для отыскания страховой суммы w_{opt} используется рассмотренный выше алгоритм.

Психологической моделью общей задачи может служить следующая задача: D – психическое состояние индивида; p – вероятность изменения этого состояния; L – часть импульсов, подвергнутых изменению в результате некоего воздействия; v – доля (процент) видоизмененных импульсов; W – воздействие, противодействующее изменению; $W \cdot v$ – страховая премия за риск изменения импульсов.

В юриспруденции аналогичная задача может быть сформулирована следующим образом: D – материалы данного дела, выраженные, например, через объем информационных единиц типа фактов по делу, статей закона и т.п.; p – вероятность изменения некоторых данных по делу; L – материалы дела, которые могут быть изменены; v – доля таких материалов; W – факты, противоречащие изменению материалов дела; $W \cdot v$ – страховая премия за риск изменения материалов дела.

В учебном процессе аналогичная задача может быть промоделирована, допустим, следующим образом: D – время, отводимое на изучение данного вопроса; p – вероятность того, что вызванный обучаемый плохо знает данный материал; L – напрасно потерянное время в связи с плохим ответом; v – непродуктивный процент времени данного обучаемого; W – компенсация потерянного времени за счет преподавателя (путем интенсификации работы или уменьшения количества времени, отводимого на другие вопросы); $W \cdot v$ – страховая премия за риск потери времени. Возможны следующие модификации данной ситуации: страхователем выступает ученик, страховщиком – преподаватель (возможно, с группой обучаемых); страхующимся и страховщиком выступает преподаватель.

1.1.3. Типология личности

Прежде чем привести типологию личности, дадим определение строго вогнутой и строго выпуклой функции [59].

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в данном промежутке, называется **выпуклой (вогнутой)** в этом промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)),$$

каковы бы ни были положительные числа α_1 и α_2 , в сумме дающие единицу.

Известно, что если $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) в данном промежутке, то в нем функция $f(x)$ будет вогнутой (выпуклой). При этом, если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то в определении знак неравенства будет строгим.

Определение 2. Если в данном промежутке $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то функция $f(x)$ называется **строго вогнутой (строго выпуклой)** в этом промежутке, а промежуток называется *промежутком строгой вогнутости (строгой выпуклости)*.

Типологию личности рассмотрим по отношению людей к **риску** [21], [25]. Для этого используется функция полезности U , и в зависимости от ее вида выделяют типы индивидов. Для каждого типа найдем экстремальное значение страховой выплаты, экстремальное значение функции полезности и проанализируем возможные значения страховой суммы w_{opt} .

1. Не склонен к риску (соответствующая функция полезности показана на рис. 1.1).

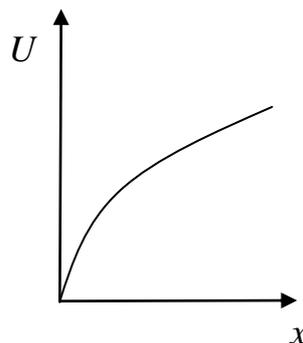


Рис. 1.1

Аналитически эту функцию можно задать, например, при помощи функции $U(x) = \sqrt{x}$, где x – ожидаемая оценка исхода ($x \geq 0$). Это строго вогнутая функция при $x > 0$.

В этом случае $\bar{U}(W) = p \cdot (D - L - v \cdot W + W)^{\frac{1}{2}} + (1 - p) \cdot (D - v \cdot W)^{\frac{1}{2}}$, и с учетом (1.1.2) получаем:

$$\bar{U}'(W) = \frac{p(1-v)}{2\sqrt{D-L+W(1-v)}} - \frac{(1-p)v}{2\sqrt{D-vW}}. \quad (1.1.3)$$

Условие $\bar{U}'(W) = 0$ преобразуется к виду

$$\frac{D-vW}{D-L-v \cdot W + W} = \frac{(1-p)^2 \cdot v^2}{p^2 \cdot (1-v)^2},$$

откуда находится стационарное значение w^0 :

$$w^0 = \frac{D \cdot p^2 \cdot (1-v)^2 - (D-L) \cdot (1-p)^2 \cdot v^2}{(1-p)^2 \cdot v^2 \cdot (1-v) + vp^2(1-v)^2}. \quad (1.1.4)$$

Особый интерес представляет случай $v = p$, когда процент обстоятельств, ведущих к изменению D , равен вероятности этого изменения. Подставив в выражение (1.1.4) вместо v вероятность p , после преобразования получаем, что $w^0 = L$. Следовательно, значение противодействия w^0 будет в данном случае совпадать с частью D , которая с вероятностью, равной v , подлежит изменению. Из выражения (1.1.3) при $v = p$ следует: если $W < L$, то $\bar{U}'(W) > 0$, если $W > L$, то $\bar{U}'(W) < 0$. Значит, при $w^0 = L$ средняя полезность имеет максимальное значение, равное $\bar{U}_{\max} = (D - p \cdot L)^{\frac{1}{2}}$, при этом оба исхода, x_1 и x_2 , оцениваются как $x_1 = x_2 = D - p \cdot L$.

Нетрудно показать, что выводы будут те же самые, если в качестве $U(x)$ взять функцию $\ln(x+1)$ – в этом случае $\bar{U}_{\max} = \ln(D - p \cdot L + 1)$, либо функцию $1 - e^{-x}$ ($x > 0$), для которой $\bar{U}_{\max} = 1 - e^{-(D-pL)}$.

Значение w^0 будет оптимальным значением страховой выплаты. Однако страхующийся индивид может не располагать такой суммой, так как возможное значение своей страховой выплаты он определяет, например, в границах $W_1 \leq W \leq W_2 < L$. В этом случае индивид данного типа должен выбирать субъективно оптимальное значение из значений W_1 и W_2 при условии наибольшей полезности.

Обратим внимание на то, что если $w^0 = L$, то из выражения (1.1.3) вытекает, что $p = v$ при условии существования U' в точке $D - v \cdot L$.

2. Безразличен к риску (соответствующая функция полезности показана на рис. 1.2).

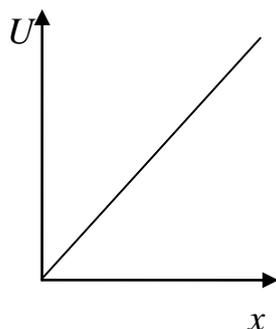


Рис. 1.2

Аналитически эта функция может быть представлена как прямо пропорциональная зависимость полезности U от исхода x : $U(x) = x$, $x \geq 0$. Это одновременно выпуклая и вогнутая функция. Для безразличного к риску индивида имеем

$$\bar{U}(W) = p \cdot (D - L - v \cdot W + W) + (1 - p) \cdot (D - v \cdot W). \quad (1.1.5)$$

Условие $\bar{U}'(W) = 0$ запишется в виде

$$\bar{U}'(W) = p \cdot (1 - v) - (1 - p) \cdot v = 0. \quad (1.1.6)$$

В этом случае стационарного значения w^0 нет, а после преобразования выражение (1.1.6) дает следующее соотношение между p и v :

$$\frac{v}{1 - v} = \frac{p}{1 - p},$$

которое интерпретируется так: если $\bar{U}'(W) = 0$, то отношение доли факторов, вызывающих изменение данного события или ситуации, к доле остальных факторов, связанных с данным событием или с данной ситуацией, равно отношению вероятности изменения к вероятности не изменения данного события или данной ситуации.

Раскрыв скобки в формуле (1.1.6), получим:

$$\bar{U}'(W) = p \cdot (1 - v) - (1 - p) \cdot v = p - p \cdot v - v + p \cdot v = p - v.$$

Пусть $W_1 \leq W \leq W_2$. Если $p > v$, то $\bar{U}'(W) > 0$ и средняя полезность $\bar{U}(W)$ будет возрастающей функцией относительно W , следовательно, максимального значения будет достигать в точке W_2 . Если $p < v$, то $\bar{U}'(W) < 0$ и средняя полезность $\bar{U}(W)$ будет убывающей функцией относительно W , а значит, максимального значения будет достигать в точке W_1 .

Равенство (1.1.5) несложно преобразуется к виду

$$\bar{U}(W) = (p - v) \cdot W + D - p \cdot L.$$

Отсюда при $p = v$ значение $\bar{U} = D - p \cdot L$, т.е. не зависит от W . Если исходить из условия наибольшего суммарного среднего значения прибыли и убытка при страховой выплате W и страховой премии vW , то это значение равно нулю и не зависит от W . Тогда, как нетрудно видеть, w_{opt} будет равно $\min\{W_1, L\}$.

3. Склонен к риску (функция полезности представлена на рис. 1.3).

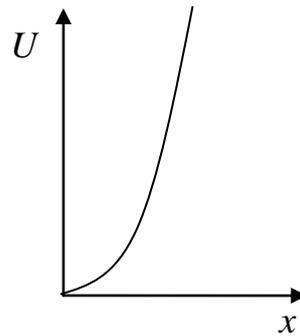


Рис. 1.3

В качестве ее математического выражения можно рассмотреть функцию $U(x) = x^2$, $x \geq 0$. Это строго выпуклая функция при $x \geq 0$. Для склонного к риску индивида

$$\bar{U}(W) = p \cdot (D - L - v \cdot W + W)^2 + (1 - p) \cdot (D - v \cdot W)^2;$$

$$\bar{U}'(W) = 2p \cdot (1 - v)(D - L - v \cdot W + W) - 2(1 - p) \cdot v(D - v \cdot W). \quad (1.1.7)$$

Отсюда из условия $\bar{U}'(W) = 0$ находится стационарная точка:

$$w^0 = \frac{p \cdot (D - L) + v \cdot (L \cdot p - D)}{2 \cdot v \cdot p - v^2 - p}. \quad (1.1.8)$$

При $p = v$ из равенства (1.1.8) получаем, что $w^0 = L$, т.е. тот же результат, что и несклонного к риску индивидуума (тип 1). Из выражения (1.1.7) при $p = v$ вытекает, что средняя полезность имеет минимальное значение $\bar{U}_{\min} = (D - p \cdot L)^2$ при $w^0 = L$.

Заметим, что для рассматриваемого типа, ориентируясь на рис. 1.3, можно функцию полезности задать как экспоненциальную, т.е. положить $U(x) = e^x - 1$, которая всюду является строго выпуклой. Тогда

$$\bar{U}(W) = p \cdot (e^{D-L-vW+W} - 1) + (1 - p) \cdot (e^{D-vW} - 1);$$

$$\bar{U}'(W) = p \cdot (1 - v) \cdot e^{D-L-vW+W} - (1 - p) \cdot v \cdot e^{D-vW}.$$

Если $p = v$, то из условия $\bar{U}'(W) = 0$ при $W = w^0$ получаем, что $w^0 = L$ и средняя полезность имеет минимальное значение $\bar{U}_{\min} = e^{D-pL} - 1$. Поэтому для данного типа оптимальная страховая выплата будет соответствовать одному из концов отрезка $[W_1, W_2]$. В общем виде этот вопрос решен в теореме 1.1.

Если $w^0 = L$, то можно показать, что из выражения (1.1.8) следует, что $p = v$ при $U'(D - L \cdot v) \neq 0$.

4. Объективное отношение к риску: индивид оценивает полезность своего выигрыша прямо пропорционально его величине (рис. 1.4), т.е. аналогично типу 2.

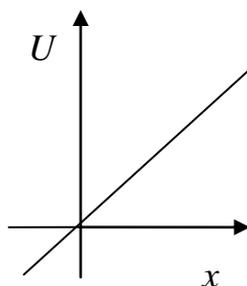


Рис. 1.4

5. Азартное отношение к риску: внимание акцентируется на выигрыше больших сумм, при этом выигрыш преувеличивается, а проигрыш преуменьшается (рис. 1.5).

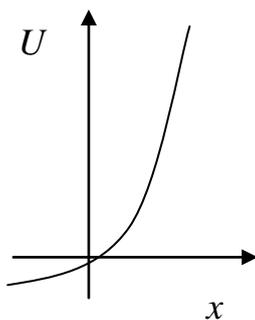


Рис. 1.5

Функция полезности в этом случае описывается, например, зависимостью $U(x) = e^x - 1$, аналогичной типу 3, но значение x может быть и отрицательным.

6. Осторожное отношение к риску: преувеличивается значение больших проигрышей, преуменьшается роль больших выигрышей

(рис. 1.6). Функция полезности описывается, например, зависимостью $U(x) = 1 - e^{-x}$. Это всюду строго вогнутая функция.

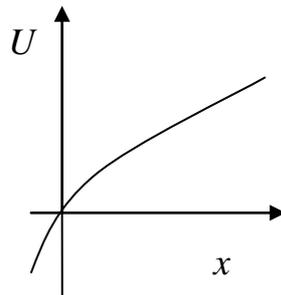


Рис. 1.6

Аналогично типу 1 при $p = v$, $w^0 = L$ с $\bar{U}_{\max} = 1 - e^{-(D-pL)}$. Вопрос о страховой сумме решается аналогично типу 1.

7. Отношение к риску бедняка: преувеличение значимости больших сумм, как положительных, так и отрицательных (рис. 1.7). При $x < 0$ функция полезности $U(x)$ вогнутая, при $x \geq 0$ $U(x)$ выпуклая.

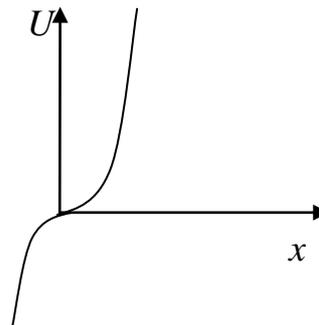


Рис. 1.7

8. Отношение к риску богача: преуменьшение роли больших сумм, как положительных, так и отрицательных (рис. 1.8). При $x < 0$ функция полезности $U(x)$ выпуклая, при $x \geq 0$ $U(x)$ вогнутая.

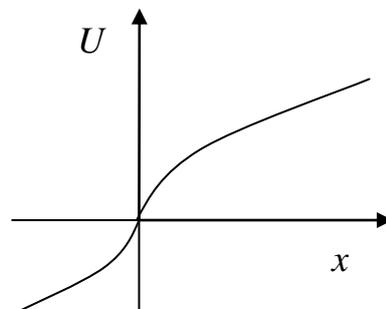


Рис. 1.8

9. Заурядное отношение к риску: погоня за растущей выгодой при соответствующей растущей осторожности (рис. 1.9). При $-d_2 \leq x \leq -d_1$ и $0 < x < d_1$ $U(x)$ выпуклая, при $-d_1 < x \leq 0$ и $d_1 \leq x \leq d_2$ $U(x)$ вогнутая.

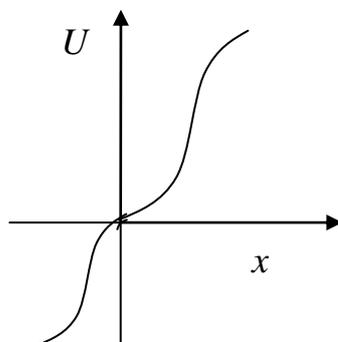


Рис. 1.9

Тип 7 аналитически можно описать кубической параболой $U(x) = x^3$, которая при $x < 0$ строго вогнутая, а при $x > 0$ строго выпуклая. Аналогично типам 3 и 5 можно показать, что при $p = v$ и $x \geq 0$ $w^0 = L$ и средняя полезность имеет минимальное значение $\bar{U}_{\min} = (D - pL)^3$. При $p = v$ и $x < 0$ $w^0 = L$ и средняя полезность \bar{U} аналогично типам 1 и 6 имеет максимальное значение, равное $(D - pL)^3$.

Тип 8 аналитически можно представить в виде $U(x) = \sqrt[3]{x}$. Эта функция является строго выпуклой при $x < 0$ и строго вогнутой при $x > 0$. При этом для $x \geq 0$ $w^0 = L$ и средняя полезность аналогично типам 1, 6 имеет максимальное значение $\bar{U}_{\max} = (D - pL)^{\frac{1}{3}}$; для $x < 0$ $\bar{U}_{\min} = (D - pL)^{\frac{1}{3}}$.

Тип 9 можно описать функцией $U(x) = c \cdot e^{-k(x-m)^2} - c \cdot e^{-km^2}$, где c, k, m – постоянные, причем $k > 0$ и для $x \geq 0$ значения c и m положительны, а для $x < 0$ – отрицательны. В самом деле, как видно из рис. 1.9, функция $U(x)$ симметрична относительно начала координат, в точках $\pm d_1$ имеет перегиб, а при $x = d_2$ ($x = -d_2$) достигает максимального (минимального) значения. Определим эти точки для введенной функции $U(x)$. Найдем

$$U'(x) = -2c(x - m) \cdot k \cdot e^{-k(x-m)^2};$$

$$U''(x) = -2c \cdot k \cdot e^{-k(x-m)^2} + 4c \cdot k^2 \cdot (x - m)^2 \cdot e^{-k(x-m)^2}.$$

$$\text{Отсюда имеем: } d_2 = m, \quad d_1 = m - \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad (m > 0), \quad -d_1 = m + \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad (m < 0).$$

Кроме того, для введенной функции $U(x)$ справедливо $U(0) = 0$. При

$-d_2 < x < -d_1$ и $d_1 < x < d_2$ функция $U(x)$ строго выпуклая, при $-d_1 < x \leq 0$ и $d_1 < x < d_2$ $U(x)$ строго вогнутая. Запишем для этой функции среднюю полезность $\bar{U}(W)$:

$$\bar{U}(W) = p \cdot c \cdot e^{-k(D-L-vW+W-m)^2} + (1-p) \cdot c \cdot e^{-k(D-vW-m)^2} - c \cdot e^{-k \cdot m^2}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} \bar{U}'(W) = & -2kpc(1-v) \cdot (D-L-vW+W-m)e^{-k(D-L-vW+W-m)^2} + \\ & + 2k(1-p) \cdot c \cdot v \cdot (D-vW-m) \cdot e^{-k(D-vW-m)^2}. \end{aligned}$$

Пусть $p = v$, тогда при $W = L$ $\bar{U}'(W) = 0$. Можно показать, что

$$\bar{U}''(L) = r \cdot e^{-k(D-pL-m)^2} \cdot [2k(D-pL-m)^2 - 1],$$

где $r = 2c \cdot k \cdot p \cdot (1-p)$, $c, m > 0$ при $x \geq 0$ и $c, m < 0$ при $x < 0$.

Вторая производная $\bar{U}''(L)$, используется для анализа $\bar{U}(W)$ на экстремум.

Заметим, что $\bar{U}''(L) < 0$ тогда и только тогда, когда либо $c > 0, m > 0$ и $m - 1/\sqrt{2k} < x_0 = D - pL \leq m$ (первый интервал), либо $c > 0, m < 0$ и $m + 1/\sqrt{2k} < x_0 = D - pL \leq 0$ (второй интервал). В этих интервалах $U(x)$ строго вогнута (см. рис. 1.9), а поскольку $\bar{U}''(L) < 0$, то в точке $W = L$ средняя полезность $\bar{U}(W)$ имеет максимум, т.е. $\bar{U}_{\max} = c \cdot e^{-k(D-pL-m)^2} - c \cdot e^{-km^2}$, где $c, m > 0$, если L находится в первом интервале, и $c, m < 0$, если L во втором интервале.

В то же время $\bar{U}''(L) > 0$ тогда и только тогда, когда либо $c < 0, m < 0$ и $m \leq x_0 = D - pL < m + 1/\sqrt{2k}$ (третий интервал), либо $c > 0, m > 0$ и $0 \leq x_0 < m - 1/\sqrt{2k}$ (четвертый интервал). Данные интервалы являются интервалами строгой выпуклости функции $U(x)$ (см. рис. 1.9).

Поскольку $\bar{U}''(L) > 0$, то при $W = L$ средняя полезность $\bar{U}(W)$ достигает минимального значения, причем $\bar{U}_{\min} = c \cdot e^{-k(D-pL-m)^2} - c \cdot e^{-km^2}$ и $c, m < 0$, если L в третьем интервале, $c, m > 0$, если L в четвертом интервале. При $w^0 = L$ из $\bar{U}'(W) = 0$ следует, что $p = v$.

10. Выгодное отношение к риску: назначается премия за выигрыш и штраф за проигрыш, в остальном – объективное отношение (рис. 1.10).

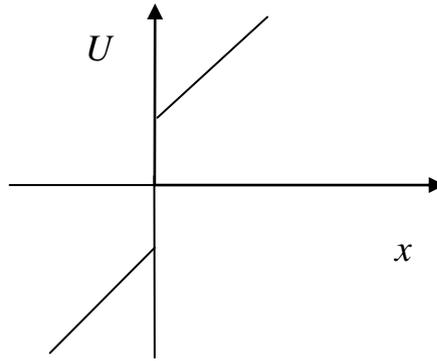


Рис. 1.10

11. Отчаянное отношение к риску: желание, во что бы то ни стало выиграть данную сумму (любая другая сумма – больше или меньше – не имеет значения) – рис. 1.11.

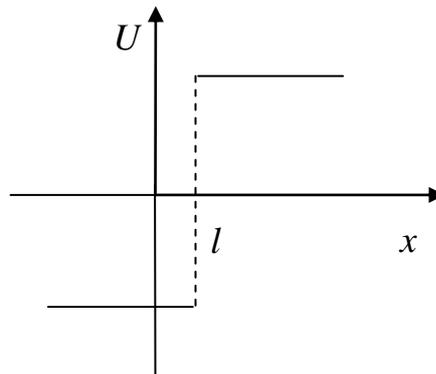


Рис. 1.11

Тип 10 можно описать формулой

$$U(x) = k_1 x + k_2,$$

где $k_2 > 0$ для $x \geq 0$ и $k_2 < 0$ для $x < 0$. Условие $\bar{U}'(W) = 0$ примет вид (1.1.6), т.е. будет такое же, как и для типа 2. При $p = v$ $w_{opt} = \min\{W_1, L\}$.

Тип 11 можно охарактеризовать функцией

$$U(x) = \begin{cases} -c, & \text{если } x < l, \\ c, & \text{если } x \geq l, \end{cases}$$

где $c = \text{const}$, $c > 0$. Условие $\bar{U}'(W) = 0$ в данном случае принимает тривиальный вид:

$$0 \cdot p(1-v) - 0 \cdot (1-p) \cdot v = 0,$$

что возможно при любых значениях p и v . Наибольшее значение $\bar{U}(W) = c$. Можно показать, что $w_{opt} = \min\{W_1, L\}$ при $x \in [\alpha, \beta]$, где $\alpha \geq l$.

Итак, приведенная типология личности по признаку отношения к риску является достаточно полной. Каждому человеку полезно определиться со своим отношением к риску. С этой методикой можно познакомиться, например, в работе [47]. Обобщим полученные результаты.

1.1.4. Метод оптимального страхования

Рассмотрим критерий наибольшей полезности страхования. Для этого докажем несколько утверждений.

Теорема 1.2. Если функция $U(x)$ – строго вогнутая (строго выпуклая) на отрезке $[\alpha, \beta]$, то $\bar{U}(W)$ будет строго вогнутой (строго выпуклой) на $[W_1, W_2]$, где для любого $W \in [W_1, W_2]$

$$\begin{aligned} (\alpha - D + L)/(1 - v) \leq W \leq (\beta - D + L)/(1 - v), \\ (D - \beta)/v \leq W \leq (D - \alpha)/v. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что система (1.1.9) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \alpha \leq D - L - vW + W \leq \beta, \\ \alpha \leq D - vW \leq \beta. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Пусть $U(x)$ – строго вогнутая (строго выпуклая) на $[\alpha, \beta]$, тогда из (1.1.10) следует, что

$$\begin{aligned} U''(D - L - vW + W) < 0 \quad (U''(D - L - vW + W) > 0); \\ U''(D - vW) < 0 \quad (U''(D - vW) > 0). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.1.9) получаем: $\bar{U}''(W) < 0$ ($\bar{U}''(W) > 0$) для $W \in [W_1, W_2]$, где W_1 и W_2 определяются условиями (1.1.9).

Следствие. Из системы неравенств (1.1.9) вытекает, что $\max\{(\alpha - D + L)/(1 - v), (D - \beta)/v\} \leq W \leq \min\{(\beta - D + L)/(1 - v), (D - \alpha)/v\}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} W_1 &= \max\{(\alpha - D + L)/(1 - v), (D - \beta)/v\}; \\ W_2 &= \min\{(\beta - D + L)/(1 - v), (D - \alpha)/v\}. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Заметим, если $U(x)$ – линейная, то и $\bar{U}(W)$ – линейная функция, причем \bar{W}_1 и \bar{W}_2 удовлетворяют условиям (1.1.11).

Теорема 1.3. Пусть $U(x)$ – строго вогнутая (строго выпуклая) на $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, точки $x_1 = D - L - vW + W$, $x_2 = D - vW$ и $x_0 = D - vL$ принадлежат $[\alpha, \beta]$ при $W \in [W_1, W_2]$, где W_i ($i=1, 2$) определяются из выражений (1.1.11), $U'(D - vL) \neq 0$ и определена в этих точках, где L – заданная постоянная величина. Необходимым и достаточным условием

того, чтобы функция $\bar{U}(W)$, определяемая равенством (1.1.1), имела экстремум при $W = L$, является равенство $p = v$, причем в случае строгой вогнутости это будет максимум $\bar{U}_{\max} = U(D - pL)$, а в случае строгой выпуклости – минимум $\bar{U}_{\min} = U(D - pL)$.

Доказательство. Пусть $p = v$, тогда из условия (1.1.2) при $\bar{U}'(W) = 0$ следует, что

$$U'_x(D - L - v \cdot W + W) = U'_x(D - v \cdot W). \quad (1.1.12)$$

Если функция $U(x)$ - строго вогнутая (строго выпуклая) на $[\alpha, \beta]$, то в данном промежутке ее первая производная монотонно убывает (возрастает), т.е. в разных точках имеет разные значения. Тогда из равенства (1.1.12) следует, что

$$D - L - v \cdot W + W = D - v \cdot W,$$

т.е. $W = L$.

Найдем

$$\bar{U}''(W) = p(1-p)^2 \cdot U''_x(D - L - v \cdot W + W) + (1-p) \cdot p^2 \cdot U''_x(D - v \cdot W).$$

Отсюда

$$\bar{U}''(L) = p \cdot (1-p) \cdot U''_x(D - v \cdot L). \quad (1.1.13)$$

По условию, в промежутке $[\alpha, \beta]$ $U''(x) < 0$ ($U''(x) > 0$), следовательно, в этом промежутке $U''_x(D - v \cdot L) < 0$ ($U''_x(D - v \cdot L) > 0$).

Поэтому с учетом (1.1.13) имеем $\bar{U}''(L) < 0$ ($\bar{U}''(L) > 0$), т.е. при $W = L$ функция $\bar{U}(W)$ имеет максимум (минимум). При этом

$$\bar{U}(L) = pU(D - L - pL + L) + (1-p) \cdot U(D - pL) = U(D - pL).$$

Верно и обратное: если $\bar{U}(W)$ имеет экстремум при $W = L$, то, поскольку $W = L$, имеем:

$$D - L - v \cdot W + W = D - v \cdot W; \quad U'_x(D - L - v \cdot L + L) = U'_x(D - v \cdot L).$$

Необходимое условие экстремума: $\bar{U}'(L) = 0$. Тогда

$$\bar{U}'(L) = p \cdot U'_x(D - v \cdot L) \cdot (1-v) - (1-p)U'_x(D - v \cdot L) \cdot v = 0.$$

Поскольку U'_x определена и не равна нулю в точке $D - v \cdot L$, то $p(1-v) = v(1-p)$, т.е. $p - vp = v - vp$, или $v = p$.

Замечание. Если $x_0 = D - v \cdot L$ не принадлежит $[\alpha, \beta]$, то решается задача отыскания наибольшего значения функции на отрезке с использованием теоремы 1.4.

Теорема 1.4. Пусть $p = v$, точки $x_1 = D - L - vW + W$, $x_2 = D - vW$ принадлежат $[\alpha, \beta]$ при $W \in [W_1, W_2]$, тогда: 1) если $U(x)$ – строго вогнутая функция на $[\alpha, \beta]$, $L < W_2$, то $\bar{U}(W)$ достигает наибольшего значения при $W = L$; 2) если $L \geq W_2$ и $\bar{U}(W_1) \geq 0$, то $\bar{U}(W)$ достигает наибольшего значения при $W = W_2$; 3) если $L \geq W_2$ и $\bar{U}(W_1) \leq 0$, то $\bar{U}(W_1)$ будет наибольшим значением. Для строго выпуклой функции $U(x)$ при $\bar{U}(W_1) \geq 0$ наибольшим значением будет $\bar{U}(W_2)$, при $\bar{U}(W_1) \leq 0$ таковым будет $\bar{U}(W_1)$.

Доказательство. Пусть $W_i \in \{W_1, W_2\}$ и $U(x)$ – строго вогнутая функция и $p = v$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{U}(W_i) &= p \cdot U(D - L - pW_i + W_i) + (1 - p) \cdot U(D - pW_i) < \\ &< U(p \cdot (D - L) + p(1 - p)W_i + (1 - p) \cdot (D - pW_i)) = \\ &= U(p \cdot D - p \cdot L + pW_i - p^2W_i + D - pW_i - pD + p^2W_i) = U(D - pL) = \bar{U}_{\max} = \bar{U}(L). \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{U}(W_i) < \bar{U}(L)$. Таким образом, если $L < W_2$, то в случае строгой вогнутости $U(x)$ наибольшее значение функции $\bar{U}(W)$ будет при $W = L$. Аналогично доказывается, что для строго выпуклой функции $\bar{U}(W_i) > \bar{U}(L)$, $i = 1, 2$.

Пусть $L \geq W_2$ для строго вогнутой функции $U(x)$ ($L \notin [W_1, W_2]$ для строго выпуклой функции).

Согласно алгоритму отыскания наибольшего и наименьшего значения на отрезке, наименьшее (наибольшее) значение $\bar{U}(W)$ будет либо при $W = W_1$, либо при $W = W_2$. Конкретизируем наименьшее (наибольшее) значение. Поскольку функция $U(x)$ – строго вогнутая (строго выпуклая) на $[\alpha, \beta]$, то, как следует из теоремы 1.2, $\bar{U}(W)$ – строго вогнутая (строго выпуклая) на $[W_1, W_2]$ функция, где W_1, W_2 определяются из условий (1.1.11). Тогда $\bar{U}(W_2) > \bar{U}(W_1)$ и $\bar{U}(W_1) \geq 0$ либо $\bar{U}(W_2) < \bar{U}(W_1)$ и $\bar{U}(W_1) \leq 0$ тогда и только тогда, когда абсцисса w_0 точки пересечения с осью OW секущей, соединяющей точки $(W_1, \bar{U}(W_1))$ и $(W_2, \bar{U}(W_2))$, удовлетворяет условию $w_0 \leq W_1$.

Запишем уравнение этой секущей:

$$\frac{W - W_1}{W_2 - W_1} = \frac{\bar{U}(W) - \bar{U}(W_1)}{\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1)}.$$

Отсюда

$$\bar{U}(W) = \frac{\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1)}{W_2 - W_1} W + \frac{\bar{U}(W_1) \cdot W_2 - W_1 \cdot \bar{U}(W_2)}{W_2 - W_1}. \quad (1.1.14)$$

Значение w_0 находим из формулы (1.1.14) при условии $\bar{U}(w_0) = 0$.

Тогда

$$w_0 = \frac{W_1 \cdot \bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1) \cdot W_2}{\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1)}. \quad (1.1.15)$$

Пусть $w_0 \leq W_1$, тогда

$$\frac{W_1 \cdot \bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1) \cdot W_2}{\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1)} \leq W_1; \quad (1.1.16)$$

$$\frac{W_1 \cdot \bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1) W_2 - W_1 (\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1))}{\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1)} \leq 0; \quad (1.1.17)$$

$$\frac{\bar{U}(W_1)(W_1 - W_2)}{\bar{U}(W_2) - \bar{U}(W_1)} \leq 0, \quad (1.1.18)$$

отсюда либо $\bar{U}(W_1) \geq 0$ и $\bar{U}(W_2) > \bar{U}(W_1)$, либо $\bar{U}(W_1) \leq 0$ и $\bar{U}(W_2) < \bar{U}(W_1)$.

Исходя из полученных условий, двигаясь вверх по цепочке неравенств (1.1.18)–(1.1.16), получаем, что $w_0 \leq W_1$. Аналогично $w_0 \geq W$ тогда и только тогда, когда либо $\bar{U}(W_1) \leq 0$ и $\bar{U}(W_2) > \bar{U}(W_1)$, либо $\bar{U}(W_1) \geq 0$ и $\bar{U}(W_2) < \bar{U}(W_1)$.

Полученный результат проиллюстрирован на графиках типов 1, 3, 5–9.

Следовательно, при $\bar{U}(W_1) \geq 0$ для функций полезности типов 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 $\bar{U}(W_2) > \bar{U}(W_1)$. Для этих функций в зоне строгой вогнутости $\bar{U}(W_1)$ будет представлять собой наименьшее значение при $W \in [W_1, W_2]$, в зоне строгой выпуклости $\bar{U}(W_2)$ будет наибольшим значением в промежутке $[W_1, W_2]$. Для этих же типов при $\bar{U}(W_1) \leq 0$ будет выполняться условие $\bar{U}(W_2) < \bar{U}(W_1)$. Поэтому в случае строгой вогнутости $\bar{U}(W_2)$ будет наименьшим значением в промежутке $[W_1, W_2]$, в промежутках строгой выпуклости $\bar{U}(W_1)$ будет наибольшим значением в $[W_1, W_2]$.

Замечание. Сам страхователь в общем случае может определять возможные границы страховой выплаты по-другому, например как

$W'_1 \leq W \leq W'_2$, причем W'_1 и W'_2 могут не совпадать с соответствующими границами W_1 и W_2 , определенными из равенств (1.1.11). Здесь возможны следующие случаи:

если $[W'_1, W'_2] \subset [W_1, W_2]$, то вместо $[W_1, W_2]$ рассматривается отрезок $[W'_1, W'_2]$, для которого проводятся все те же рассуждения, что и для $[W_1, W_2]$;

если $[W'_1, W'_2] \supset [W_1, W_2]$, то отрезок $[W'_1, W'_2]$ представляется в виде $\Delta_1 \cup [W_1, W_2] \cup \Delta_2$.

Для Δ_1 и Δ_2 находятся соответствующие отрезки изменения x по теореме 1.4, для каждого из которых определяется выпуклость (вогнутость) функции $U(x)$.

Далее для каждого из этих отрезков проводятся те же рассуждения, что и для $[W_1, W_2]$.

Наконец, если $\Delta = [W'_1, W'_2] \cap [W_1, W_2] \neq \emptyset$ (\emptyset обозначает пустое множество), то либо $[W'_1, W'_2] = \Delta \cup \Delta'$, где $\Delta' = [W'_1, W'_2] \setminus [W_1, W_2]$, либо $[W'_1, W'_2] = \Delta' \cup \Delta$. В обоих случаях для Δ' и Δ проводятся те же рассуждения, что и для Δ_1 и Δ_2 предыдущего случая.

Итак, пусть $p = v$, тогда если лицо, принимающее решение, относится к типу 1 или 6 (его функция полезности строго вогнутая) и если при этом $L \leq W_2$, то для него средняя полезность \bar{U} имеет наибольшее значение при $W = L$; если $L > W$, то наибольшее значение будет при $W = W_2$, если $\bar{U}(W_1) \geq 0$, или при $W = W_1$, если $\bar{U}(W_1) \leq 0$.

Если лицо, принимающее решение, относится к типу 3 или 5 (его функция полезности строго выпуклая), для него \bar{U} имеет наибольшее значение при $W = W_2$, если $\bar{U}(W_1) \geq 0$, или при $W = W_1$, если $\bar{U}(W_1) \leq 0$.

Для типов 2, 4, 10, 11 при $v = p$ средняя полезность \bar{U} не зависит от W , оптимальное значение $w_{opt} = \min\{W_1, L\}$. Для типов 7, 8 и 9 – в области строгой выпуклости – аналогично типу 3, в области строгой вогнутости – аналогично типу 1.

Таким образом, при наибольшей полезности от страхования соответствующая величина страховой суммы зависит от психологических характеристик индивида. Здесь можно выделить четыре основных

класса: первый класс составляют типы 1 и 6, второй – типы 3, 5, третий – типы 7, 8, 9, четвертый – типы 2, 4, 10, 11. В связи с этим в организациях, где происходит страхование, необходимо организовать службу психолога, который для каждого индивида по разработанной методике определения типа личности, согласно отношению страхователя к риску, определяет класс, к которому он относится. На основании этого предлагается обоснованная оптимальная сумма страхования.

Например, $L = 100$ ден. ед., $p = v$ и страхователь имеет 90 ден. ед., т.е. $W_1' = W_2' = 90$. Пусть $W_1' \in [W_1, W_2]$, $\bar{U}(W_1') \geq 0$. Тогда в случае несклонности страхователя к риску значение страховой выплаты в 90 ден. ед. будет не оптимальным, а только субъективно оптимальным. В случае его склонности к риску данное значение будет оптимальным, т.е. будет страховой суммой. В случае безразличия к риску это значение также будет страховой суммой. Если страхователь оценивает свои возможности в границах от 80 до 90 ден. ед., при этом для него $\bar{U}(80) \leq 0$, то значение в 80 ден. ед. будет субъективно оптимальным для несклонного к риску, будет оптимальным для склонного и безразличного к риску.

Предложенный метод страхования отличается простотой, наглядностью и универсальностью, имеет большое научное и практическое значение, так как определяет объективную оптимальную величину страховой выплаты, т.е. страховую сумму, в каждом отдельном случае.

Из теорем 1.2–1.4 вытекает следующий алгоритм определения с страховой суммы:

1. Задать D , L и $p = v$.
2. По методике Неймана – Morgenштерна определения отношения индивида к риску [47] с привлечением психологических тестов определяется функция полезности $U(x)$ индивидуума на отрезке $[a, b]$.
3. Отрезок $[a, b]$ разбивается на промежутки, где $U''(x) > 0$ (строгая выпуклость), $U''(x) < 0$ (строгая вогнутость), $U''(x) = 0$ ($U(x)$ описывает линейную зависимость).
4. Для каждого из промежутков строгой вогнутости (строгой выпуклости и линейности) $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ определяется соответствующий промежуток $[W_1, W_2]$ по формулам (1.1.11).
5. В случае строгой вогнутости, если стационарная точка $w^0 = L \leq W$, то в этом промежутке $\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(D - vL)$, оптимальная величина страховки равна L .
6. Если $L > W_2$, $\bar{U}(W_1) \geq 0$, то $\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(W_2)$ и субъективно оптимальная величина страховой выплаты равна W_2 ; если $\bar{U}(W_1) < 0$, то

$\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(W_1)$ и субъективно оптимальная величина страховой выплаты равна W_1 .

7. Для каждого из промежутков строгой выпуклости $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ величина страховой суммы $w_{онт} = W_2$ и $\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(W_2)$ при $\bar{U}(W_1) \geq 0$ и $w_{онт} = W_1$, $\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(W_1)$ при $\bar{U}(W_1) \leq 0$.

8. В каждом промежутке $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ линейной зависимости U от x для типов 2, 4, 10, 11 при $p = v \bar{U}$ не зависит от W , $w_{онт} = \min\{W_1, L\}$, для типа 11 $\alpha \geq l$.

9. Если $[W_1, W_2] \neq [W'_1, W'_2]$, то поступаем, как указано в замечании к теореме 1.4, т.е. рассматриваем несколько отрезков, для каждого из которых выполняются те же шаги 5–8, что и для $[W_1, W_2]$.

10. Если $[W_1, W_2] \neq [W'_1, W'_2]$ содержит несколько промежутков выпуклости, вогнутости и линейности и $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m$ – соответствующие наибольшие значения в этих промежутках, то наибольшим значением $\bar{U}(W)$ на $[W'_1, W'_2]$ будет наибольшее из этих значений. Соответствующее значение W будет субъективно оптимальной страховой выплатой.

11. Страхователю предлагается сравнить результат с наибольшим, полученным при использовании отрезка $[W_1, W_2]$, и, по возможности, скорректировать свой промежуток значения страховой выплаты.

1.1.5. Оптимальное функционирование системы «страховщик – страхователь»

Итак, мы детально рассмотрели вопрос о страховой сумме для страхователя. Вторая сторона – страховщик – также имеет два исхода, y_1 и y_2 , и свою среднюю полезность, определяемую по формуле

$$\bar{U}_c(W) = p \cdot U_c(f_1(W)) + (1-p)U_c(f_2(W)),$$

где $\bar{U}_c(y)$ – функция полезности страховщика; $y_1 = f_1(W)$, $y_2 = f_2(W)$; W – страховая выплата. Относительно страховщика можно рассматривать те же типы личности, которые были рассмотрены для страхователя.

Оптимальное функционирование исследуемой системы описывается совместными условиями:

$$\begin{cases} \bar{U}_c(W) \rightarrow \max, & W \in [W_1^c, W_2^c], \\ \bar{U}(W) \rightarrow \max, & W \in [W_1, W_2]. \end{cases} \quad (1.1.19)$$

Для упрощения выкладок будем считать, что $[W_1^c, W_2^c] = [W_1, W_2]$.

В связи с этим возникает задача поиска совместных типов страховщиков и страхователей, для которых система условий (1.1.19) имеет решение.

Если $y_1 = D_1 + vW - W$, $y_2 = D_1 + vW$, то для функции $\bar{U}_c(W)$ можно дословно повторить все те же рассуждения, которые проводились для функции $\bar{U}(W)$, с той лишь разницей, что для $\bar{U}_c(W)$ экстремальное значение $w^0 = 0$ и в алгоритме определения значения страховой суммы пункты 5 и 6 заменяются на утверждения о том, что в каждом промежутке вогнутости $\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(W_2)$, величина страховой суммы равна W_2 при $\bar{U}(W_1) \geq 0$, $\bar{U}_{наиб} = \bar{U}(W_1)$ и $w_{онт} = W$ при $\bar{U}(W_1) \leq 0$.

Пусть S_1 – страхователь, S_2 – страховщик. Введем отношение $S_1 R S_2$, означающее, что значения страховой суммы для S_1 и S_2 совпадают. Это рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, S_1 и S_2 принадлежат множеству психологических типов $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Отношение R можно задать симметрической матрицей размера $14 \cdot 14$ с учетом того, что функции полезности $U(x)$ типов 7–9 имеют как зоны выпуклости, так и зоны вогнутости. В клетке (i, j) будет стоять «1», если величина страховой суммы страхователя i типа совпадает с оптимальной величиной страховой суммы страховщика j типа. В противном случае в клетке (i, j) стоит «0». Знак «—» показывает, что данный вариант исключается в силу сделанных ниже предположений.

Пусть $p = v$, $\bar{U}(W_1) \geq 0$ и $\bar{U}_c(W_1) \geq 0$, $\min\{W_1, L\} = W_1$, $\alpha \geq l$, $W = L$ принадлежит отрезку $[W_1, W_2]$, $W = 0$ не принадлежит отрезку $[W_1, W_2]$, l – параметр зависимости типа 11, одинаковый для S_1 и S_2 . Для упрощения выкладок будем также считать, что параметры зависимости типа 9 для S_1 и S_2 аналогичны. Тогда на основе алгоритма определения значения страховой суммы для страхователя S_1 и страховщика S_2 получим матрицу, которую можно назвать *матрицей оптимального страхования*. В этой матрице через «вог» обозначены столбец и строка, для которых $U_c(y)$ вогнута на $[\alpha, \beta]$, а через «вып» – то же самое для

выпуклой на $[\alpha, \beta]$ функции $U_c(y)$. Итак, матрица оптимального страхования для рассматриваемого случая имеет вид [27]:

	1	2	3	4	5	6	7		8		9		10	11
							вып	вог	вып	вог	вып	вог		
1	0	0	0	0	0	0	0	–	–	0	0	0	0	0
2		1	0	1	0	0	0	–	–	0	0	0	0	1
3			1	0	1	1	1	–	–	1	1	1	1	0
4				1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5					1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
6						0	0	0	0	0	0	0	0	0
7		вып		вог			1	–	–	1	1	1	1	0
								0	0	–	0	0	0	0
8		вып		вог					1	–	1	1	0	0
										0	0	0	0	0
9		вып		вог							1	1	0	0
													0	0
10													1	1
11														1

Аналогично строится матрица оптимального страхования для случаев:

- 1) $W = L$ и $W = 0$ принадлежат $[W_1, W_2]$;
- 2) $W = L$ и $W = 0$ не принадлежит $[W_1, W_2]$;
- 3) $W = L$ не принадлежит, а $W = 0$ принадлежит $[W_1, W_2]$;
- 4) S_1 и S_2 имеют разные параметры зависимости: а) типа 9, б) типа 11;
- 5) $[W_1, W_2] \neq [W_1^c, W_2^c]$;
- 6) $\bar{U}(W_1) \leq 0, \bar{U}_c(W_1) \leq 0$;
- 7) $\bar{U}(W_1)$ и $\bar{U}_c(W_1)$ разных знаков;
- 8) $\min\{W_1, L\} = L$;
- 9) $\alpha \leq l$.

Итак, научная значимость и новизна рассмотренного в данном параграфе материала определяется следующими результатами:

1. Рассмотрены разные модели страхования в социально-экономической жизни общества.
2. Приведена обобщенная типология личности, смоделированная возможными функциональными зависимостями.
3. Установлена связь между величиной страховой выплаты и ожидаемой оценкой исхода.
4. Решена общая задача оптимального страхования для любого типа личности.

5. Разработан оригинальный метод оптимального страхования, связанный с психологическими типами индивидов, основанный на их отношении к риску, а также реализующий его алгоритм.

6. Построена матрица оптимального страхования, моделирующая оптимальное функционирование системы «страховщик – страхователь».

Полученные результаты могут найти широкое применение при страховании от экологических, финансово-экономических, социально-психологических и других рисков.

§ 1.2. Риск и полезность ситуаций и процессов

При принятии решений в социально-экономической сфере важными задачами являются сравнение результатов различных ситуаций (процессов) и преобразование одной ситуации в другую (одного процесса в другую). Под сравнением ситуаций (процессов) понимается определение (оценка) предпочтительности (равноценности) их результатов (последствий). Определение ситуации и процесса, а также методика вычисления их результатов для непрерывных и дискретных случайных величин рассмотрены в статьях [40, 41]. Согласно данной методике ситуация имеет множество значений факторных признаков X и множество значений результативных признаков Y . В общем случае X и Y – случайные величины, которые для процесса зависят от времени, т.е. являются случайными функциями.

1.2.1. Векторное описание ситуаций и процессов

Для дискретного множества факторов и результатов при определении среднего риска \bar{r} и средней полезности \bar{u} задаются матрицы (таблицы) вероятностей $p(x_i, y_j)$ ($p(x_i, y_j; t)$) совместного осуществления x_i и y_j для ситуаций (процессов), а также таблицы коэффициентов сожаления и полезности: $k(x_i, y_j)$ и $s(x_i, y_j)$ для ситуаций и $k(x_i, y_j; t)$ и $s(x_i, y_j; t)$ для процессов, таблицы для рисков и полезности: $r(x_i, y_j)$ и $u(x_i, y_j)$ для ситуаций и $r(x_i, y_j; t)$ и $u(x_i, y_j; t)$ для процессов.

Для сокращения записи при описании ситуации и процесса будем опускать аргументы x_i и y_j , индексирова функцию соответствующим образом. Например, вместо $k(x_i, y_j)$ будем писать k_{ij} .

Пусть таблицы, задающие вероятности p_{ij} , риски r_{ij} , полезности u_{ij} , коэффициенты сожаления k_{ij} и полезности s_{ij} , имеют соответственно вид:

Вероятности

	y_j	y_1	y_2	\dots	y_m
x_i					
x_1		p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1m}
x_2		p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2m}
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n		p_{n1}	p_{n2}	\dots	p_{nm}

Риски					
	y_j	y_1	y_2	\dots	y_m
x_i					
x_1		r_{11}	r_{12}	\dots	r_{1m}
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n		r_{n1}	r_{n2}	\dots	r_{nm}

Полезности					
	y_j	y_1	y_2	\dots	y_m
x_i					
x_1		u_{11}	u_{12}	\dots	u_{1m}
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n		u_{n1}	u_{n2}	\dots	u_{nm}

Коэффициенты сожаления					
	y_j	y_1	y_2	\dots	y_m
x_i					
x_1		k_{11}	k_{12}	\dots	k_{1m}
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n		k_{n1}	k_{n2}	\dots	k_{nm}

Коэффициенты полезности					
	y_j	y_1	y_2	\dots	y_m
x_i					
x_1		s_{11}	s_{12}	\dots	s_{1m}
\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n		s_{n1}	s_{n2}	\dots	s_{nm}

Средний риск равен сумме произведений коэффициентов сожаления и соответствующих элементов r_{ij} на соответствующие вероятности $p(x_i, y_j)$, средняя полезность представляет собой сумму произведений коэффициентов полезности, функций полезности и вероятностей. Поэтому удобно и целесообразно характеризовать ситуации наборами указанных произведений, т.е. векторами; а процессы – подобными векторами с коэффициентами, зависящими от времени.

Соответствующие векторы будем обозначать через *ситуация*(\bar{r}), *процесс*(\bar{r}), *ситуация*(\bar{u}), *процесс*(\bar{u}) (здесь \bar{r} – средний риск, \bar{u} – средняя полезность). Таким образом,

$$\begin{aligned} & \text{ситуация}(\bar{r}) = \\ & = \left\{ k(x_1, y_1) \cdot r(x_1, y_1) \cdot p(x_1, y_1), k(x_1, y_2) \cdot r(x_1, y_2) \cdot p(x_1, y_2), \dots, \right. \\ & \left. k(x_i, y_j) \cdot r(x_i, y_j) \cdot p(x_i, y_j), \dots, k(x_n, y_m) \cdot r(x_n, y_m) \cdot p(x_n, y_m) \right\}; \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{процесс}(\bar{r}) = \\ & = \left\{ k(x_1, y_1; t) \cdot r(x_1, y_1; t) \cdot p(x_1, y_1; t), k(x_1, y_2; t) \cdot r(x_1, y_2; t) \cdot p(x_1, y_2; t), \dots, \right. \\ & \left. k(x_n, y_m; t) \cdot r(x_n, y_m; t) \cdot p(x_n, y_m; t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Аналогично определяются *ситуация*(\bar{u}) и *процесс*(\bar{u}), но вместо коэффициента сожаления k используется коэффициент полезности, а вместо функции рисков – функция полезности.

1.2.2. Измерение ситуаций и процессов

С каждым мероприятием или решением может быть связано несколько ситуаций (процессов). Какой ситуации (какому процессу) отдать предпочтение? Возникает задача измерения ситуаций (процессов). При векторной трактовке ситуации и процессы удобно измерять длинами соответствующих векторов.

Тогда

$$\text{Мера (ситуации}(\bar{r})) = \sqrt{\sum_{ij} (k_{ij} \cdot r_{ij} \cdot p_{ij})^2}; \quad (1.2.3)$$

$$\text{мера (ситуации}(\bar{u})) = \sqrt{\sum_{ij} (u_{ij} \cdot r_{ij} \cdot p_{ij})^2}; \quad (1.2.4)$$

$$\text{мера (процесса}(\bar{r})) = \sqrt{\sum_{ij} (k_{ij}(t) \cdot r_{ij}(t) \cdot p_{ij}(t))^2}; \quad (1.2.5)$$

$$\text{мера (процесса}(\bar{u})) = \sqrt{\sum_{ij} (u_{ij}(t) \cdot r_{ij}(t) \cdot p_{ij}(t))^2}. \quad (1.2.6)$$

Очевидно, что ситуация 1 **предпочтительнее** ситуации 2, если

$$\text{мера (ситуации}_1(\bar{r})) < \text{мера (ситуации}_2(\bar{r})) \quad (1.2.7)$$

и

$$\text{мера (ситуации}_1(\bar{u})) > \text{мера (ситуации}_2(\bar{u})). \quad (1.2.8)$$

При этом одно из неравенств может быть нестрогим.

Если в формулах (1.2.7) и (1.2.8) поменять знаки местами, то предпочтительнее будет ситуация 2. Если в (1.2.7) и (1.2.8) неравенства будут одинакового смысла, то сравниваются отношения:

$$\frac{\text{мера (ситуации}_1(\bar{u}))}{\text{мера (ситуации}_1(\bar{r}))} \quad \text{и} \quad \frac{\text{мера (ситуации}_2(\bar{u}))}{\text{мера (ситуации}_2(\bar{r}))}.$$

Предпочтительнее будет та ситуация, для которой указанное отношение больше. В случае равенства отношений и весовых коэффициентов критериев полезности и риска ситуации считаются равноценными, так как во сколько раз ситуация хуже по признаку полезности, во сколько раз она лучше по признаку риска и наоборот. Если признаки полезности и риска неравнозначны, то предпочтительнее будет та ситуация, для которой отношение весовых коэффициентов будет больше. Предпочтительность процессов определяется аналогично.

Рассмотрим пример.

Решение некоторой задачи заключается в выборе одной из ситуаций, 1 или 2. Ситуации заданы таблицами вероятностей и рисков. Меры ситуаций по признаку полезности равны (для упрощения выкладок считаем коэффициенты сожаления равными единице):

1)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center; border: none;">Вероятности</th> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none; text-align: center;">y_j</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_1</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_2</td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_i</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,3</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,1</td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,4</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,2</td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table>	Вероятности				y_j	y_1	y_2	x_i				x_1	0,3	0,1		x_2	0,4	0,2		<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center; border: none;">Риски</th> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none; text-align: center;">y_j</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_1</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_2</td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_i</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">4</td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table>	Риски				y_j	y_1	y_2	x_i				x_1	2	4		x_2	5	3	
Вероятности																																								
	y_j	y_1	y_2																																					
x_i																																								
x_1	0,3	0,1																																						
x_2	0,4	0,2																																						
Риски																																								
	y_j	y_1	y_2																																					
x_i																																								
x_1	2	4																																						
x_2	5	3																																						
2)	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center; border: none;">Вероятности</th> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none; text-align: center;">y_j</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_1</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_2</td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_i</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,3</td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0,4</td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table>	Вероятности				y_j	y_1	y_2	x_i				x_1	0,2	0,3		x_2	0,1	0,4		<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center; border: none;">Риски</th> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none; text-align: center;">y_j</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_1</td> <td style="border: none; text-align: center;">y_2</td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_i</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_1</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none; text-align: center;">x_2</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">4</td> <td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table>	Риски				y_j	y_1	y_2	x_i				x_1	3	3		x_2	4	8	
Вероятности																																								
	y_j	y_1	y_2																																					
x_i																																								
x_1	0,2	0,3																																						
x_2	0,1	0,4																																						
Риски																																								
	y_j	y_1	y_2																																					
x_i																																								
x_1	3	3																																						
x_2	4	8																																						

По формуле (1.2.3):

$$\begin{aligned} \text{мера (ситуации}_1 (\bar{r})) &= \sqrt{(0,3 \cdot 2)^2 + (0,1 \cdot 4)^2 + (0,4 \cdot 5)^2 + (0,2 \cdot 3)^2} = \\ &= \sqrt{4,88} \approx 2,21; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{мера (ситуации}_2 (\bar{r})) &= \sqrt{(0,2 \cdot 3)^2 + (0,3 \cdot 3)^2 + (0,1 \cdot 4)^2 + (0,4 \cdot 8)^2} = \\ &= \sqrt{11,57} \approx 3,4. \end{aligned}$$

Согласно правилу (1.2.7) ситуация 1 предпочтительнее ситуации 2.

Если меры ситуаций (процессов) совпадают, то предпочтение можно определять при помощи **угла отклонения** соответствующих векторов от заданного **стандарта** оптимальной в данных условиях ситуации или оптимального в данных условиях процесса, для которых введем следующие обозначения:

оптим ситуация (\bar{r}), *оптим ситуация* (\bar{u});
оптим процесс (\bar{r}), *оптим процесс* (\bar{u}).

Угол α отклонения ситуации от оптимальной будет вычисляться по одной из формул:

$$\cos \alpha = \frac{\text{ситуация } (\bar{r}) \cdot \text{оптим ситуация } (\bar{r})}{\text{мера (ситуации } (\bar{r})) \cdot \text{мера (оптим ситуации } (\bar{r}))} \quad (1.2.9)$$

или

$$\cos \alpha = \frac{\text{ситуация } (\bar{u}) \cdot \text{оптим ситуация } (\bar{u})}{\text{мера (ситуации } (\bar{u})) \cdot \text{мера (оптим ситуации } (\bar{u}))}. \quad (1.2.10)$$

Чем больше угол α , тем менее предпочтительной является ситуация.

Аналогичные формулы имеют место и для измерения предпочтительности процессов.

Сравним два процесса:

$$\text{процесс}_1(\bar{u}) = \{2t; t; 1,5t\} \quad \text{и} \quad \text{процесс}_2(\bar{u}) = \{t; 1,5t; 2t\},$$

если известен *оптим процесс* $(\bar{u}) = \{3t; 0,5t; t\}$.

Сначала сравним меры процессов 1 и 2:

$$\text{мера (процесса}_1(\bar{u})) = \sqrt{4t^2 + t^2 + 2,25t^2} = \sqrt{7,25t^2} \approx 2,69t;$$

$$\text{мера (процесса}_2(\bar{u})) = \sqrt{t^2 + 2,25t^2 + 4t^2} = \sqrt{7,25t^2} \approx 2,69t.$$

Таким образом, меры этих процессов равны. Поэтому сравним каждый из них с *оптим процессом* (\bar{u}) по формуле (1.2.10).

Для *процесса*₁ (\bar{u}) :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{процесс}_1(\bar{u}) \cdot \text{оптим процесс } (\bar{u})}{\text{мера (процесса}_1(\bar{u})) \cdot \text{мера (оптим процесса } (\bar{u}))} = \\ &= \frac{\{2t; t; 1,5t\} \cdot \{3t; 0,5t; t\}}{\sqrt{7,25t^2} \cdot \sqrt{9t^2 + 0,25t^2 + t^2}} = \frac{8t^2}{\sqrt{7,25t^2} \cdot 10,25t^2} = \frac{8}{8,62} = 0,93. \end{aligned}$$

Для *процесса*₂ (\bar{u}) :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{процесс}_2(\bar{u}) \cdot \text{оптим процесс } (\bar{u})}{\text{мера (процесса}_1(\bar{u})) \cdot \text{мера (оптим процесса } (\bar{u}))} = \\ &= \frac{\{t; 1,5t; 2t\} \cdot \{3t; 0,5t; t\}}{\sqrt{7,25t^2} \cdot \sqrt{10,25t^2}} = \frac{5,75}{8,62} = 0,67. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что *процесс*₁ (\bar{u}) меньше отклоняется от *оптим процесса* (\bar{u}) , чем *процесс*₂ (\bar{u}) . Значит, он предпочтительнее.

Возникает вопрос: какой ситуации (или какому процессу) отдать предпочтение, если по формуле (1.2.9) будет предпочтительнее, например, *ситуация*₁, а по формуле (1.2.10) – *ситуация*₂? Для данных векторов

$ситуации_1(\bar{u})$ и $ситуации_1(\bar{r})$ строится обобщенная характеристика $ситуации_1(\bar{u}, \bar{r})$, представляющая собой вектор с координатами $\frac{p_{ij} \cdot s_{ij} \cdot u_{ij}}{k_{ij} \cdot r_{ij}}$. То же делается для $ситуации_2(\bar{u})$ и $ситуации_2(\bar{r})$, а также

для *оптим ситуации*(\bar{u}) и *оптим ситуации*(\bar{r}). Затем ищутся длины трех полученных векторов. Выбирается та ситуация, для которой соответствующий вектор будет иметь длину, более близкую к длине вектора, соответствующего *оптим ситуации*. При равенстве длин построенных векторов ситуации₁ и ситуации₂ целесообразно сравнить углы отклонения этих ситуаций от *оптим ситуации*.

При этом из практических реалий нулевые значения величин p_{ij} , s_{ij} , u_{ij} , k_{ij} , r_{ij} будем приближенно представлять в виде $(0,1)^m$ при соответствующей оценке m . В этом случае устраняется неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Следующий пример. Пусть мероприятие можно представить либо ситуацией 1, либо ситуацией 2, вероятности, риски, полезности которых представлены ниже:

1) ситуация

Вероятности

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,3	0,15
x_2	0,2	0,15	0,1

Риски

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3
x_1	2	3	1
x_2	4	5	0

Полезности

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	3	4
x_2	5	7	1

2) ситуация

Вероятности

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,2	0,1
x_2	0,1	0,3	0,1

Риски

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	4	4
x_2	5	2	3

Полезности

$y_j \backslash x_i$	y_1	y_2	y_3
x_1	2	4	4
x_2	3	5	2

Оценим, какая ситуация предпочтительнее, если известен оптимум этой ситуации, равный вектору $\{0,2; 1; 0,1; 0,3; 0,01; 0,4\}$.

Найдем векторы $ситуации_1(\bar{u}, \bar{r})$ и $ситуации_2(\bar{u}, \bar{r})$:

$$ситуация_1(\bar{u}, \bar{r}) = \left\{ \frac{0,1 \cdot 1}{2}; \frac{0,3 \cdot 3}{3}; \frac{0,15 \cdot 4}{1}; \frac{0,2 \cdot 5}{4}; \frac{0,15 \cdot 7}{5}; \frac{0,1 \cdot 1}{0,01} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \{0,05; 0,3; 0,6; 0,25; 0,21; 10\}; \\
\text{ситуация}_2(\bar{u}, \bar{r}) &= \left\{ \frac{0,2 \cdot 2}{1}; \frac{0,2 \cdot 4}{4}; \frac{0,1 \cdot 4}{4}; \frac{0,1 \cdot 3}{5}; \frac{0,3 \cdot 5}{2}; \frac{0,1 \cdot 2}{3} \right\} = \\
&= \{0,4; 0,2; 0,1; 0,06; 0,75; 0,067\}.
\end{aligned}$$

Оценим меры:

$$\begin{aligned}
\text{мера (ситуации}_1) &= \sqrt{0,05^2 + 0,3^2 + 0,6^2 + 0,25^2 + 0,21^2 + 10^2} \approx 10,03; \\
\text{мера (ситуации}_2) &= \sqrt{0,4^2 + 0,2^2 + 0,1^2 + 0,06^2 + 0,75^2 + 0,067^2} \approx 0,88; \\
\text{мера (оптим ситуации)} &= \sqrt{0,2^2 + 1^2 + 0,1^2 + 0,3^2 + 0,01^2 + 0,4^2} \approx 1,14.
\end{aligned}$$

Мера второй ситуации больше отличается от меры оптимальной ситуации, поэтому выбирается первая ситуация.

1.2.3. Преобразование ситуаций и процессов

С задачей измерения ситуаций и процессов тесно связана задача преобразования одной ситуации в другую и, аналогично, одного процесса в другой. Мы рассмотрим линейное преобразование, которое задается матрицей A , определяемой следующим образом. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n - n$ – мерные базисные векторы. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где столбцы представляют собой образы базисных векторов. Так, если $\text{ситуация}_1(\bar{r}) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то в результате преобразования A она переходит в

$$\begin{aligned}
\text{ситуацию}(\bar{r}) &= A(\text{ситуация}_1(\bar{r})) = A \text{ ситуация}_1(\bar{r}) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Пусть, к примеру, $\text{ситуация}_1(\bar{r}) = \{2, 4, 7\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\text{ситуация}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 29 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Представляет интерес случай, когда воздействие A преобразует ситуацию (процесс) в ситуацию (процесс), которая (который) получается

из данной ситуации (данного процесса) растяжением или сжатием в λ раз, где λ – число.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, то для предыдущего примера

$$\text{ситуация } (\bar{r}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Такие ситуации (процессы) называются собственными ситуациями (процессами) данного преобразования.

Случай $\lambda = 1$ соответствует отсутствию действия преобразования A .

Отсюда возникает задача отыскания для данного преобразования A всех ситуаций (процессов), которые не поддаются данному преобразованию, т.е. остаются постоянными при этом воздействии. Экономический пример представляют стабильные экономические ситуации и процессы, не поддающиеся действию отрицательных факторов.

1.2.4. Портфель ситуации и процесса

Введем понятие портфеля ситуации и процесса. Система (X, Y) , где X и Y – случайные величины, определенные во введении, образует портфель ситуации. Если эти величины зависят от времени, то они образуют портфель случайного процесса. Можно определить доходность и риск портфеля при фиксировании начального и конечного моментов времени.

Отношение доходности портфеля к его риску будем называть **динамической эффективностью ситуации** (процесса). Одна из важнейших задач бизнес-информатики состоит в оптимизации подобного портфеля, т.е. в уменьшении его риска при неизменной или увеличивающейся доходности. Так, в статье [88] рассмотрены сущность и способы управления рисками банковского портфеля, а в работе [17] – способы оптимизации портфеля оценочных баллов. Эти способы можно применить и для портфеля ситуации (процесса). Предложены два критерия сравнения портфелей, которые можно применить также для сравнения портфелей разных ситуаций (процессов), а тем самым и для сравнения их динамической эффективности [32].

Таким образом, рассмотрено векторное представление ситуаций и процессов, позволяющее измерять и классифицировать ситуации и процессы, рассматривать их линейные преобразования и определять классы собственных для данного преобразования ситуаций (процессов), введено понятие портфеля ситуации и процесса.

§ 1.3. Методы принятия решений на основе анализа риска и полезности

Принятие решений – важная задача, возникающая в социально-экономической, производственной, бытовой сферах, где часто приходится принимать сложные решения с очень значимыми последствиями. Поэтому большое значение отводится априорным оценкам возможных решений.

При принятии решений важно уметь правильно описать условия, в которых принимается решение, т.е. оценить соответствующие ситуацию или процесс. *Ситуация* характеризуется множеством исходов, называемых также гипотезами, и множеством реализаций или стратегий, действий.

Любой исход ситуации, равно как и реализация, определяемая по этому исходу, представляет собой событие, заключающееся в том, что некоторая случайная величина приняла данное значение или значение, меньшее (большее) данного. Множество исходов (гипотез) можно рассматривать как множество значений некоторой случайной величины X .

Аналогично множество реализаций можно рассматривать как множество значений некоторой случайной величины Y . Так, если опыт – это инвестирование в проект, исходы опыта – возможные значения вложений, реализации – соответствующие значения прибыли, то X – величина инвестиций в данный проект, а Y – соответствующая прибыль. Если X и Y зависят от времени t , то имеем процесс (например, инновационный или инвестиционный процесс в экономике).

Важными характеристиками ситуаций и процессов являются риск и полезность. Если риск равен нулю, то ситуация или процесс будут безрисковыми, в противном случае используются термины «рисковая ситуация», «рисковый процесс». В литературе (см., например, [47, 52, 56, 58, 62, 77, 79]) встречаются разные определения риска и полезности. В следующем параграфе будет дано общее определение среднего риска и полезности.

1.3.1. Риск и полезность для дискретного множества исходов

Сначала рассмотрим случай 2 случайных величин. Пусть X и Y – дискретные случайные величины, характеризующие множество факторов и множество результатов соответственно, причем x_i ($i = \overline{1, n}$) и y_j ($j = \overline{1, m}$) – их соответствующие значения. Полезность u и риск r являются функциями от X и Y . Средние риск и полезность ситуации в этом случае можно определить соответственно по формулам:

$$\bar{r} = \sum_i \sum_j k(x_i, y_j) \cdot p(y_j / x_i) \cdot p(x_i), \quad (1.3.1)$$

$$\bar{u} = \sum_i \sum_j u(x_i, y_j) \cdot p(y_j / x_i) \cdot p(x_i), \quad (1.3.2)$$

где k – коэффициент сожаления; u – коэффициент полезности; $r(x_i, y_j)$ – риск (при условии, что $X = x_i$ и $Y = y_j$); $u(x_i, y_j)$ – полезность (при условии, что $X = x_i$ и $Y = y_j$).

Коэффициенты сожаления и полезности дают оценку потери и прибыли при результате, связанном со значением $Y = y_j$ при факторе, определяемом значением $X = x_i$, $r(x_i, y_j)$ – риск при условии, что $X = x_i$ и $Y = y_j$, $u(x_i, y_j)$ – полезность при условии, что $X = x_i$ и $Y = y_j$.

Средние риск и полезность зависят от вероятностей факторов, условных вероятностей результатов, от коэффициентов сожаления и полезности, а также частных значений $r(x_i, y_j)$ и $u(x_i, y_j)$ соответственно.

В самом деле, при определении среднего риска (средней полезности) необходимо знать потери (полезность) результата y_j при факторе x_i , степень вероятности данных фактора и результата, отношение субъекта, принимающего решение, к данным потерям и полезности. Определенные по формулам (1.3.1) и (1.3.2) средние риск и полезность можно использовать в качестве характеристик эффективности принятия решений как в статистических, так и в стратегических играх. Возможны частные случаи указанных формул. Например, множитель $r(x_i, y_j)$ ($u(x_i, y_j)$) может отсутствовать. Может отсутствовать и множество результатов Y , тогда

$$\bar{r} = \sum_i k(x_i) \cdot p(x_i), \quad (1.3.3)$$

$$\bar{u} = \sum_i s(x_i) \cdot p(x_i). \quad (1.3.4)$$

В этом случае \bar{r} , \bar{u} являются характеристиками ситуации, определяемой только множеством внутренних факторов $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Обозначим через $\text{Pr}(x, y)$ прибыль, зависящую от факторов x и y .

Обобщим формулы (1.3.1) и (1.3.2) на многомерный случай. Множество факторов и результатов представляют собой декартовы произведения множеств. Допустим, ситуация характеризуется декартовым произведением $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_i \times \dots \times X_n$ нескольких множеств факторов $X_i (i = \overline{1, n})$ и декартовым произведением $Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_j \times \dots \times Y_m$ множеств результатов $Y_j (j = \overline{1, m})$ с соответствующими значениями $x_{ik} (i = \overline{1, n}, k = \overline{1, l_i})$ и $y_{jp} (j = \overline{1, m}, p = \overline{1, s_j})$.

Тогда полезность и риск являются функциями случайных величин X_i и Y_j и определяются по формулам:

$$\bar{r} = \sum_i \sum_j k(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}, y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{js_j}) \cdot r(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}, y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{js_j}) \cdot p(y_{j1}, y_{j2}, y_{js_j} / x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}) \cdot p(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}), \quad (1.3.5)$$

$$\bar{u} = \sum_i \sum_j s(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}, y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{js_j}) \cdot u(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}, y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{js_j}) \cdot p(y_{j1}, y_{j2}, y_{js_j} / x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}) \cdot p(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il_i}). \quad (1.3.6)$$

В источнике [4] функция полезности рассматривается как зависящая от величин $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$, т.е. без учета элемента случайности, что возможно в случае, если все исходы равновозможны. Это частный случай формулы (1.3.6).

Формулы (1.3.1)–(1.3.6) рассматриваются для случая, когда ситуация связана с множеством факторов и соответствующих результатов. Однако встречаются такие ситуации и процессы, которые характеризуются множеством связанных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , без выделения факторов и результатов. Примером такого рода является аварийная ситуация в устройстве, состоящем из k блоков. Блоки содержат по $m_i (i = \overline{1, k})$ элементов. Ситуация описывается совокупностью k дискретных случайных величин $X_i (i = \overline{1, k})$, значения $x_{ij} (i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m_i})$ каждой из которых представляют собой номера элементов. В этом случае средние риск и полезность можно вычислить по формулам:

$$\bar{r} = \sum_i k(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}) \cdot p(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}); \quad (1.3.7)$$

$$\bar{u} = \sum_i U(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}) \cdot p(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}), \quad (1.3.8)$$

т.е. средний риск и средняя полезность зависят от вероятности распределения факторов (случайных величин), характеризующих ситуацию, и от соответствующих коэффициентов сожаления и полезности.

Для случайного процесса случайные величины, вероятности распределения, коэффициенты сожаления и полезности зависят от времени, а соответствующие формулы для вычисления средних риска и полезности аналогичны формулам (1.3.1)–(1.3.8). Отметим, что полезность может быть как положительной, так и отрицательной, а риск, по определению, всегда неотрицателен. Не нарушая общности, рассмотрим случай расчетов по формулам (1.3.1)–(1.3.2). Поскольку $p(y_j / x_i) \cdot p(x_i) = p(x_i, y_j)$, формулы (1.3.1) и (1.3.2) можно представить соответственно в виде:

$$\bar{r} = \sum_i \sum_j k(x_i, y_j) \cdot r(x_i, y_j) \cdot p(x_i, y_j), \quad (1.3.9)$$

$$\bar{u} = \sum_i \sum_j s(x_i, y_j) \cdot u(x_i, y_j) \cdot p(x_i, y_j). \quad (1.3.10)$$

Рассмотрим пример. Предположим, что x_1, x_2, x_3 – возможные варианты вложения инвестиций в данный проект; y_1, y_2 – результаты вложения. Матрица вероятностей $p(x_i, y_j)$ их совместного осуществления имеет вид:

$y_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,15	0,2	0,1
y_2	0,25	0,1	0,2

Риск и полезность показаны ниже:

Коэффициенты сожаления

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	x_3
y_1	2	1	1,5
y_2	3	2,5	1

Коэффициенты полезности

$y_j \backslash x_i$	x_1	x_2	x_3
y_1	4	6	7,8
y_2	8,2	4	5,9

Для упрощения выкладок считаем коэффициенты сожаления и полезности равными 1. Требуется оценить ситуацию вложения инвестиций в данный проект.

По формулам (1.3.7) и (1.3.8) имеем:

$$\bar{r} = 2 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,2 + 1,5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,25 + 2,5 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 = 1,85 \text{ ден. ед.};$$

$$\bar{u} = 4 \cdot 0,15 + 6 \cdot 0,2 + 7,8 \cdot 0,1 + 8,2 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,1 + 5,9 \cdot 0,2 = 6,21 \text{ (ютилей)}.$$

Итак, средний риск вложения инвестиций в данный момент в проект составляет 1,85 ден. ед., а средняя полезность этого мероприятия (ситуации) – 6,21 ютилей. Много это или мало? Плохо или хорошо? Дело в том, что по полученным абсолютным показателям трудно высказать однозначное мнение. Поэтому целесообразно введение **относительных (приведенных)** показателей. Для этого из условия задачи находятся максимальные значения риска и полезности: r_{\max} и u_{\max} . **Приведенная полезность** ситуации (процесса) определяется как отношение средней полезности ситуации (процесса) к максимальной полезности ситуации (процесса):

$$u_{\text{пр}} = \frac{\bar{u}}{u_{\max}}. \quad (1.3.11)$$

Очевидно, что приведенная полезность – безразмерная дробная величина. На ее основе можно задать следующую таблицу **степени** полезности, аналогичную таблице оценок Харрингтона:

Значения приведенной полезности	Оценка степени полезности
0–0,2	Почти отсутствует
0,2–0,35	Небольшая
0,35–0,6	Средняя
0,6–0,8	Большая
0,8–1,0	Очень большая

Аналогичную оценку можно ввести и для риска, а именно: **приведенный риск** вычисляется по формуле

$$r_i = \frac{\bar{r}}{r_{\max}} \quad (1.3.12)$$

и является дробной безразмерной величиной, дает возможность оценить степень риска ситуаций и процессов аналогично степени полезности. Вернемся к рассмотренному примеру. Найдем:

$$u_{\max} = \max \{4; 6; 7; 8; 8,2; 4; 5,9\} = 8,2; \quad r_{\max} = \max \{2; 1; 1,5; 3; 2,5; 1\} = 3;$$

$$u_{\text{пр}} = \frac{6,21}{8,2} = 0,76, \text{ или } 76 \% ; \quad r_{\text{пр}} = \frac{1,85}{3} = 0,62, \text{ или } 62 \% .$$

Можно сделать вывод, что мероприятие по инвестированию данного проекта оценивается приведенной полезностью в 76 % и приведенным риском в 62 %, т.е. имеет большую полезность и достаточно большой риск.

Введем в рассмотрение коэффициент

$$\rho = \frac{u_{\text{пр}}}{r_{\text{пр}}}, \quad (1.3.13)$$

показывающий, какая часть $U_{\text{пр}}$ приходится на единицу $r_{\text{пр}}$. Назовем его **эффективностью ситуации**. Данный коэффициент может быть использован для обобщенной характеристики ситуации (процесса) с учетом риска и полезности. Если $\rho = 1$, то ситуация в равной степени полезна и рискованна; если $\rho < 0$, то ситуация связана с убытком; если $0 < \rho < 1$, то ситуация скорее рискованна, нежели полезна; если же $\rho > 0$, то ситуация скорее полезна, нежели рискованна. Эти же выводы справедливы и для процессов.

Для рассмотренного примера $\rho = 0,76 / 0,62 = 1,23$. Следовательно, ситуация, связанная с инвестированием в данный проект, будет скорее полезной, чем рискованной.

Показатель ρ можно использовать для сравнения ситуаций, а именно: более эффективной считается ситуация с его бóльшим значением.

Для процессов можно определить аналогичный показатель, зависящий от времени.

1.3.2. Определение риска и полезности для непрерывного множества факторов и результатов

Пусть множество факторов представляет собой множество событий, связанных со значениями некоторой непрерывной случайной величины X , имеющей закон распределения вероятностей $f_1(x)$. Это может быть, например, нормальный, равномерный, показательный закон. Пусть множество возможных результатов представляет собой множество событий, связанных со значениями некоторой случайной величины Y с условным законом распределения $f(y/x)$, а коэффициенты сожаления и полезности являются значениями неслучайных функций $k(x, y)$ и $u(x, y)$ соответственно. При этом произведения $k(x, y) \cdot f(y/x) \cdot f_1(x)$ и $u(x, y) \cdot f(y/x) \cdot f_1(x)$ ограничены, т.е.

$$\begin{cases} |k(x_i, y_j) \cdot p(y_j / x_i) \cdot p(x_i)| \leq M_1; \\ |u(x_i, y_j) \cdot p(y_j / x_i) \cdot p(x_i)| \leq M_2. \end{cases}$$

Средние риск и полезность в этом случае можно вычислять соответственно по формулам:

$$\bar{r} = \iint_{(D)} k(x, y) \cdot f(y/x) \cdot f_1(x) dx dy \quad (1.3.14)$$

и

$$\bar{u} = \iint_{(D)} u(x, y) \cdot f(y/x) \cdot f_1(x) dx dy, \quad (1.3.15)$$

где D – область изменения x и y .

Заметим, что $f(y/x) \cdot f_1(x)$ является совместной плотностью распределения случайных величин X и Y ; положим $f(x, y) = f(y/x) \cdot f_1(x)$. Тогда формулы (1.3.12) и (1.3.13) запишутся соответственно в виде:

$$\bar{r} = \iint_{(D)} k(x, y) \cdot f(x, y) dx dy, \quad (1.3.16)$$

$$\bar{u} = \iint_{(D)} u(x, y) \cdot f(x, y) dx dy. \quad (1.3.17)$$

Пусть $n_1(y) \leq x \leq n_2(y)$, а $m_1(y) \leq x \leq m_2(y)$, тогда риск \bar{r} и полезность \bar{u} можно представить в виде функций от x или y :

$$\bar{r}(y) = \int_{n_1(y)}^{n_2(y)} k(x, y) \cdot f(x, y) dx, \quad (1.3.18)$$

$$\bar{r}(x) = \int_{m_1(x)}^{m_2(x)} k(x, y) \cdot f(x, y) dy, \quad (1.3.19)$$

$$\bar{u}(y) = \int_{n_1(y)}^{n_2(y)} u(x, y) \cdot f(x, y) dx, \quad (1.3.20)$$

$$\bar{u}(x) = \int_{m_1(x)}^{m_2(x)} u(x, y) \cdot f(x, y) dy. \quad (1.3.21)$$

Если известна функция прибыли $Pr(x, y)$ и

$$Pr_1(x) = \max_{m_1(x) \leq y \leq m_2(x)} Pr(x, y),$$

то $\bar{r}(x)$ можно получить из формулы (1.3.18), заменив в интеграле $k(x, y)$ на $Pr(x, y)$ с последующим вычитанием результата из $Pr_1(x)$. Если $a = \max_{x, y} Pr(x, y)$ при $n_1(y) \leq x \leq n_2(y)$ и $m_1(x) \leq y \leq m_2(x)$, то \bar{r} можно выразить из (1.3.18), если заменить $k(x, y)$ на $Pr(x, y)$ и затем вычесть результат из a .

Отметим, что рассмотренные (1.3.14)–(1.3.19) определения средних риска и полезности справедливы и для случая, когда случайные величины представляют собой факторы, характеризующие ситуацию, без отношения исход – реализация (действие).

Рассмотрим примеры.

При анализе вопроса инвестирования магазина тканей была детально изучена ситуация распродажи в субботние дни. Было установлено, что распродажа осуществлялась по закону

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/500, & \text{если } 0,5 < x < 3; 100 < y < 300, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где x – длина отреза проданной ткани, м; y – стоимость отреза, ден. ед.

Полезность от продажи $u(x, y)$ была оценена как $x \cdot y$, а прибыль – как $Pr(x, y) = c \cdot x \cdot y = c \cdot u$ ($c = \text{const}$). Определим риск и полезность инвестирования такой торговли в субботние дни.

Согласно формуле (1.3.15)

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{0,5}^3 \int_{100}^{300} 1/500 \cdot x \cdot y dx dy = 1/500 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{0,5}^3 \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_{100}^{300} = \\ &= 350 \text{ ютилей.} \end{aligned}$$

При $0,5 < x < 3, 100 < y < 300$ $\max u = \max(x \cdot y) = 3 \cdot 300 = 900$ ютилей.

Оценим приведенную полезность:

$$u_{np} = \frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{350}{900} \approx 0,4 = 40 \%$$

Согласно таблице степени полезности можно говорить о достаточно небольшой полезности инвестирования продажи тканей в субботние дни в данном магазине.

По условию, $Pr(x, y) = c \cdot x \cdot y = c \cdot u$, и с учетом того, что максимальное значение полезности составляет 900 ютилей, получаем $Pr(x, y) = 900c$ (ден. ед.). По формуле (1.3.14)

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 900c - \int_{0,5}^3 \int_{100}^{300} (1/500) \cdot cxy dx dy = \\ &= 900c - 1/500 \left(c \frac{x^2}{2} \Big|_{0,5}^3 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{100}^{300} \right) = 550c \text{ ден. ед.} \end{aligned}$$

Для оценки проведенного риска найдем $r_{\max} = \max(900c - cxy)$ при $0,5 \leq x \leq 3, 100 \leq y \leq 300$. Нетрудно видеть, что $r_{\max} = 850c$, и тогда

$$r_{np} = \frac{\bar{r}}{r_{\max}} = \frac{550c}{850c} \approx 0,65 = 65 \%$$

Таким образом, можно утверждать, что риск инвестирования продажи тканей в субботние дни достаточно большой.

Вычислим $\rho = \frac{0,4}{0,65} \approx 0,62$, т.е. ситуация продажи в субботние дни более рискованная, нежели полезная. Следовательно, данное мероприятие невыгодно.

Естественным обобщением формул (1.3.12)–(1.3.19) являются формулы, аналогичные формулам для дискретного случая, а также формулы, определенные для случая, когда функции полезности, риска и плотности распределения определяются для случайных процессов, т.е. случайные величины, плотность распределения, корреляционные функции, полезность, прибыль и риск рассматриваются как функции времени:

$$X(t), Y(t), f(x, y; t), K(x, y; t), \bar{\rho}(t), \bar{u}(t), Pr(x, y; t), \bar{r}(t).$$

Следующий пример. Предположим, что после опубликования рекламного объявления о работе магазина тканей в субботние дни распродажа в первые четыре субботы осуществлялась по закону:

$$f(x, y; t) = \begin{cases} 1/500t, & \text{если } 0,5\sqrt{t} < x(t) < 3\sqrt{t}; 100\sqrt{t} < y(t) < 300\sqrt{t}, \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

где $x(t)$ – длина отрезка проданной ткани в t -ю субботу ($t = 1, 2, 3, 4$); $y(t)$ – стоимость отрезка.

Полезность определяется согласно выражению $u(x, y; t) = x \cdot y \cdot t$, прибыль $Pr(x, y; t) = c \cdot x \cdot y \cdot t$ ($c = \text{const}$). Найдем среднюю и приведенную полезность, средний и приведенный риск.

Аналогично предыдущему примеру находим:

$$\bar{u}(t) = \int_{0,5\sqrt{t}}^{3\sqrt{t}} \int_{100\sqrt{t}}^{300\sqrt{t}} (1/500t) \cdot x \cdot y \cdot t dx dy = 350t^2 \text{ ютилей};$$

$$u_{\max} = 3 \cdot 300t^2 = 900 \cdot t^2 \text{ ютилей};$$

$$u_{np} = \frac{\bar{u}(t)}{u_{\max}(t)} = \frac{350t^2}{900t^2} = 0,4 = 40 \%$$

Средний риск $\bar{r}(t)$ будет неотрицательным при $t = 1, 2$. При $t = 3$ и $t = 4$ \bar{r} исчезает. Для $t = 1$ и $t = 2$ находим

$$\bar{r}(t) = 900ct - \int_{0,5\sqrt{t}}^{3\sqrt{t}} \int_{100\sqrt{t}}^{300\sqrt{t}} (1/500t) \cdot cxyt \, dx dy = (900 - 350t)ct \text{ ден. ед.};$$

$$r_{np}(t) = 1 - \frac{\bar{r}(t)}{r_{\max}(t)} = 1 - \frac{(900 - 350t)ct}{(900 - 50t)ct} = \frac{6t}{18 - t}.$$

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что в силу действия рекламы средняя и максимальная полезность увеличиваются прямо пропорционально квадрату времени их распространения; средний и максимальный риск уменьшаются согласно квадратичной зависимости относительно времени t ; приведенная полезность постоянна; все риски имеют смысл для $t = 1, 2$, при $t = 1$ приведенный и максимальный риск достигают наименьших значений, а средний риск – максимального значения.

§ 1.4. Графоаналитический метод принятия решений в информационных условиях риска и неопределенности

В данном параграфе рассмотрена новая технология принятия решений в информационных условиях риска и неопределенности. Отличительной особенностью этого метода является обеспечение возможности эффективной работы лица, принимающего решение, с помощью некоторой информационной модели, отличающейся специфической структурой.

Принятие решений является, как известно, одним из важнейших атрибутов целенаправленного поведения человека в самых различных сферах его деятельности, в том числе учебной, методической и воспитательной работе в учебных заведениях. При этом чаще всего приходится иметь дело с неполной, недостаточно достоверной и даже искаженной (например, различного рода ошибками) информацией, используемой для принятия решений.

Низкое или недостаточное (дефективное) качество исходной информации зачастую приводит к тому, что ожидаемый результат не является, как правило, детерминированным и однозначным, а иногда может быть вообще неожиданным или незапланированным.

В теории принятия решений [92] используется следующая классификация информационных условий:

1) в тех случаях, когда выбранному варианту решения соответствует некоторое множество возможных случайных исходов (результатов) с известным законом распределения вероятностей их появления на этом множестве, имеют место информационные условия риска;

2) если же этот закон (или хотя бы его основные характеристики) неизвестен или не существует (например, по причине неслучайного множества исходов), то говорят об информационных условиях неопределенности;

3) при однозначном соответствии варианта решения и возможного (ожидаемого или запланированного) исхода имеют место информационные условия определенности, т.е. в этом случае множество исходов сводится к одному детерминированному элементу.

Формализация задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности (что и является предметом рассмотрения в данном параграфе) сводится в конечном счете к построению матрицы решений (c_{ij}) , где каждый элемент c_{ij} количественно характеризует полезность того или иного варианта решения x_1, x_2, \dots, x_m из некоторого множества (конечного) X в зависимости от множества $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ вариантов внешних условий (так называемых «состояний природы») для класса игр с природой или стратегий другого игрока для класса стратегических игр.

Матрица решений приведена ниже:

X / Y	y_1	y_2	\dots	y_n	\dots	y_m
x_1	c_{11}	c_{12}	\dots	c_{1i}	\dots	c_{1n}
x_2	c_{21}	c_{22}	\dots	c_{2i}	\dots	c_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
x_i	c_{i1}	c_{i2}	\dots	c_{ij}	\dots	c_{in}
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\dots	\vdots
x_{m-1}	$c_{m-1,1}$	$c_{m-1,2}$	\dots	$c_{m-1,j}$	\dots	$c_{m-1,n}$
x_m	c_{m1}	c_{m2}	\dots	c_{mj}	\dots	c_{mn}

В классической литературе [67] изложены строгие математические методы определения оптимальных решений (стратегий) по данной матрице. Однако они не исключают человека-оператора (назовем так лиц, принимающих решения) из самого процесса принятия решений не только

формирования матриц (c_{ij}) , но и на конечных этапах непосредственного выбора оптимальных решений, где его роль так же весьма значима: это и установление степени риска, и выбор самих критериев принятия решения, наиболее адаптивных по отношению к складывающимся ситуациям, и, наконец, оценка приемлемости обчисленных компьютерной программой наилучших (в формализованном смысле) решений, с которыми человек-оператор в праве не согласиться исходя из логики и эвристического мышления.

В то же время существующие методы не предусматривают никаких специальных мер по обеспечению такого рода деятельности человека-оператора, к тому же нередко при остром дефиците располагаемого времени. Поэтому авторами разработана новая информационная технология процесса принятия решений в условиях риска и неопределенности, обеспечивающая возможность эффективного участия в нем человека-оператора при жестком лимите времени. Граф принятия решений изображен на рис. 1.12.

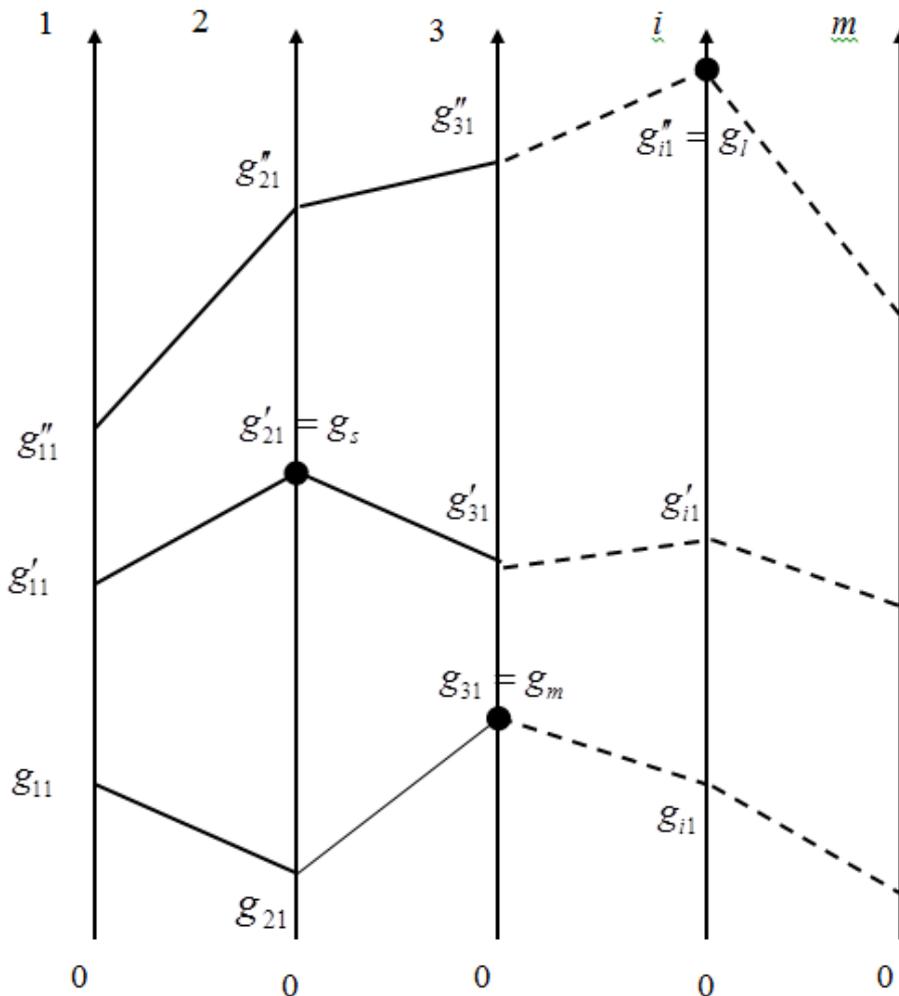


Рис. 1.12

Данная информационная модель задачи принятий решений формируется на экране дисплея (или другого индикаторного устройства, сопряженного с компьютером).

Структура модели представляет собой специфический граф G (имеющий не одну, а некоторое множество вершин), однозначно соответствующий матрице решений $C=(c_{ij})$. Это означает, что каждой i -й строке соответствует своя координатная ось (ветвь) графа с началом отсчета (вершиной) в точке O . В качестве координаты по оси откладываются в определенном масштабе величины полезностей c_{ij} , которые считаются всегда положительными, что нетрудно обеспечить соответствующим преобразованием матрицы C , если в ней содержатся отрицательные элементы. Таким образом, каждой точке на осях (ветвях) графа G соответствует вполне определенный элемент матрицы C .

Одним из наиболее часто употребляемых классических критериев принятия решений в условиях неопределенности является, как известно, минимаксный (максиминный) критерий. Несомненное достоинство этого критерия заключается в том, что он обеспечивает достижение гарантированного результата при любых состояниях «природы» или стратегиях другого игрока, т.е. лицо, принимающее решение, гарантирует себе получение выигрыша (полезности), не худшего, чем $M_m = \max_j \min_i c_{ij}$.

На графе ему соответствует точка g_m , которая легко определяется (человеком-оператором) как самая верхняя из множества самых нижних точек на осях графа.

При использовании критерия Сэвиджа происходит трансформация матрицы путем замены ее элементов на другие, а именно на $a_{ij} = \max_i c_{ij} - c_{ij}$, после чего формируется оценочная функция

$$M_s = \min_i [\max_j (\max_i c_{ij} - c_{ij})],$$

а затем на графе G определяется точка g_s (по $\min_i a_{ij}$) и, следовательно, вариант оптимального (в смысле этого критерия) решения.

Аналогичным образом могут быть интерпретированы на графе и другие возможные критерии принятия решений в условиях неопределенности (критерий Гурвица, критерий азартного игрока и др.). Как уже отмечалось, выбор критерия осуществляется чаще всего человеком-оператором в зависимости от оценки складывающейся ситуации и анализа характера информационных условий.

Представляет интерес рассмотрение возможности использования в графоаналитическом методе критерия Гурвица, отражающего некоторую более уравновешенную позицию лица, принимающего решения, по сравнению с полярными критериями крайнего оптимизма и пессимизма. Этот критерий позволяет лицу, принимающему решения в условиях неопределенности, как бы варьировать степень «риска» при отступлении от принципа достижения гарантированного результата в надежде получить себе больший минимаксный выигрыш. Матрица решений при этом трансформируется в соответствии с выражением

$$b_{ij} = r \min_j c_{ij} + (1 - r) \max_j c_{ij},$$

где r - коэффициент, принимающий значения в интервале $[0, 1]$ и характеризующий степень риска при принятии решений.

Оценочная функция имеет вид

$$M_H = \max_i [r \min_j c_{ij} + (1 - r) \max_j c_{ij}].$$

Оптимальное решение (стратегия) определяется по положению точки $g_H = \max_i b_{ij}$ на соответствующей оси (ветви) графа G . Точка характеризует и величину выигрыша (полезности).

Меняя значения коэффициента r в пределах от нуля до единицы, принимающий решение переходит от принципа крайнего оптимизма (критерия азартного игрока) к позиции осторожного оптимизма, т.е. к применению минимаксного критерия, дающего гарантированный результат. Происходит своеобразная игра человека-оператора с компьютером, позволяющая оценить последствия вводимого риска и выбрать самое подходящее для данной задачи (ситуации) его значение, например, в некотором смысле наиболее уравновешенное.

Для информационных условий риска, в отличие от рассмотренных выше условий неопределенности, как правило, руководствуются вероятностными критериями Байеса – Лапласа, Ходжа – Лемана, Гермейера, расширенного минимакса и др. Для всех перечисленных критериев характерно знание закона распределения вероятностей на множествах состояний «природы» (внешних условий) или стратегий другого игрока, если все элементы этих множеств суть некоторые случайные величины (события).

Для примера рассмотрим критерий Байеса – Лапласа, оценочная функция для которого имеет вид $M_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^n c_{ij} p_j$, где p_j – вероятность

появления j -го состояния «природы» ($y_j \in Y$), причем $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

Матрица решений в этом случае дополняется еще одним столбцом с математическими ожиданиями $\sum_{j=1}^n c_{ij} p_j$ для каждой из строк.

На графе G данному столбцу будет соответствовать некоторая ломаная линия, соединяющая точки на осях с координатами, равными этим значениям математических ожиданий. Точка g_l характеризует оптимальное решение (соответствующую ось графа) и величину среднего ожидаемого выигрыша (при достаточно большом числе реализаций этого решения).

Нетрудно убедиться, что графоаналитический метод позволяет без всяких затруднений, используя свойство наглядности информационной модели, выявлять доминантные варианты решений $x_l \in X$, для которых выполняется условие $c_{lj} \geq c_{ij}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$ и $c_{lj} > c_{ij}$ хотя бы для одного j .

При наличии таких доминантных вариантов решений, они, очевидно, и выбираются в качестве оптимальных.

При отсутствии строго доминирования руководствуются и другими правилами выбора наилучших решений, не обязательно следуя при этом формализованным критериям. Например, можно отыскать так называемые «квазидоминантные» варианты решений, для которых допускается выполнение неравенства:

$$c_{lj} \geq c_{ij} \text{ для отдельных } i, \text{ но для всех остальных } j;$$

$$c_{lj} \gg c_{ij} \text{ («}\gg\gg\text{» означает отношение «много больше»)}.$$

Другими словами, при использовании графоаналитического метода допускается определенная творческая свобода выбора наилучших решений (пусть и не строго оптимальных в смысле какого-то одного формализованного критерия) в условиях риска и неопределенности. Рассмотренная информационная технология в целом применима как для одношаговых, так и для многошаговых процедур принятия решений.

На рис. 1.13 представлена блок-схема информационной технологии для одношаговых процедур применительно к классу игр «с природой». Что касается стратегических игр [19], то в данном параграфе рассмотрена лишь в общих чертах принципиальная возможность исследования этого подхода, однако, детальное исследование вопроса выходит за его рамки.

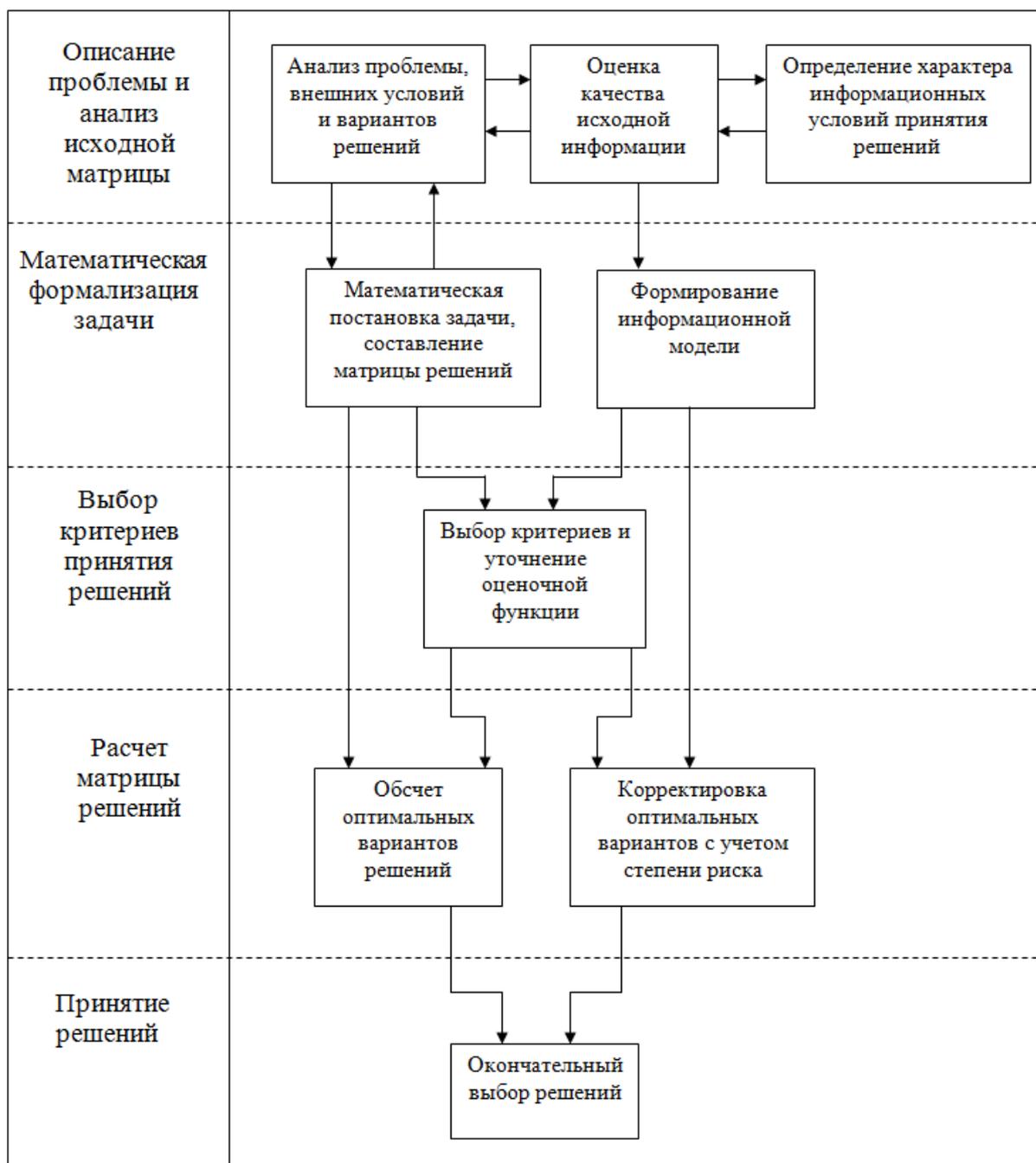


Рис. 1.13

Проведенные исследования по использованию графоаналитического метода принятия решений (главным образом технических) в информационных условиях риска и неопределенности показали, что этот метод обеспечивает существенное повышение эффективности принимаемых решений по сравнению с существующими методами (выигрыш может составить 20–25 % и более) при значительном (в несколько раз) сокращении времени затрат человека-оператора, что дает последнему возможность принимать решения даже в реальном масштабе времени (при

размерах исходной матрицы C $15 \cdot 15$). Рассмотренная информационная технология графоаналитического метода принятия решений может найти достаточно широкое применение в самых различных областях человеческой деятельности, где требуется принимать обоснованные решения в информационных условиях риска и неопределенности, например в инженерном деле, в технике, в экономике, в обучении и подготовке специалистов, при проведении экспертных оценок и т.п. Достоинством этой информационной технологии является также сравнительная простота ее технической реализации (требуемый объем программного обеспечения не превышает 15–20 % объема для существующих методов принятия решений).

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Решение оптимизационных задач линейного и нелинейного программирования является актуальной задачей во многих сферах деятельности, таких как отбор информативных факторов в регрессионной модели [4, 5], управление качеством обучения [23, 85], оптимальное планирование учебных часов [24, 33, 44], размещение консультационных пунктов [26], менеджмент качества учебных планов [29]. Другие прикладные задачи рассмотрены в работах [16, 49, 76, 91, 95].

Основной метод решения задач линейного программирования – симплекс-метод [100], позволяющий решить любую задачу линейного программирования и в случае ее неразрешимости получить соответствующий обоснованный ответ. Недостатком симплекс-метода является его сложность [98].

В ряде практически важных случаев оптимизационные задачи могут быть решены более просто, чем симплекс-методом. Например, в статье [76] разработаны новые алгоритмы решения задач линейного программирования со специальной структурой (когда матрица ограничений имеет узкоблочную с окаймлением структуру), быстрый приближенный алгоритм для задачи положительного линейного программирования приведен в работе [90], примеры решения оптимизационных задач с дополнительными ограничениями на переменные содержатся в статье [28].

Для задач нелинейного программирования используются разные методы, например, метод Лагранжа, геометрический метод, метод

выпуклого программирования и т.д. [16]. Однако, в ряде случаев данные оптимизационные задачи можно решить более просто.

В предлагаемой работе изложен оригинальный метод решения важного класса задач линейного и нелинейного программирования.

§ 2.1. Максимизация линейной функции при одном линейном ограничении с положительными коэффициентами

Максимизация линейной функции при одном линейном ограничении в упрощенном варианте была использована авторами в [28] для решения задачи оптимального планирования учебных часов.

Сущность работы раскрывают две основные теоремы.

Теорема 2.1. Если максимизируется функция $L = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i + c_0$, причем $\sum_{i=1}^n d_i x_i = d$, $d_i > 0$, $c_i \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$), $d \geq 0$, то $\max_{1 \leq i \leq n} \frac{c_i}{d_i}$ достигается в единственной точке при $i = i_0$, $x_i \geq \gamma_i$, $\gamma_i \geq 0$ ($i \neq i_0$), $x_{i_0} \geq 0$, тогда

$$L_{\max} = \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot \gamma_i + c_0 + \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \cdot (d - \sum_{i \neq i_0} d_i \gamma_i). \quad (2.1.1)$$

Доказательство.

Пусть $L_1 = \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot \gamma_i + c_0 + \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \cdot (d - \sum_{i \neq i_0} d_i \gamma_i)$. Предположим, что функция L принимает максимальное значение, равное L_0 , в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, тогда L_0 можно представить в виде

$$L_0 = \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot x_i^0 + c_0 + \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \cdot (d - \sum_{i \neq i_0} d_i x_i^0).$$

Достаточно доказать, что $L_1 \geq L_0$. Найдем

$$\begin{aligned} L_1 - L_0 &= \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot \gamma_i + c_0 + \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \cdot (d - \sum_{i \neq i_0} d_i \gamma_i) - \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot x_i^0 - c_0 - \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \cdot (d - \sum_{i \neq i_0} d_i x_i^0) = \\ &= \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot (\gamma_i - x_i^0) - \sum_{i \neq i_0} \frac{c_{i_0} \cdot d_i}{d_{i_0}} (\gamma_i - x_i^0) = \sum_{i \neq i_0} (\gamma_i - x_i^0) \cdot (c_i - \frac{c_{i_0} \cdot d_i}{d_{i_0}}). \end{aligned}$$

По условию, для любого $i \neq i_0$ $\gamma_i \leq x_i$, поэтому $\gamma_i \leq x_i^0$; кроме того, из определения c_{i_0} следует, что $c_i \leq \frac{c_{i_0} \cdot d_i}{d_{i_0}}$, следовательно, $L_1 - L_0 \geq 0$ и

$L_1 \geq L_0$. Теорема доказана.

Отметим, что при $\sum_{i \neq i_0} d_i \gamma_i \geq d$ решения нет.

Замечание. Если некоторые переменные из L не входят в левую часть ограничения, то в L_{max} каждой такой переменной присваивается ее верхняя граница. Теорема применяется к оставшимся переменным.

Доказанная теорема позволяет находить максимальное значение линейной функции при линейном ограничении без использования симплекс-метода, что существенно упрощает решение целого класса задач линейного программирования.

При минимизации функции L исследуется на максимум $\tilde{L} = -L$.

Рассмотрен случай, когда $\max_{1 \leq i \leq n} \frac{c_i}{d_i}$ достигается в единственной точке.

Предположим теперь, что таких точек $1 < k \leq n$. Пусть, для определенности, $\max_{1 \leq i \leq n} \frac{c_i}{d_i}$ достигается при $i = i_q (q = \overline{1, k})$, тогда $x_i \geq \gamma_i$, $i \neq i_q$, $x_{i_q} \geq 0 (q = \overline{1, k})$. Нетрудно показать, аналогично тому, как это сделано в теореме 2.1, что

$$L_{max} = \sum_{\substack{i \neq i_q \\ (q=1, k)}} c_i \cdot \gamma_i + c_0 + \frac{c_{i_q}}{d_{i_q}} (d - \sum_{\substack{i \neq i_q \\ (q=1, k)}} d_i \cdot \gamma_i). \quad (2.1.2)$$

Нетривиальным линейным ограничением будем называть линейное ограничение, связывающее несколько переменных.

Итак, рассмотрен случай, когда все коэффициенты нетривиальных линейных ограничений неотрицательны. Обобщим теорему 2.1, когда $d_i \geq 0$ при $i = \overline{1, t}$ и $d_i < 0$ при $i = \overline{t+1, n}$, причем $c_i \neq 0 (i = \overline{1, n})$, $d \geq 0$.

Пусть $\max_{1 \leq i \leq n} \frac{c_i}{d_i}$ достигается в единственной точке $i = i_0$, при этом $d_{i_0} \neq 0$,

$x_i \geq \gamma_i$, $\gamma_i \geq 0$, $x_i \leq \delta_i (i \neq i_0)$, $x_{i_0} \geq 0$. Если $d_{i_0} \geq 0$, то

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^t d_i \gamma_i + \sum_{i=i+1, i \neq i_0}^n d_i \delta_i \leq d, \quad (2.1.3)$$

в противном случае знак неравенства противоположный. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2. При перечисленных условиях

$$L_{\max} = \sum_{i=1, i \neq i_0}^t c_i \gamma_i + \sum_{i=t+1, i \neq i_0}^n c_i \delta_i + c_0 + \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \left(d - \sum_{i=1, i \neq i_0}^t d_i \cdot \gamma_i - \sum_{i=t+1, i \neq i_0}^n d_i \delta_i \right). \quad (2.1.4)$$

Доказательство.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1. Пусть L достигает максимального значения L_0 в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, т.е.

$$L_0 = \sum_{i=1}^n c_i x_i^0 + c_0 \text{ и } \sum_{i=1}^n d_i x_i^0 = d. \text{ Представим } L_0 \text{ в следующем виде, используя}$$

нетривиальные ограничения для выражения $x_{i_0}^0$:

$$L_0 = \sum_{i \neq i_0} c_i \cdot x_i^0 + c_0 + \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} \cdot \left(d - \sum_{i \neq i_0} d_i x_i^0 \right) \quad (2.1.5)$$

и L_1 определяется по формуле (2.1.4). Найдем

$$\begin{aligned} L_1 - L_0 &= \sum_{i=1, i \neq i_0}^t c_i (\gamma_i - x_i^0) + \sum_{i=t+1, i \neq i_0}^n c_i (\delta_i - x_i^0) - \sum_{i=1, i \neq i_0}^t \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} d_i (\gamma_i - x_i^0) - \\ &\quad - \sum_{i=t+1, i \neq i_0}^n \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} d_i (\delta_i - x_i^0) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^t (\gamma_i - x_i^0) \left(c_i - \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} d_i \right) + \\ &\quad + \sum_{i=t+1, i \neq i_0}^n (\delta_i - x_i^0) \left(c_i - \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}} d_i \right). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Первая сумма положительна, так как $\gamma_i \leq x_i^0$ и $\frac{c_i}{d_i} \leq \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}}$ при $d_i \geq 0$ и

$i = \overline{1, t}, i \neq i_0$. Вторая сумма положительна, поскольку $\delta_i \geq x_i$ и $\frac{c_i}{d_i} \geq \frac{c_{i_0}}{d_{i_0}}$

при $d_i < 0$ и $i = \overline{t+1, n}, i \neq i_0$. Следовательно $L_1 \geq L_0$. Теорема доказана.

Проиллюстрируем данную теорему на следующем примере. Необходимо найти максимум функции

$$L = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 - x_6 + 2$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 3, \quad 1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 3, \quad 0 \leq x_3 \leq 1, \\ 1 \leq x_4 \leq 2, \quad 0 \leq x_5, \quad 2 \leq x_6 \leq 3. \end{aligned}$$

Здесь $i_0 = 5$, поэтому для переменной x_5 указана только нижняя граница. При этом $d_5 = 1 > 0$ и $1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -7 < d = 3$. Таким образом, определены условия теоремы 2.2. Следовательно, по формуле (2.1.4)

$$L_{\max} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot (3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 3) - 3 + 2 = 34.$$

При этом

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 2, x_6 = 3, x_5 = 3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + 2 + 3 = 14.$$

Подсчитаем число использованных операций сложения, умножения, сравнения и присваивания при решении данного примера согласно алгоритму рассмотренного метода.

1. При отыскании i_0 использовано шесть операций деления и шесть операций сравнения полученных частных $\frac{c_i}{d_i}$ ($i = \overline{1,6}$).

2. Затем идет присваивание переменным x_i ($i \neq i_0$) значений γ_i либо δ_i в зависимости от знаков d_i . Для этого используется пять операций сравнения и пять операций присваивания.

3. При проверке условия (2.1.3) использовано пять операций умножения d_i на значения x_i , четыре операции сложения полученных произведений и одна операция сравнения полученной суммы с d (правой частью неравенства (2.1.3)).

4. При вычислении x_{i_0} использовано пять операций умножения, четыре операции сложения и одна операция вычитания.

5. Окончательно при вычислении L_{\max} использовано шесть операций умножения и шесть операций сложения.

Таким образом, всего при решении данного примера использовано 54 операции.

В общем случае, если n - число переменных в L , то общее число указанных операций согласно предложенному методу составит:

- 1) $2 \cdot n$;
- 2) $2 \cdot (n - 1)$;
- 3) $n - 1 + n - 2 + 1 = 2(n - 1)$;
- 4) $n - 1 + n - 2 + 1 = 2(n - 1)$;
- 5) $2 \cdot n$;

Всего операций: $10 \cdot n - 6$.

При решении данного примера симплекс-методом только для представления ограничений в стандартной форме понадобится введение одиннадцати новых переменных, т.е. двенадцать операций присваивания с учетом первого ограничения. При переходе от базисного решения к опорному решению только для построения первой симплекс-таблицы будет использовано более 70 операций.

Замечание. Если в формуле (2.1.2) имеются переменные, не входящие в нетривиальное ограничение, то при отрицательном коэффициенте

c_i данной переменной присваивается значение ее нижней границы, в случае положительности c_i – значение ее верхней границы.

§ 2.2. Максимизация линейной функции при нескольких линейных ограничениях

Случай, определяемый формулой (2.1.4), обобщим следующим образом. Задача заключается в нахождении максимального значения функции

$$L = \sum_{i=1}^n c_i x_i + c_0 \quad (2.1.7)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{S_k} d_{ki} x_i = d_k, \quad (2.1.8)$$

где $k = \overline{1, l}$, $d_k \geq 0$.

Пусть для каждого $k = \overline{1, l}$ в равенстве (2.1.8) найдется переменная x_{i_k} , не содержащаяся в других ограничениях (2.1.8). Допустим, что $0 \leq \gamma_i \leq x_i \leq \delta_i$ для $i \neq i_k$ и $x_{i_k} \geq 0$.

Положим

$$\begin{cases} \beta_i = \gamma_i, & \text{если } c_i - \sum_{k=1}^l \frac{c_{i_k}}{d_{ki_k}} d_{ki} < 0, \\ \beta_i = \delta_i & - \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.1.9)$$

При этом для $k = \overline{1, l}$ выполняются условия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1, i \neq i_k}^{S_k} d_{ki} \beta_i \leq d_k, & \text{если } d_{ki_k} \geq 0, \\ \sum_{i=1, i \neq i_k}^{S_k} d_{ki} \beta_i > d_k, & \text{если } d_{ki_k} < 0. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Теорема 2.3. При сформулированных условиях максимальное значение

$$L_{\max} = \sum_{\substack{i \neq i_k \\ (k=1, l)}} c_i \cdot \beta_i + c_0 + \sum_{k=1}^l \frac{c_{i_k}}{d_{ki_k}} (d_k - \sum_{u \neq i_k} d_{ku} \cdot \beta_u). \quad (2.1.11)$$

Доказательство.

Обозначим через L_1 правую часть равенства (2.1.11). Допустим, что функция L принимает максимальное значение, равное L_0 , в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Тогда L_0 можно представить в виде

$$L_0 = \sum_{\substack{i \neq i_k \\ (k=1, l)}} c_i \cdot x_i^0 + c_0 + \sum_{k=1}^l \frac{c_{i_k}}{d_{ki_k}} (d_k - \sum_{i \neq i_k} d_{ki} \cdot x_i^0).$$

Найдем разность L_1 и L_0 . Имеем:

$$\begin{aligned} L_1 - L_0 &= \sum_{\substack{i \neq i_k \\ (k=1, l)}} c_i (\beta_i - x_i^0) - \sum_{k=1}^l \frac{c_{i_k}}{d_{ki_k}} \cdot \sum_{i \neq i_k} d_{ki} \cdot (\beta_i - x_i^0) = \\ &= \sum_{\substack{i \neq i_k \\ (k=1, l)}} (\beta_i - x_i^0) \cdot \left(c_i - \sum_{k=1}^l \frac{c_{i_k}}{d_{ki_k}} d_{ki} \right). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Поскольку $\gamma_i \leq x_i^0$, $\delta_i \geq x_i^0$, то из условий (2.1.9) следует, что слагаемые в равенстве (2.1.12) неотрицательны. Отсюда следует, что $L_1 \geq L_0$. Теорема доказана.

Если в выражении (2.1.7) L содержит некоторые переменные, которых нет в (2.1.8), то в L_{\max} каждая такая переменная x_i принимает значение δ_i , если $c_i > 0$, и γ_i в противном случае.

Рассмотрим пример. Пусть максимизируется функция

$$L = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 - x_6 + 3x_7 + 1$$

при ограничениях:

$$2x_3 - x_5 + 2x_6 = 3, \quad x_4 + x_5 - x_6 + 2x_7 = 2, \quad 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 2 \leq x_2 \leq 3, \quad 1 \leq x_5 \leq 2, \\ 2 \leq x_6 \leq 3, \quad 0 \leq x_7 \leq 1, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Здесь для переменных x_3 и x_4 указана только нижняя граница, поскольку именно каждая из этих переменных не входит в правую часть другого уравнения. Правда, переменная x_7 тоже не входит в правую часть первого нетривиального ограничения. Поэтому можно было бы вместо x_4 рассматривать переменную x_7 . В этом случае для x_4 указываются обе границы, а для x_7 - только нижняя.

Согласно условию (2.1.9), для переменной x_5

$$\beta_5 = \delta_5 = 2,$$

так как $c_5 - \frac{c_3}{d_{13}} \cdot d_{15} - \frac{c_4}{d_{24}} \cdot d_{25} = 8 > 0$; для переменной x_6

$$\beta_6 = \delta_6 = 2,$$

так как $c_6 - \frac{c_3}{d_{13}} \cdot d_{16} - \frac{c_4}{d_{24}} \cdot d_{26} = -6 < 0$; для переменной x_7

$$\beta_7 = \delta_7 = 2,$$

так как $c_7 - \frac{c_4}{d_{24}} \cdot d_{27} = 5 > 0$.

При этом выполняются все ограничения, в том числе нетривиальные, поскольку при подстановке в данные ограничения $x_5 = 2$, $x_6 = 2$, $x_7 = 1$ получаем: $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$. Таким образом, $L_{\max} = 14$. Число операций не превосходит 33.

При решении данного примера симплекс-методом потребуется не менее 40 операций сложения, умножения, сравнения, присваивания только при приведении данных к стандартному виду и построении первой симплекс-таблицы.

Обратим внимание на следующее: условие теоремы, заключающееся в том, что для каждого нетривиального ограничения найдется содержащаяся в нем переменная, не входящая в другие нетривиальные ограничения, всегда выполнимо. Действительно, путем равносильных элементарных преобразований систему уравнений можно привести к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_{11}x_{s+1} + \dots + b_{1q}x_q + b_1, \\ \dots & \dots \\ a_{22}x_2 & = b_{21}x_{s+1} + \dots + b_{2q}x_q + b_2, \\ \dots & \dots \\ a_{ss}x_s & = b_{s1}x_{s+1} + \dots + b_{sq}x_q + b_s. \end{cases}$$

Отметим, что число операций при этом не превосходит $s^3 + \frac{s^2}{2} - \frac{3}{2}s$.

Итак, для важного класса оптимизационных задач предложен достаточно простой и универсальный метод их решения, дающий конкретную формулу для экстремального значения целевой функции.

§ 2.3. Метод проектирования и приращений при решении задач линейного программирования

Основы метода проектирования и приращений изложены авторами в работе [37].

2.3.1. Метод проектирования

Общая задача линейного программирования заключается в нахождении максимального (минимального) значения функции

$$L = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i + c_0 \quad (2.3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{S_k} d_{ki} x_i = d_k, \quad (2.3.2)$$

где $k = \overline{1, l}$, $x_i \geq 0$ при $i = 1, \dots, S_k$.

При этом будем считать, что все переменные из (2.3.2) содержатся среди переменных (2.3.1).

Рассмотрим максимизацию функции L , так как минимизация этой функции сводится к максимизации L .

Пусть $\max_{k=1, l} S_k = S$ и $l \leq S$. Будем рассматривать задачу при условии неособенности матрицы размерностью $l \cdot l$ для первых l коэффициентов переменных.

Теорема 2.4. Путем равносильных элементарных преобразований систему уравнений (2.3.2) можно привести к виду

$$\begin{cases} x_1 = b_{1, l+1} x_{l+1} + \dots + b_{1, l+S} x_{l+S} + b_1, \\ x_2 = b_{2, l+1} x_{l+1} + \dots + b_{2, l+S} x_{l+S} + b_2, \\ \dots \\ x_l = b_{l, l+1} x_{l+1} + \dots + b_{l, l+S} x_{l+S} + b_l. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Доказательство очевидно.

При переходе от системы (2.3.2) к (2.3.3) некоторые столбцы могут поменяться местами. Однако, во избежание громоздкости и не нарушая общности, будем считать, что в (2.3.1) переменная x_i ($i = \overline{1, S}$) входит с коэффициентом c_i .

Если $l > S$, то система (2.3.2) приводится к виду (2.3.3) при условии, что все равенства при $l > S$ непротиворечивы. В противном случае система несовместна.

Не нарушая общности, будем рассматривать первый случай и систему (2.3.3).

Заметим, что поскольку реальные ситуации в производственной и социальной сфере предполагают ограниченность значений переменных, то система ограничений для x_k ($k = \overline{1, l}$), x_i ($i = \overline{l+1, S}$) запишется в виде

$$\begin{cases} \gamma_i \leq x_i \leq \delta_i \quad (i = \overline{l+1, S}), \\ x_k = \sum_{i=l+1}^S b_{ki} x_i + b_k \quad k = \overline{1, l}, \\ v_k \leq x_k \leq w_k \quad k = \overline{1, l}. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Третья строка данной системы должна быть согласована с первыми двумя. В общем случае будем рассматривать и отрицательные значения переменных, т.е. в случае необходимости можно сделать перенос начала

координат. Кроме того, если в системе (2.3.3) для некоторого $k = \overline{1, l}$ все коэффициенты $b_{k, l+i}$ отрицательны, то вводим новую переменную $y_k = -x_k$.

Пусть для $i = \overline{l+1, S}$

$$\begin{cases} \beta_i = \gamma_i, & \text{если } c_i + \sum_{k=1}^l c_k b_{ki} < 0, \\ \beta_i = \delta_i & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Тогда при выполнении условий (2.3.4) и (2.3.5) условный максимум функции L :

$$L_{\max} = \sum_{i=l+1}^S c_i \beta_i + c_0 + \sum_{k=1}^l c_k \cdot (b_k + \sum_{i=l+1}^S b_{ki} \beta_i). \quad (2.3.6)$$

Данная формула представляет случай, когда переменные в (2.3.1) и (2.3.2) совпадают.

При наличии в (2.3.1) переменных, не входящих в (2.3.2), в L_{\max} эти переменные принимают значения своей верхней границы, если соответствующий коэффициент положителен, и значение нижней границы в противном случае.

Положим $x_k^* = \sum_{i=l+1}^S b_{ki} \beta_i + b_k$ ($k = \overline{1, l}$), где β_i определяется из условий (2.3.5).

Определим точку $M^*(X^*, B)$, где

$$X^* = (x_1^*, \dots, x_l^*), \quad B = (\beta_{l+1}, \dots, \beta_S). \quad (2.3.7)$$

Будем называть данное решение приближенно максимальным, соответствующее значение L — приближенно максимальным.

Если x_k^* ($k = \overline{1, l}$) удовлетворяет условиям (2.3.4), то точка $M^*(X^*, B)$, будет точкой максимума функции L . Однако для этих β_i может не выполняться при некоторых k третье условие (2.3.4). Рассмотрим данный случай.

Поиск максимального решения заключается в поиске точек M_k ($k = \overline{1, l}$), близких к M^* , проекции которых на гиперплоскости

$$x_k = \sum_{i=l+1}^S b_{ki} x_i + b_k \quad (k = \overline{1, l}) \quad (2.3.8)$$

удовлетворяют неравенствам (2.3.4). Это будет приближенный условный максимум. В дальнейшем для плоскости (2.3.8) будем использовать обозначение « A_k ($k = \overline{1, l}$)».

Фиксируем значение $k \in \overline{1, l}$; на первом этапе $k = 1$. Не нарушая общности, будем использовать обозначение « k ». Как будет показано на

приведенном ниже примере, для некоторых из этих проекций условия (2.3.4) выполняться не будут. Данные проекции исключаются из дальнейшего рассмотрения. Если ни одна из проекций не будет удовлетворять системе (2.3.4), как показано ниже, система (2.3.4) будет несовместной. Если для некоторых k ($k = \overline{1, l}$) проекция будет удовлетворять системе (2.3.4), эту проекцию можно считать приближенным решением, которое будет в дальнейшем улучшаться с использованием метода приращений.

Для обозначения проекции точки M будем использовать обозначение $Пр M$. Пусть точка $M_k = (Y, B)$, где $Y = (y_1, \dots, y_l)$ и $B = (\beta_{l+1}, \dots, \beta_s)$ $y_p = x_p^* + \varepsilon_p$ ($p = \overline{1, l}$), ε_p будут определены позднее. Найдем точку $Пр M_k$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_k = (Y, B)$ на гиперповерхность (A_k) .

Запишем уравнение данного перпендикуляра:

$$\frac{x_k - y_k}{-1} = \frac{x_{l+1} - \beta_{l+1}}{b_{k,l+1}} = \dots = \frac{x_s - \beta_s}{b_{ks}}. \quad (2.3.9)$$

Из формулы (2.3.9) находим:

$$\text{при } i = \overline{l+1, S}, \quad x_{l+i} = \beta_{l+i} + b_{k,l+i} \cdot (y_k - x_k). \quad (2.3.10)$$

Подставив выражение (2.3.10) в (2.3.8), получим:

$$x_k = b_k + \sum_{i=l+1}^S b_{ki} \beta_i + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 (y_k - x_k).$$

Отсюда

$$x_k = \left(x_k^* + y_k \cdot \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right), \quad (2.3.11)$$

$$x_k = x_k^* + \varepsilon_k \cdot \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right). \quad (2.3.12)$$

Подставив равенство (2.3.11) в (2.3.9), получим:

$$x_{l+i} = \beta_{l+i} + b_{k,l+i} \varepsilon_k / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right). \quad (2.3.13)$$

Из выражений (2.3.8) и (2.3.13) получаем:

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{i=l+1}^S b_{pi} x_i + b_p = \sum_{i=l+1}^S b_{pi} (\beta_i + b_{ki} \varepsilon_k / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right)) + b_p = \\ &= x_p^* + \varepsilon_k \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right), \quad p = \overline{1, l}, \quad p \neq k. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

С другой стороны, поскольку в (A_k) координаты x_p ($p \neq k$, $p = \overline{1, l}$) отсутствуют, то из (2.3.9) имеем:

$$\frac{x_k - y_k}{-1} = \frac{x_p - x_p^* - \varepsilon_p}{0},$$

т.е. $x_p = x_p^* - \varepsilon_p$.

$$\text{Следовательно, } \varepsilon_p = \varepsilon_k \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right).$$

Пусть выполняются условия (2.3.4):

$$\begin{cases} v_k \leq x_k = x_k^* + \varepsilon_k \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) \leq w_k, & k = \overline{1, l}, \\ \gamma_{l+i} \leq x_{l+i} = \beta_{l+i} + b_{k,l+i} \varepsilon_k / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) \leq \delta_{l+i}, & i = \overline{1, S}, \\ v_p \leq x_p = x_p^* + \varepsilon_k \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) \leq w_p, & p \neq k, p = \overline{1, l}. \end{cases}$$

Из первого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} (v_k - x_k^*) \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) &\leq \varepsilon_k \leq \\ &\leq (w_k - x_k^*) \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Заметим, что чем меньше ε_k , тем ближе будут значения y_k и x_k^* . Минимальное значение ε_k равно левой части неравенства (2.3.15). В этом случае $x_k = 0$. Аналогично определяются ограничения для x_j при $i = \overline{l+1, S}$. Здесь различаются два случая.

Первый случай. Пусть $b_{k,l+j} > 0$, тогда

$$\frac{\gamma_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{k,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) \leq \varepsilon_k \leq \frac{\delta_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{k,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right). \quad (2.3.16)$$

Второй случай. Пусть $b_{k,l+j} < 0$, тогда

$$\frac{\delta_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{k,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) \leq \varepsilon_k \leq \frac{\gamma_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{k,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right). \quad (2.3.17)$$

Из (2.3.14) для x_p при $\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} (w_p - x_p^*) \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} \right) &\geq \varepsilon_k \geq \\ &\geq (v_p - x_p^*) \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} \right), \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

здесь $p = \overline{1, l}$, $p \neq k$.

Если $\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} < 0$, то имеем противоположное неравенство:

$$\begin{aligned} (w_p - x_p^*) \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} \right) &\leq \\ &\leq \varepsilon_k \leq (v_p - x_p^*) \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} \right). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

В дальнейшем, если неравенство имеет вид $\alpha \leq \beta$, то α будем называть левой частью (ЛЧ), а β - правой частью (ПЧ) неравенства. При этом в скобках после символов «ЛЧ» и «ПЧ» будем указывать номер неравенства, например «ЛЧ(18)» - левая часть неравенства (12.3.8). Положим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k1} = \max \{ & \text{ЛЧ(15)}, \max_{i: b_{k,l+i} > 0} \text{ЛЧ(16)}, \max_{i: b_{k,l+i} < 0} \text{ЛЧ(17)}, \max_{p \neq k: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} > 0} \text{ЛЧ(18)}, \\ & \max_{p \neq k: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} < 0} \text{ЛЧ(19)} \} \end{aligned} \quad ; \quad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k2} = \min \{ & \text{ПЧ(15)}, \min_{i: b_{k,l+i} > 0} \text{ПЧ(16)}, \min_{i: b_{k,l+i} < 0} \text{ПЧ(17)}, \min_{p \neq k: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} > 0} \text{ПЧ(18)}, \\ & \min_{p \neq k: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} < 0} \text{ПЧ(19)} \} \end{aligned} \quad . \quad (2.3.21)$$

Отсюда следует, что для выполнения системы (2.3.14) необходимым и достаточным условием является

$$\varepsilon_{k1} \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_{k2}. \quad (2.3.22)$$

Будем называть это условие основным. Заметим, что если максимальный элемент из (2.3.20) – это ЛЧ(15), а минимальный элемент из (2.3.21) – это $\min_{p \neq k: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} < 0} \text{ПЧ(19)}$, то неравенство (2.3.22) всегда

выполняется в случае, если $x_k^* > 0$ и $x_p^* > 0$.

При остальных значениях ε_{k1} и ε_{k2} (2.3.22) может выполняться, а может и не выполняться. Если оно выполняется, то минимальное значение ε_k , при котором точка M_k максимально приближена к

точке $M_k(X^*, A)$, находится из равенства $\varepsilon_k = \varepsilon_{k1}$, при этом координаты точки M_k определяются следующим образом: x_k находится из формулы (2.3.12), x_p ($p \neq k$) – из формулы (2.3.14), x_{p+i} ($i = \overline{1, S}$) – из формулы (2.3.13).

Однако точка M_k дает только приближенное значение условного максимума функции L .

Если условие (2.3.22) не выполнено, то присваиваем k значение $k + 1$, и весь процесс повторяется. Если (2.3.22) не будет выполнено ни при каком k , то это означает несовместность условий (2.3.4).

2.3.2. Практическая реализация метода проектирования

Рассмотрим пример.

Требуется найти максимальное значение функции $L = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$ при ограничениях:

$$x_1 = 3x_3 - x_4 - 0,1;$$

$$x_2 = -2x_3 + x_4 + 0,2;$$

$$0,3 \leq x_3 \leq 2; 0 \leq x_4 \leq 1; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0,$$

т.е. $\delta_3 = 2; \delta_4 = 1; \gamma_3 = 0,3; \gamma_4 = 0$.

С учетом ограничений на x_3 и x_4 получаем, что $-0,2 \leq x_1 \leq 5,5; -5,8 \leq x_2 \leq 0,6$. Тогда ограничениями для x_1 и x_2 будут: $0 \leq x_1 \leq 5,9; 0 \leq x_2 \leq 0,6$. Таким образом, $v_1 = 0; w_1 = 5,9; v_2 = 0; w_2 = 0,6$.

Шаги Алгоритма 1:

1. Определяем β_i из условий (2.3.5).

Имеем: $i = 3, c_3 + \sum_{k=1}^2 c_k b_{k3} = 3 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) < 0$, поэтому

$$\beta_3 = \gamma_3 = 0,3; i = 4; c_4 + \sum_{k=1}^2 c_k b_{k4} = 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 > 0,$$

значит, $\beta_4 = \delta_4 = 1$.

2. Вычисляем x_1^* и x_2^* :

$$x_1^* = \sum_{i=1}^S b_{1i} \beta_i + b_1 = 3 \cdot 0,3 - 1 \cdot 1 - 0,1 = -0,2;$$

$$x_2^* = \sum_{i=1}^S b_{2i} \beta_i + b_2 = -2 \cdot 0,3 + 1 + 0,2 = 0,6.$$

Таким образом, $M^*(X^*, A) = (-0,2; 0,6; 0,3; 1)$. $L_{\max} = 2,9$ без учета условий (2.3.4).

3. Находим точки M_k ($k = 1, 2$). Пусть $k = 1$. Определяем ε_{11} и ε_{12} .

4. Находим

$$ЛЧ (15) = -x_k^* \cdot \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = 0,2 \cdot (1+10) / (9+1) = 0,22.$$

5. Находим $\max_{i:b_{l,i}>0} ЛЧ (16) = \max_{i:b_{l,i}>0} \frac{\gamma_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{l,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = \frac{0,3-0,3}{3} \cdot 11 = 0.$

6. Определяем $\max_{i:b_{k,l+i}<0} ЛЧ (17) = \max_{i:b_{k,l+i}<0} \frac{\delta_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{k,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = \frac{1-1}{-1} \cdot 11 = 0.$

7. Находим $\max_{p=2} ЛЧ (19) = 0,6 - 0,6 \cdot 11 / 10 = -0,06.$

8. Поскольку $\sum_{i=l+1}^S b_{2i} b_{li} < 0$ то ЛЧ(18) не существует.

Вывод: $\varepsilon_{11} = \max\{0,22; 0; -0,06\} = 0,22.$

9. Находим: $\min_{i:b_{l,i}>0} ПЧ (16) = \min_{i:b_{l,i}>0} \frac{\delta_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{l,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = \frac{2-0,3}{3} \cdot 11 = 6,23.$

10. Имеем: $\min_{i:b_{l,i}<0} ПЧ (17) = \min_{i:b_{l,i}<0} \frac{\gamma_{l+i} - \beta_{l+i}}{b_{l,l+i}} \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = \frac{0-1}{-1} \cdot 11 = 11.$

11. Находим:

$$\min_{p \neq 1: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{li} < 0} ПЧ(19) = \min_{p \neq 1: \sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{li} < 0} -x_p^* \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) / \left(\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{li}\right) = -0,6 \cdot 11 / (-7) = 0,943.$$

Вывод: $\varepsilon_{12} = \min\{6,233; 11; 0,943\} = 0,943.$

12. Сравниваем ε_{11} и ε_{12} : $\varepsilon_{11} = 0,22 < \varepsilon_{12} = 0,943$. Значит, $\varepsilon_{11} = 0,22$, $M_1(0,02; 0,6; 0,3; 0,1)$.

13. Находим:

$$x_1 = x_1^* + \varepsilon_{11} \sum_{i=l+1}^S b_{li} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = -0,2 + 0,22 \cdot 10 / 11 = 0;$$

$$x_2 = x_2^* + \varepsilon_{11} \sum_{i=l+1}^S b_{2i} b_{li} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = 0,6 + 0,22 \cdot (-7) \cdot 10 / 11 = 0,36;$$

$$x_3 = \beta_{l+1} + b_{l,l+1} \cdot \varepsilon_{11} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = 0,3 + 3 \cdot 0,22 / 11 = 0,36;$$

$$x_4 = \beta_{l+2} + b_{l,l+2} \cdot \varepsilon_{11} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{li}^2\right) = 1 - 1 \cdot 0,22 / 11 = 0,98.$$

Итог: $ПрМ_1(0; 0,46; 0,36; 0,98)$.

Вывод: приближенная точка максимума функции L , удовлетворяющая ограничениям (2.3.4), – это точка $ПрМ_1$.

Найдем $L(ПрМ_1) = 2 \cdot 0,466 + 3 \cdot 0,36 + 0,98 = 2,98.$

2.3.3. Метод приращений

Возникает вопрос: как улучшить найденное значение $L(ПрМ_1)$ и найти точную точку максимума. Для этого рассматривается итерационный процесс (назовем его Алгоритм 2), суть которого заключается в следующем. Известны интервальные оценки для координат найденной точки $ПрМ_1$. На каждой итерации координаты деформируются за счет соответствующих приращений с последующей проверкой значения L для этих приращений. Если целевая функция L будет неположительна, то это значит, что полученная на предыдущем шаге приближенная точка максимума будет оптимальным решением. Иначе новая точка, полученная из приближенной точки прибавлением к ее координатам соответствующих приращений, является точкой максимума, если ее координаты удовлетворяют заданным ограничениям. В противном случае ищется проекция этой точки и работает Алгоритм 1.

Итак, рассмотрим сущность Алгоритма 2 сначала для первой итерации, а затем в общем виде. В разделе практической реализации будет приведен соответствующий пример.

Алгоритм 2.

1. Дадим каждой переменной x_{l+i} ($i = \overline{1, S}$) приращение $\Delta^1 x_{l+i}$.

2. Тогда каждая переменная x_p ($i = \overline{1, l}$) получит приращение

$$\Delta^1 x_p = \sum_{i=p+1}^S b_{pi} \Delta^1 x_i + b_p.$$

Замечание. Здесь нижний индекс « k » связан с перебором всех плоскостей (A_k) при $k = \overline{1, l}$. Для определенности сначала положим $k = 1$; « Δ » означает, что рассматриваются приращения; верхний индекс «1» обозначает номер итерации, так как Алгоритм 2 представляет собой итерационный процесс добавления к каждой переменной x_i последовательности приращений $\Delta^1 x_i$, затем $\Delta^2 x_i$, $\Delta^3 x_i$ и т.д. Значения координат без проектирования обозначены «*».

3. При этом

$$\gamma_{l+i} - \tilde{x}_{l+i} = \Delta^1 x_{l+i} \leq \delta_{l+i} - \tilde{x}_{l+i},$$

$$v_p - \tilde{x}_p = \Delta^1 x_p \leq w_p - \tilde{x}_p,$$

$i = \overline{1, S}$, $p = \overline{1, l}$, \tilde{x}_{l+i} , \tilde{x}_p - значение соответственно переменной x_{l+i} и x_p точки $ПрМ_k$.

4. Положим: $\gamma_{l+i}^1 = \gamma_{l+i} - \tilde{x}_{l+i}$; $\delta_{l+i}^1 = \delta_{l+i} - \tilde{x}_{l+i}$; $v_p^1 = v_p - \tilde{x}_p$; $w_p^1 = w_p - \tilde{x}_p$.

5. Определим по формулам (2.3.5) $\beta_{l+i}^1 = \gamma_{l+i}^1$, если $c_{l+i} + \sum_{k=1}^l c_k \cdot b_{k,l+i} < 0$,
и $\beta_{l+i}^1 = \delta_{l+i}^1$, если $c_{l+i} + \sum_{k=1}^l c_k \cdot b_{k,l+i} \geq 0$.

6. Находим $x_i = \Delta^1 x_i = \beta_i^1$ ($i = \overline{l+1, S}$), $x_p^* = \Delta^1 x_p^* = \sum_{i=l+1}^S b_{pi} \beta_i^1 + b_p$ ($p = \overline{1, l}$),
т.е. точку $M_{k,\Delta}^*$.

7. Если выполняется условие $v_p^1 \leq x_p^* \leq w_p^1$ ($p = \overline{1, l}$), то проверяется
условие $L(M_{k,\Delta}^{*1}) > 0$.

8. Если это условие выполняется, то переход на начало Алгоритма 2.

9. Если $L(M_{k,\Delta}^{*1}) \leq 0$, то найденная ранее точка $ПрM_k$ будет точкой
максимума.

10. Если условие $v_p^1 \leq x_p^* \leq w_p^1$ не выполняется для некоторого p
($p = \overline{1, l}$), то происходит проецирование точки $M_{k,\Delta}^{*1}$, которая получается
из точки $M_{k,\Delta}^{*1}$ прибавлением к каждой координате x_p^* числа ε_p , т.е.
повторяется Алгоритм 1 для $x_p = \Delta^1 x_i$, которые находятся по формулам
(2.3.12)–(2.3.14) для $x_i = \Delta^1 x_i = \beta_i^1$ и нового $\varepsilon_{k1} = \Delta \varepsilon_{k1}^1$.

11. При этом проверяется основное условие. Если оно не
выполняется, то полагаем $k = k + 1$, и весь процесс (Алгоритм 1 и 2)
повторяется с самого начала для гиперплоскости (A_{k+1}).

12. Если основное условие выполняется, вычисляем значение L в
точке $ПрM_1^1, \Delta$.

13. Если $L \leq 0$, то найденная ранее точка M_1^1 будет являться точкой
максимума.

14. Если $L > 0$, то точка M_1^1 будет приближенным максимальным
решением, которое может быть улучшено за счет уменьшения
соответствующего приращения первой координаты.

15. Это итерационный процесс, для которого

$$\gamma_{l+i}^1 - \sum_{j=1}^q \tilde{x}_{l+i}^j = \Delta^{q+1} x_{l+i} \leq \delta_{l+i}^1 - \sum_{j=1}^q \tilde{x}_{l+i}^j; \quad (2.3.23)$$

$$v_p^1 - \sum_{j=1}^q \tilde{x}_p^j \leq \Delta^{q+1} x_p \leq w_p^1 - \sum_{j=1}^q \tilde{x}_p^j; \quad (2.3.24)$$

где \tilde{x}_{l+i}^j (\tilde{x}_p^j) – значение переменной Δx_{l+i}^j (Δx_p^j) точки $M_{k,\Delta}^{*j}$ или, если не
выполняется (2.3.4), - $ПрM_{k,\Delta}^j$, $i = 1, \dots, S$, $p = 1, \dots, l$.

Данный процесс сходится, если правая часть (2.3.23) или (2.3.24) – убывающая относительно q величина для некоторого i или p . Будем рассматривать именно этот случай. При этом

$$\tilde{x}_{l+k}^j = \tilde{x}_k^{j-1} + b_{k,l+i} \cdot \Delta \varepsilon_k^{j-1} / \left(1 + \sum_{i=l+1}^S b_{ki}^2 \right). \quad (2.3.25)$$

Аналогично определяется \tilde{x}_p^j .

16. Если на некоторой итерации с номером q $ПЧ(24) \leq 0$, ($ПЧ(23)$) то будет точкой максимума.

17. Если $ПЧ(24) > 0$, то по формулам (2.3.5) определяем $\beta_{l+i}^q = \delta_{l+i}^q$.

18. Находим значения $\Delta^q x_{l+i} = \beta_{l+i}^q$ ($i = \overline{1, S}$), $\Delta^q x_p^* = \sum_{i=l+1}^S b_{pi} \beta_i^q + b_p$ ($p = \overline{1, l}$).

Получаем точку $M_{k,\Delta}^{*q}$.

19. Находим $L(M_{k,\Delta}^{*q}) = L_{k,\Delta}^q$.

20. Если $L \leq 0$, то $ПрM_{k,\Delta}^q$ будет точкой максимума. Если $L > 0$, то при $\Delta^{q+1} x_p^*$ ($p = \overline{1, l}$), удовлетворяющем условиям (2.3.24), точка

$M_k^q = (\tilde{x}_1 + \sum_{j=1}^q \Delta^j x_1, \tilde{x}_2 + \sum_{j=1}^q \Delta^j x_2, \dots, \tilde{x}_n + \sum_{j=1}^q \Delta^j x_n)$ – подозрительная на экстремум, и повторяется Алгоритм 2.

21. Если $L > 0$, но условие (2.3.24) выполняется не для всех p , то повторяется Алгоритм 1 для $x_p = \Delta^q x_p^*$, $x_{l+i} = \Delta^q x_{l+i}^* = \beta_{l+i}^q$ и нового $\varepsilon_{k1} = \Delta^q \varepsilon_{k1}$.

22. Если для некоторого j не будет выполняться основное неравенство, то полагаем $k = k + 1$ (т.е. переходим к другой плоскости), и весь процесс повторяется начиная с шага 3 Алгоритма 1.

2.3.4. Практическая реализация метода приращений

Вернемся к рассмотренному ранее примеру. Попробуем приблизить найденное решение к истинному.

Согласно п. 3 Алгоритма 2 имеем:

$$0,3 - 0,36 = -0,06 \leq \Delta^1 x_3 \leq 2 - 0,36 = 1,64;$$

$$0 - 0,98 = -0,98 \leq \Delta^1 x_4 \leq 1 - 0,98 = 0,02; \quad 0 \leq \Delta^1 x_1 \leq 5,9; \quad -0,46 \leq \Delta^1 x_2 \leq 0,14.$$

4. Положим $\gamma_3^1 = -0,06$; $\delta_3^1 = 1,64$; $\gamma_4^1 = -0,98$; $\delta_4^1 = 0,02$.

5. Определим $\beta_3^1 = \gamma_3^1 = -0,6$; $\beta_4^1 = \gamma_4^1 = 0,02$.

6. Находим $\Delta x_1^* = -3 \cdot 0,06 - 0,02 - 0,1 = -0,3$; $\Delta x_2^* = 2 \cdot 0,06 + 0,02 + 0,2 = 0,34$.

Точка $M_{k,\Delta}^{*q} = (\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \beta_3^1, \beta_4^1)$.

7–8. Условия $\Delta^1 x_1^* \geq 0$ и $\Delta^1 x_2^* \leq 0,14$ не выполнены. Работает Алгоритм 1.

11. Ищем $ПрМ_{1,\Delta}^q$ - проекцию точки $M_{1,\Delta}^1$ на плоскость (A_1) .

4–7. Находим

$$\varepsilon_{11}^1 = \max\{0, 3 \cdot 11/10; (-0,06 - 1,64 \cdot 11)/3; (0,02 - 0,02) \cdot 11/(-1); (0,14 - 0,34) \cdot 11/(-7)\} = 0,33.$$

8–10. Находим

$$\varepsilon_{12}^1 = \min\{(5,9 + 0,3) \cdot 11/10; (1,64 + 0,06) \cdot 11/3; (-0,98 - 0,02) \cdot 11/(-1); (0,46 - 0,34) \cdot 11/(-7)\} = -0,19.$$

11. Имеем: $\varepsilon_{11}^1 = 0,33 < 1,25 = \varepsilon_{12}^1$. Значит, $k = k + 1$, и весь процесс повторяется для следующей гиперплоскости.

Во избежание громоздкости весь процесс повторять не будем, приведем окончательный результат.

12. При успешном нахождении максимального значения функции L с использованием проектирования только на одну плоскость (A_1) , k присваивается значение $k + 1$ и весь процесс отыскания максимума осуществляется по отношению к следующей гиперплоскости.

13. После перебора всех плоскостей и нахождения соответствующих максимальных значений функции L из них выбирается максимум, который и представляет собой максимальное значение L .

Для рассмотренного примера $L_{\max} = 3,033$ и достигается в точке $(0; 0,467; 0,367; 1)$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.5.

Пусть функция L представлена формулой (2.3.1) при ограничениях (2.3.4).

Если условия (2.3.4) выполнены для точки $M^*(X^*, B) = (x_1^*, \dots, x_l^*, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+S})$, то это точка максимума, причем β_i ($i = \overline{1, S}$) определяются из условий (2.3.5). В противном случае

максимальное значение $L_{\max} = \max_{\Omega} (L(ПрМ_k(Y, B)) + \sum_{j=1}^q L_{k,\Delta}^j)$, где мно-

жество Ω представляет собой множество тех значений $k = \overline{1, l}$, для которых условие (2.3.22) выполняется на каждом шаге проектирования на соответствующую гиперплоскость (A_k) , $ПрМ_k(Y, B)$ – проекция точки $M_k(Y, B) = (x_1^* + \varepsilon_1, \dots, x_k^* + \varepsilon_k, \dots, x_l^* + \varepsilon_l, \beta_{l+1}, \dots, \beta_{l+S})$ на гиперплоскость

A_k ($k = \overline{1, l}$), $L_{k, \Delta}^j = L(\tilde{x}_1^j, \dots, \tilde{x}_n^j)$ – значения функции L , где $\tilde{x}_l^j = \Delta^j x_k^*$, если выполняется условие (2.3.22), в противном случае \tilde{x}_l^j – это $\Delta^j x_l$ – координаты проекции $Pr(\Delta^j x_j^*, \dots, \Delta^j x_n^*)$ на гиперплоскость (A_k), если для проекции выполняется условие (2.3.22). Если это условие не выполняется, то данное k исключается из рассмотрения.

Количество итераций q связано с выполнением одного из условий: либо $ЛЧ(24) \leq 0$; ($ЛЧ(23) = 0$), либо $L_{k, \Delta}^q \leq 0$.

2.3.5. Оценка сложности метода проектирования и приращений

Одна из важнейших задач линейного программирования заключается в оценке числа операций сложения, умножения, деления, сравнения и присваивания. Это число характеризует сложность алгоритмов (методов).

Рассмотрим решение этой задачи согласно разработанному методу с иллюстрацией на конкретном примере для описанных алгоритмов 1 и 2.

1. $i = l + 1$, число операций умножения равно S , сложений – $S + 1$; сравнения – 1, присваивания – 1, т.е. всего – $2S + 3$ операции. При i , изменяющемся от $l + 1$ до S , общее число операций составит $(2S + 3)S$. Для рассматриваемого примера это число будет равно 14.

2. При вычислении x_k^* используется S операции умножения, $S - 1$ – сложения, т.е. всего $2S - 1$. Тогда при $k = \overline{1, l}$ будет $(2S - 1)l$ операций.

3. 4. Для $ЛЧ(15)$: умножения – $S + 1$, сложения – S , деления – 1. Итого: $2S + 2$. Для рассматриваемого примера – 6.

5. $2S$ операций умножения и сложения, которые использовались на шаге 3, 2, новые операции: вычитания 1, умножения – 1, деления – 1, т.е. 3 операции, и таких операций для i : $b_{k, l+i} > 0$, т.е. не более S . Далее из этих чисел выбирается максимум. Для этого тратится не более $S(S + 1)/2$ операции. Всего на шаге 5 получается $S(S + 7)/2$ операции. Для рассматриваемого примера будет 9 операций.

6. Всего будет не более $S(S + 7)/2$ операции.

7. Имеем S операций умножения, $S - 1$ – сложения, 1 - сравнения.

Итого: $2S$ операций. Если $\sum_{i=l+1}^S b_{pi} b_{ki} > 0$, то вычисляется $ЛЧ(19)$, для этого используется $2S + 2$ операций. Всего: $4S + 2$. Находится $\varepsilon_k = \max\{ЛЧ(15), ЛЧ(16), ЛЧ(19)\} - 3$ операции.

8, 9. Аналогично п. 5, т.е. $S(S + 7)/2$ операции.

10. Всего $4S + 2$ операции. Находится $\varepsilon_k^2 - 3$ операции.

11. Сравнение ε_k^1 и $\varepsilon_k^2 - 1$ операция.

12. Если $\varepsilon_k^1 \leq \varepsilon_k^2$, то вычисляем x_i ($i = \overline{l+1, S}$), x_k ($k = \overline{1, l}$) по формулам (2.3.12)–(2.3.14). Имеем $3S + 3 + 4(l - 1)$ новых операций. Итог: точка M_k - 1 операция написания вектора.

Переходим к Алгоритму 2.

13. Если $\varepsilon_k^1 > \varepsilon_k^2$, то полагаем $k = k + 1$, и весь процесс повторяется, до выполнения условия $\varepsilon_k^1 \leq \varepsilon_k^2$. Если это условие не будет выполняться ни для какого k , то это означает несовместность системы ограничений.

Подведем итог. Согласно перечисленным пунктам при реализации Алгоритма 1 (при $k = 1$) потребуется общее количество операций сложения, умножения, деления, сравнения и присваивания, равное

$$R_1 = (2S + 3)S + (2S - 1)l + 2S + 2 + S(S + 7) / 2 + S(S + 7) / 2 + 4S + 2 + 3 + S(S + 7) / 2 + S(S + 7) / 2 + 4S + 2 + 3 + 1 + 3S + 3 + 4(l - 1) + 1 = 4S^2 + 2Sl + 27S + 3l + 13. \quad (2.3.26)$$

Для рассматриваемого примера общее число операций составит 97. Для $k = 2$ учитываются только 11 пунктов. Поэтому здесь будет 57 операций.

При переходе от системы (2.3.3) к системе (2.3.4) число операций не превосходит величины

$$R_2 = (l - 1)(2nl - 4l^2/3 + 14l/3 + 1). \quad (2.3.27)$$

Для рассматриваемого примера это 21 операция.

Таким образом, общее число операций на данном этапе по порядку не превосходит n^2l .

Рассмотрим оценку δ_{l+i}^1 (или W_p^1), определяющую число шагов Алгоритма 2.

Должно выполняться условие $\delta_{i+1}^1 \geq \sum_{j=1}^q ПЧ(25)$.

Усиливая данное неравенство, считаем, что выполняется условие

$$\sum_{j=1}^q \frac{u_i}{r^j} = u_i \frac{1 - 1/r^q}{1 - 1/r} \geq \delta_{l+i}^1 \geq \sum_{j=1}^q \frac{a_i}{p^j} = a_i \frac{1 - 1/p^q}{1 - 1/p}, \quad (2.3.28)$$

где $a_i(u_i)$ - минимальное (максимальное) значение, такое, что слагаемое с номером j ($j = \overline{1, q}$) в неравенстве (2.3.28) больше (меньше) по абсолютной величине соответствующего слагаемого $ПЧ(25)$ ($p > 1, r > 1$). Тогда

$\frac{a_i}{\delta_{l+i}^1} \geq 1 - \frac{1}{p}$ ($\frac{u_i}{\delta_{l+i}^1} \geq 1 - \frac{1}{r}$). Докажем это.

Покажем, что $a_i / \sum_{j=1}^q \frac{a_i}{p^j} \geq 1 - \frac{1}{p}$. Имеем: $\frac{(1 - 1/p)p^q}{p^q - 1} \geq 1 - 1/p$, т.е. $1 \geq 1/p$.

Аналогично доказывается второе неравенство.

Кроме того, $1/p^q \leq 1 - \frac{\delta_{l+i}}{u_i} \cdot (1-1/p)$ и $1/r^q \geq 1 - \frac{\delta_{l+i}}{u_i} \cdot (1-1/r)$.

Таким образом, логарифмируя, получаем:

$$-\log_r \left(1 - \frac{\delta_{l+i}}{u_i} \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) \leq q \leq -\log_p \left(1 - \frac{\delta_{l+i}}{u_i} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right). \quad (2.3.29)$$

Выражения в скобках (2.3.29) дробные. Если точность вычислений составляет 0,000 1, то наибольшее значение $-\log$ будет, если выражение в скобках равно 0,000 1, а наименьшее – если 1. Отсюда с учетом ограничений (2.3.29) получаем, что $q \leq \log_p 10\,000$. Например, если $p = 10$, то $q \leq 4$.

В Алгоритме 2 использовалось $q = 4$ итерации.

К трудоемкости Алгоритма 1 прибавляется число шагов, связанных с переходом от системы (2.3.2) к системе (2.3.4), что для приведенного примера составит 21 операцию. Итого не более $97 \cdot 4 + 21 + 57 = 466$ операций.

Таким образом, общее число операций в соответствии с Алгоритмами 1 и 2 не превосходит $R_1 q l + R_2$.

Для рассматриваемого примера использовалось проектирование только на одну плоскость (A_1). В общем случае процесс может повториться для всех l плоскостей. Для каждой гиперплоскости будет получен свой максимум. Выбор наибольшего из них можно осуществлять поэтапно, сравнивая последующее значение с предыдущим и оставляя наибольшее. Поэтому к общему числу шагов прибавляется еще значение l . Для рассматриваемого примера $l = 2$.

При решении данного примера симплекс-методом потребуется не менее 90 операций сложения, умножения, сравнения, присваивания только при приведенным данным к стандартному виду и построении первой симплекс- таблицы.

Теорема 2.6.

Общее количество операций сложения, умножения, деления, сравнения и присваивания предложенного метода не превосходит величины

$$R_1 q l + R_2 + l, \quad (2.3.30)$$

где R_1 определяется из формулы (2.3.26), q из (2.3.29), R_2 из (2.3.27).

Замечание 1. В общем случае будут перебираться не все гиперплоскости, так как для некоторых из них может не выполняться основное условие. Таким образом, число операций будет меньше, чем в формуле (2.3.30).

Замечание 2. Величина q является константой, при грубых приближениях достаточно большой. Однако при достаточно большом

числе переменных n сумма (2.3.30) по порядку будет сопоставима с числом n^2l .

Вычислительная сложность разработанного метода меньше по сравнению с симплекс-методом, приведенная в статье [7].

Основными результатами данного параграфа являются:

- 1) разработан новый метод решения задач линейного программирования с полностью ограниченными областями допустимых решений, обладающий меньшей вычислительной сложностью, чем симплекс-метод;
- 2) приведено два алгоритма поиска опорного и оптимального решений.

§ 2.4. Приближенный метод оптимизации задач нелинейного программирования

Для задач нелинейного программирования, в отличие от задач линейного программирования, отсутствует единый метод решения, аналогичный симплекс-методу [16]. Поэтому для каждого класса задач нелинейного программирования применяются свои методы решения. Многие из этих методов изложены в фундаментальных трудах по нелинейному программированию [115, 119]. На основе анализа научных публикаций можно выделить следующие направления исследований в данной области:

аналитические методы оптимизации, использующие модифицированную функцию Лагранжа [127] и теорему Куна – Таккера [45, 87];

численные итерационные методы [86, 106];

приближенные алгоритмы на основе алгоритмов аппроксимации задач нелинейного программирования [101, 133], в том числе линейной [102, 128];

приближенная робастная формулировка задачи, использующая линеаризацию множества неопределенностей [113].

Одним из направлений решения задач оптимизации является наложение ограничений на условия задачи. Например, в статье [108] разработан метод решения с нелинейной и дифференцируемой целевой функцией, линейными ограничениями (интервалами возможных значений аргументов-переменных) и условием нормировки аргументов.

Данный параграф посвящен разработке приближенного метода решения задач нелинейного программирования путем аппроксимаций (разложения в ряды) целевой функции и ограничений.

2.4.1. Материалы и методы

Рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Требуется найти переменные x_1, \dots, x_n , удовлетворяющие системе уравнений:

$$\varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_q, \quad q = \overline{1, k} \quad (2.4.1)$$

и обращающие в максимум (минимум) целевую функцию

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.4.2)$$

При этом все переменные удовлетворяют ограничениям: $d_i \leq x_i \leq l_i, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим случай максимизации. При минимизации функция (2.4.2) записывается со знаком «-».

Исходя из оценок для x_i , можно оценить φ_q , подставив в каждое выражение (2.4.1) вместо x_i сначала левую, а потом правую границу. Тогда общая правая граница для φ_q будет рассматриваться как минимальная из полученной правой и данной b_q при $q = \overline{1, k}$.

Будем рассматривать функции φ_q и L бесконечно дифференцируемыми по совокупности аргументов, т.е. разлагающимися в ряды в окрестности некоторой точки $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, содержащей многогранник $(d_1 \leq x_1 \leq l_1) \cdot (d_2 \leq x_2 \leq l_2) \cdot \dots \cdot (d_n \leq x_n \leq l_n)$. Тогда

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = L(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i) + \\ + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i) \cdot (x_j - a_j) + \dots + R_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

$$R_m = \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m L}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(X_1, X_2, \dots, X_n) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m}), \quad (2.4.3)$$

$$X_i = a_i + \theta \cdot x_i, \quad 0 < \theta < 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда следует, что область дифференцируемости функций L, φ_q должна содержать многогранник

$$(a_1 + \theta d_1 \leq x_1 \leq a_1 + \theta l_1) \cdot \dots \cdot (a_n + \theta d_n \leq x_n \leq a_n + \theta l_n). \quad (2.4.4)$$

Координаты точки A определим позднее, но будем считать, что $d_i < a_i < l_i, (i = \overline{1, n})$. Введем обозначение:

$$y_i = (x_i - a_i), \quad y_{ij} = (x_i - a_i)(x_j - a_j), \quad y_{ijk} = (x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k), \dots,$$

$$y_{i_1, i_2, \dots, i_m} = (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m}),$$

где $i, j, k, i_1, i_2, \dots, i_m = \overline{1, n}$.

Пусть $L(a_1, a_2, \dots, a_n) = c_0$, $\frac{\partial L}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = c_i$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, a_2, \dots, a_n) = c_{ij}$,

$$\frac{\partial^m L}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(X_1, X_2, \dots, X_n) = c_{i_1, i_2, \dots, i_m}.$$

Отсюда находим:

$$L = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i y_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} y_{ijk} + \dots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n c_{i_1 \dots i_m} y_{i_1 \dots i_m}. \quad (2.4.5)$$

Аналогичное представление получается для функций $\varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Во избежание громоздкости выписывать его не будем. Это аналог формулы (2.4.5), но вместо L стоит φ_q , вместо коэффициентов c — соответствующие коэффициенты b , связанные с производными функций φ_q : c_{q0} , c_{qi} , c_{qij} , c_{qijk} , ..., $c_{qi_1 \dots i_m}$.

Пусть все функции L и φ_q , а также все их производные ограничены по абсолютной величине числом M . Для оценки M вычисляются все производные функций L , φ_q до m -го порядка включительно и оцениваются с избытком исходя из того, что $d_i \leq a_i \leq l_i$ ($i = \overline{1, n}$).

Покажем, как оценивается погрешность R_m , аналогично будут оцениваться погрешности функций φ_q .

Сначала на основе оценок для переменных x_i ($i = \overline{1, n}$) находим соответствующие оценки для переменных y .

Так, например,

$$\begin{aligned} d_i - a_i &\leq y_i \leq l_i - a_i \quad (i = \overline{1, n}); \\ (d_i - a_i)(d_j - a_j) &\leq y_{ij} \leq (l_i - a_i)(l_j - a_j) \quad (i, j = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

и т.д.

Согласно формуле Стирлинга,

$$m! = \sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot e^{\frac{\theta_1}{12m}} \quad (0 < \theta_1 < 1), \quad (2.4.7)$$

с учетом чего формула (2.4.3) запишется в виде

$$|R_m| \leq \frac{|M| \cdot m \cdot |(x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m})|}{\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot e^{\frac{\theta_1}{12m}}}. \quad (2.4.8)$$

Здесь $|M|$ — максимальное значение производной $\frac{\partial^m L}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ при $i_1 \in \overline{1, n}, \dots, i_m \in \overline{1, n}$ в точке, удовлетворяющей условию (2.4.4).

Пусть $a_{ij} = k_{ij} \cdot l_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$) и $k_{ij} \geq 1$ (например, $k_{ij} = 1, 1$), $l = \max_{ij} |l_{ij}|$ и $k = \min_{ij} k_{ij}$. Тогда правая часть (2.4.8) не превосходит

$$c_m = \frac{|M| \cdot (el)^m (1-k)^m}{\sqrt{2\pi m} \cdot (m)^{m-1}}. \quad (2.4.9)$$

Предположим, что $c_m \leq \varepsilon$, где ε – сколь угодно малое положительное число, т.е.

$$m + m \ln l + m \ln |1-k| \leq m \ln m + \ln \varepsilon + \frac{1}{2} \ln(2\pi/m) + \ln |M|. \quad (2.4.10)$$

При выполнении этого условия погрешность $|R_m|$ будет сколь угодно малой. Затем система (2.4.1) представляется в виде

$$\begin{cases} z_1 = b_1^0 + \sum_{j=1}^s b_{1j} z_{1, k+j}, \\ z_2 = b_2^0 + \sum_{j=1}^s b_{2j} z_{2, k+j}, \\ \dots \\ z_k = b_k^0 + \sum_{j=1}^s b_{kj} z_{k, k+j}. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

Здесь $z_1, z_{1, k+j}$ ($i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, s}$) $\in B = \{y_i, y_{ij}, \dots, y_{i_1 \dots i_m}\}$, s равно количеству слагаемых во множестве B без множества $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$. Поэтому проверка выполнения условия (2.4.10) начинается при $m = 3$. Если оно не выполняется, то полагаем $m = m + 1$ и т.д.

Итак, с точностью $\varepsilon > 0$ функция (2.4.2) может быть представлена суммой (2.4.5). Аналогичные представления имеют функции (2.4.1), а именно:

$$\sum_{j=1}^n b_{qj} y_j = - \sum_{i, j=1}^n b_{qij} y_{ij} - \sum_{i, j, k=1}^n b_{qijk} y_{ijk} - \sum_{i_1 i_2 \dots i_m=1}^n b_{q i_1 i_2 \dots i_m} y_{i_1 i_2 \dots i_m} + b_q + b_q^0, \quad (2.4.12)$$

$q = \overline{1, m}$, b_q^0 - значение функции φ_q в точке (a_1, a_2, \dots, a_m) .

При этом выполняются ограничения (2.4.6). Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда $n \geq q$. Приведем левые части уравнений системы (2.4.12) к диагональному виду (2.4.11) с коэффициентом 1 при переменных в левой части. Тогда

$$y_q = \sum_{i=q+1}^n r_{qi} y_i + \sum_{i, j=1}^n r_{qij} y_{ij} + \sum_{i, j, k=1}^n r_{qijk} y_{ijk} + \dots + \sum_{i_1 i_2 \dots i_m=1}^n r_{q i_1 i_2 \dots i_m} y_{i_1 i_2 \dots i_m} + r_q + r_q^0. \quad (2.4.13)$$

Если $n < q$, то в выражении (2.4.13) часть переменных у каждого уравнения «уходят» из правой части в левую.

Определим, как это сделано в § 2.3, с учетом того, что $d_i < a_i$ и $l_i > a_i$ для коэффициентов в правой части (2.4.11) на основе (2.4.6) значения переменных β_1, \dots, β_n , β_{ij} , β_{ijk} , $\beta_{i_1 i_2 \dots i_m}$ следующим образом:

$$\beta_i = \begin{cases} d_i - a_i, & \text{если } c_i < 0, \\ l_i - a_i & \text{— в противном случае,} \end{cases} \quad (2.4.14)$$

где $i = \overline{q+1, n}$

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= (d_i - a_i)(d_j - a_j), & \text{если } c_{ij} + \sum_{p=1}^n c_p \cdot r_{pij} < 0, \\ \beta_{ij} &= (l_i - a_i)(l_j - a_j) & \text{— в противном случае,} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

где $i, j = \overline{1, n}$. Аналогично

$$\begin{aligned} \beta_{ijk} &= (d_i - a_i)(d_j - a_j)(d_k - a_k), & \text{если } c_{ijk} + \sum_{p=1}^n c_p \cdot r_{pijk} > 0, \\ \beta_{ijk} &= (l_i - a_i)(l_j - a_j)(l_k - a_k) & \text{— в противном случае,} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

где $i, j, k = \overline{1, n}$ и т. д.

Наконец

$$\begin{cases} \beta_{i_1 i_2 \dots i_m} = (d_{i_1} - a_{i_1}) \dots (d_{i_m} - a_{i_m}), & \text{если } c_{i_1 i_2 \dots i_m} + \sum_{p=1}^n c_p \cdot r_{p i_1 i_2 \dots i_m} < 0, \\ \beta_{i_1 i_2 \dots i_m} = (l_{i_1} - a_{i_1}) \dots (l_{i_m} - a_{i_m}) & \text{— в противном случае,} \end{cases} \quad (2.4.17)$$

где $i_1 i_2 \dots i_m = \overline{1, n}$.

Теорема 2.7.

Условный максимум функции L при выполнении условий (2.4.6), (2.4.10), (2.4.13), (2.4.14), (2.4.15), (2.4.16), (2.4.17) с точностью ε будет равен

$$\begin{aligned} L_{\max} &= c_0 + \sum_{i=q+1}^n c_i \beta_i + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \beta_{ij} + \dots + \sum_{i_1 i_2 \dots i_m=1}^n c_{i_1 \dots i_m} \beta_{i_1 \dots i_m} + \\ &+ \sum_{p=1}^n c_p (r_q + r_q^0 + \sum_{i,j=1}^n r_{pij} \beta_{ij} + \dots + \sum_{i_1 i_2 \dots i_m=1}^n r_{p i_1 \dots i_m} \beta_{i_1 \dots i_m}). \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Доказательство.

Обозначим через L_1 правую часть (2.4.17). Допустим, что в точке $(y_1^0, \dots, y_n^0, y_{11}^0, \dots, y_{1n}^0, \dots, y_{n \dots n}^0)$ функция L принимает максимальное значение, равное L_0 . Тогда L_0 можно представить в виде, где правая часть отличается от правой части L_1 только тем, что вместо β_{ij} стоит y_{ij}^0 ($i, j = \overline{1, n}$), а вместо $\beta_{ijk} = y_{ijk}^0$ ($i, j, k = \overline{1, n}$) и т.д.

Найдем разность L_1 и L_0 :

$$\begin{aligned}
L_1 - L_0 &= \sum_{i=q+1}^n c_i (\beta_i - y_i^0) + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} (\beta_{ij} - y_{ij}^0) + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n c_{i_1 \dots i_m} (\beta_{i_1 \dots i_m} - y_{i_1 \dots i_m}^0) + \\
&+ \sum_{p=1}^n c_p \left(\sum_{i,j=1}^n r_{p ij} (\beta_{ij} - y_{ij}^0) + \sum_{i,j,k=1}^n r_{p ijk} (\beta_{ijk} - y_{ijk}^0) + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n r_{p i_1 \dots i_m} (\beta_{i_1 \dots i_m} - y_{i_1 \dots i_m}^0) \right) = \\
&= \sum_{i=q+1}^n (\beta_i - y_i^0) \cdot c_i + \sum_{i,j=1}^n (\beta_{ij} - y_{ij}^0) (c_{ij} + \sum_{p=1}^n c_p \cdot r_{p ij}) + \sum_{i,j,k=1}^n (\beta_{ijk} - y_{ijk}^0) (c_{ijk} + \\
&+ \sum_{p=1}^n c_p \cdot r_{p ijk}) + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n (\beta_{i_1 \dots i_m} - y_{i_1 \dots i_m}^0) (c_{i_1 \dots i_m} + \sum_{p=1}^n c_p \cdot r_{p i_1 \dots i_m}).
\end{aligned}$$

Из ограничений (2.4.14)–(2.4.17) следует, что слагаемые в выражении (2.4.18) неотрицательны. Отсюда следует, что $L_1 \geq L_0$. Кроме того, выполняется условие (2.4.6).

Теорема доказана.

Если условие (2.4.6) не будет выполнено, то возможно скорректировать ограничения на переменные или координаты точки A исходя из практической реализации. Это будет показано в следующем пункте.

2.4.2. Результаты и их обсуждение

Рассмотрим конкретный пример.

Максимизируется функция

$$L = e^{x_1} \cdot x_2 + 2x_1 x_2 \quad (2.4.19)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^2 = 6, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ 0,5 \leq x_1 \leq 2, \\ 0,2 \leq x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Имеем: $d_1 = 0,5$; $d_2 = 0,2$; $l_1 = 2$; $l_2 = 1$.

Считаем: $a_1 = 1 \cdot 1, 1 = 1, 1$; $a_2 = 0,2 \cdot 1, 1 = 0,22$.

Пусть $m = 3$, тогда

$$\begin{aligned}
L &= e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_1 a_2 + (e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_2)(x_1 - a_1) + (e^{a_1} + 2a_1)(x_2 - a_2) + \\
&+ (e^{a_1} \cdot a_2)(x_1 - a_1)^2 + 2(e^{a_1} + 2)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \frac{1}{6}(e^{a_1 + \theta x_1} \cdot x_2)(x_1 - a_1)^3 + \\
&+ \frac{1}{2}e^{a_1 + \theta x_1} (x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 2a_1^2 + a_1 a_2^2 + (2a_1 + a_2^2)(x_1 - a_1) + 2a_1 a_2 (x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)^2 + \\
&+ 2a_2 (x_2 - a_2)(x_1 - a_1) + a_1 (x_2 - a_2)^2 + (x_2 - a_2)^2 (x_1 - a_1);
\end{aligned}$$

$$\varphi_2 = a_1 - 2a_2 + (x_1 - a_1) - 2(x_2 - a_2).$$

Оценим $|M|$. Имеем

$$|M(L)| \leq e^{1,1+2} = 21,9; \quad |M(\varphi_1)| \leq 2,2484; \quad |M(\varphi_2)| = 2.$$

Отсюда $\max\{M(L), M(\varphi_1), M(\varphi_2)\} = 21,9$.

Проверим выполнение условия (2.4.10) при $m = 3$ и $|M| = 21,9$:

$$3 + 3\ln 2 + 3\ln 0,1 \leq \ln \varepsilon + 3\ln 3 + \frac{1}{2}\ln(2\pi/3) + \ln 21,9.$$

Можно показать, что данное неравенство выполняется при $\varepsilon = 0,0002$.

Пусть $\varepsilon = 0,0002$. Тогда с точностью ε

$$L = e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_1a_2 + (e^{a_1} \cdot a_2 + 2a_2)(x_1 - a_1) + (e^{a_1} + 2a_1)(x_2 - a_2) + \\ + 0,5(e^{a_1} \cdot a_2)(x_1 - a_1)^2 + (e^{a_1} + 2)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2);$$

$$\varphi_1 = 2a_1^2 + a_1a_2^2 + (2a_1 + a_2^2)(x_1 - a_1) + 2a_1a_2(x_2 - a_2) + (x_1 - a_1)^2 + \\ + 2a_2(x_2 - a_2)(x_1 - a_1) + a_1(x_2 - a_2)^2;$$

$$\varphi_2 = a_1 - 2a_2 + (x_1 - a_1) - 2(x_2 - a_2), \text{ т.е.}$$

$$L = 1,1009y_1 + 3,4442y_2 + 0,6609y_{11} + 10,008y_{12} + 1,1449;$$

$$\varphi_1 = 2,4732 + 2,2484y_1 + 0,484y_2 + y_{11} + 0,88y_{12} + 2,2y_{22};$$

$$\varphi_2 = 0,66 + y_1 - 2y_2.$$

Составим систему $\begin{cases} \varphi_1 = 6, \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$ и приведем ее к диагональному виду:

$$y_1 = -0,803y_{11} - 0,3534y_{12} - 0,8834y_{22} + 1,352;$$

$$y_2 = -0,4915y_{11} - 0,1767y_{12} - 0,4417y_{22} + 1,006.$$

Определим согласно (2.4.15) β_{ij} ($i, j = 1, 2$).

$$\beta_{11} = (0,5 - 1,1)^2 = 0,36, \text{ так как } 0,6609 - 1,1009 \cdot 0,803 - 3,4442 \cdot 0,4015 < 0;$$

$$\beta_{12} = (0,2 - 0,22)(0,5 - 1,1) = 0,012, \text{ так как}$$

$$0,6609 - 1,1009 \cdot 0,803 - 3,4442 \cdot 0,4015 < 0; \quad \beta_{22} = (0,2 - 0,22)^2 = 0,0004.$$

Тогда

$$y_1 = -0,2891 - 0,0042 - 0,0004 + 1,352 = 1,0587;$$

$$y_2 = -0,14454 - 0,0021 - 0,0002 + 1,006 = 0,8592.$$

Отсюда $x_1 = 2,1587$; $x_2 = 1,0792$.

Данные значения x_1 и x_2 выходят за рамки ограничений на x_1 и x_2 и не удовлетворяют системе (2.4.1). Необходимо улучшить этот результат. Можно использовать следующий подход. В задачах прикладного характера границы изменения переменных часто задаются приближенно, и их можно корректировать. Кроме того, можно корректировать и точку, относительно которой функции разлагаются в ряды.

Поскольку в рассматриваемом примере в формировании значений x_1 и x_2 участвуют нижние границы изменения переменных (верхние не участвуют), а также координаты точки разложения, то корректировке подлежат эти значения.

Пусть, например, нижняя граница для d_1 будет 0,34. Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= -0,4638 - 0,0049 - 0,005 + 1,352 = 0,8832; \\ y_2 &= -0,2329 - 0,0025 - 0,0003 + 1,006 = 0,7732; \\ x_1 &= 1,9832; \quad x_2 = 0,9932. \end{aligned}$$

В этом случае найденные значения удовлетворяют системе ограничений и второму уравнению системы (2.4.1). При этом не выполняется первое уравнение системы (2.4.1).

С привлечением средства MS Excel «Поиск решения» получены результаты $x_1^0 = 2$, $x_2^0 = 1$. Погрешность не превосходит 0,8 %. Левая часть первого уравнения системы (2.4.1) при $x_1 = 1,9832$ и $x_2 = 0,9932$ равна 5,8894, а должна быть равна 6. Погрешность в этом случае составляет 1,8 %.

Вывод: полученный результат достаточно точен.

Рассмотрим на графиках (рис. 2.1, 2.2) изменение результата при разных значениях левых границ d_1 и d_2 (например, d_1 изменяется от 0,3 до 0,6; d_2 изменяется от 0,1 до 0,3 при $a_1 = 1,1$; $a_2 = 2,2$). Имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,803(d_1 - 1,1)^2 - 0,3534(d_1 - 1,1)(d_2 - 0,22) - 0,8834(d_2 - 0,22)^2 + 2,452; \\ x_2 &= -0,4015(d_1 - 1,1)^2 - 0,1767(d_1 - 1,1)(d_2 - 0,22) - 0,4417(d_2 - 0,22)^2 + 1,226. \end{aligned}$$

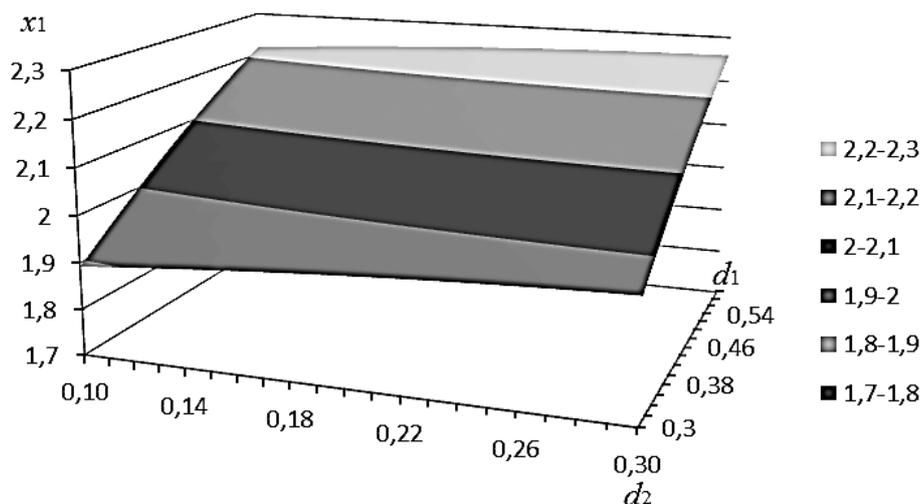


Рис. 2.1

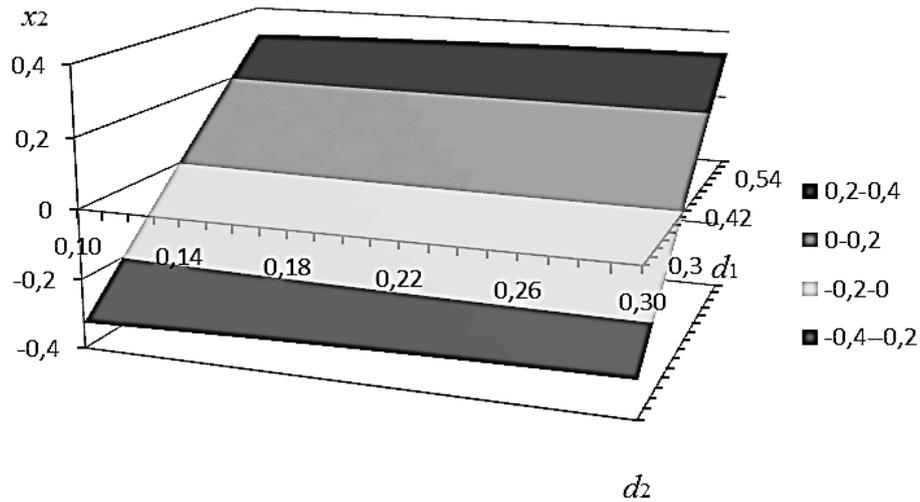


Рис. 2.2

Другой вариант. При данных границах d_1 и d_2 изменяются a_1 и a_2 с соблюдением условий $d_1 < a_1 < l_1$; $d_2 < a_2 < l_2$. Тогда

$$x_2 = -\frac{\alpha}{8(1+a_1)} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{64(1+a_1)^2} + \frac{\beta}{4(1+a_1)}},$$

где

$$\alpha = 2a_2^2 - 2,64 - 8a_2 - 1,32a_1, \quad \beta = -3a_1^2 - 4a_1a_2^2 + 2a_2^3 + 4,68a_1a_2 + 5,57 - 3,34a_2^2 - 2,64a_2, \quad x_1 = -0,66 + 2x_2 - 2a_2 + a_1.$$

На рис. 2.3, 2.4 построены графики зависимости x_1 и x_2 от значений координат a_1 и a_2 точки разложения в ряд функций при изменении a_1 от 0,8 до 1,3, a_2 – от 0,2 до 0,3 при $d_1 = 0,5$; $d_2 = 0,2$.

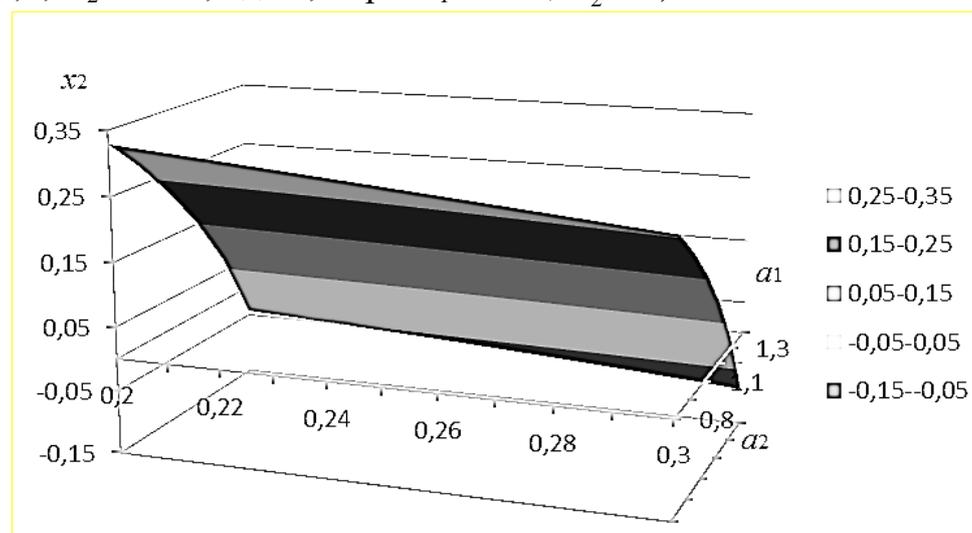


Рис. 2.3

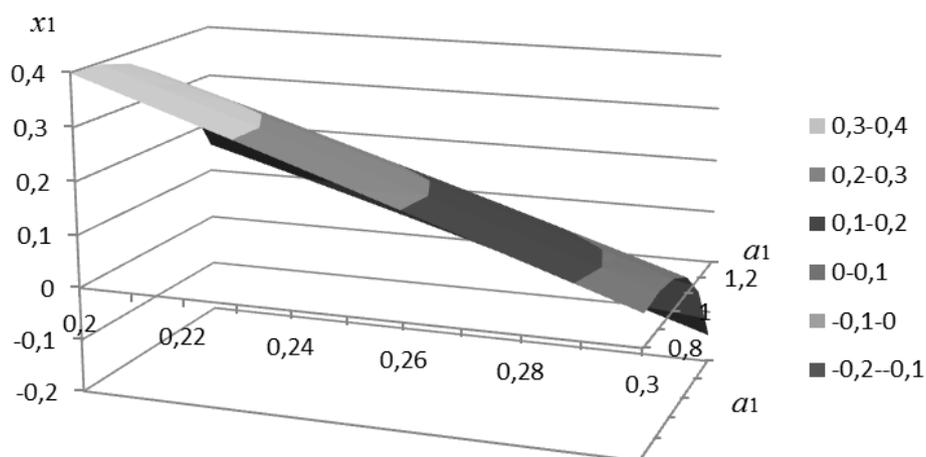


Рис. 2.4

Замечание. Если коэффициенты разложения функций φ_q имеют более сложную, чем полиномиальная, зависимость от a_1 и a_2 , то они разлагаются в ряд с заданной степенью точности.

В параграфе показан новый метод приближенного решения оптимизационной задачи нелинейного программирования [39]. Для пояснения вычислительного алгоритма рассмотрен конкретный пример.

ГЛАВА 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ, ИНВЕСТИРОВАНИЯ, ДИВЕРСИФИКАЦИИ И ЛОГИСТИКИ

Одной из важнейших проблем в экономике, учебном процессе и других сферах выступает задача рационального распределения ограниченных ресурсов. Ее актуальность определяется ростом стоимости ресурсов и увеличением их вклада в стоимость конечного продукта.

В данной главе разработан новый аналитический метод решения задачи распределения ресурсов, основанный на использовании неопределенных множителей Лагранжа. Проводится исследование и обоснование необходимого и достаточного условий существования экстремума целевой функции. Для учета нечеткости информации исходные данные задачи задаются в виде нечетких чисел треугольного вида. В разработанном методе выделяются три оптимизационные задачи нелинейного программирования для наилучших, средних и наихудших условий. Рассматривается решение задачи для распределения однородных и неоднородных ресурсов. Результатом исследования является

разработанный новый способ распределения однородных и неоднородных ресурсов в условиях неопределенности.

В учебном процессе имеются задачи, решение которых требует распределения ресурсов. Такими задачами являются, например, учебные задания, проекты, работы. В качестве ресурсов могут выступать часы учебных занятий, количество мероприятий, информационное обеспечение.

Разработан метод оптимального распределения ресурсов в учебном процессе в условиях неопределенности. Для достижения цели в качестве показателя эффективности выбрана взвешенная сумма вероятностей выполнения всех заданий данной работы; ограничения заданы исходя из располагаемых ресурсов.

Предложены также новые методы расчета инвестиций в условиях неопределенности, представлен анализ деверсификации портфеля оценочных баллов в учебном процессе, анализ логистического процесса.

Данные методы могут найти применение в учебном процессе, экономике, сельском хозяйстве и других областях.

§ 3.1. Метод решения задачи оптимизации распределения целочисленного ресурса

Исследуется проблема оптимизации распределения целочисленного ресурса (средств) по задачам (мероприятиям, целям). Используемые для этого методы относятся к области комбинаторной оптимизации, а именно к задачам о назначении целей. Известные методы решения данной проблемы являются численными, переборными, приближенными, требуют проведения большого числа итераций, не предполагают проверку условий существования целочисленного решения, в ряде случаев могут выдавать решение не только далекое от оптимального, но и нарушающее область допустимых значений переменных.

Новый аналитический способ решения задачи распределения целочисленных ресурсов разработан на основе метода неопределенных множителей Лагранжа. Для этого распределяемые ресурсы представлены в виде суммы целой и дробной частей числа. Сформулированы и доказаны условия, при которых дробные части переменных решения задачи равны нулю (т.е. оно является целочисленным). Доказана теорема, определяющая необходимые и достаточные условия, при выполнении которых решение задачи существует и находится по разработанному в статье алгоритму (найден критерий существования целочисленного решения). К таким условиям относятся однородность ресурсов, а также дополнительные условия (ограничения на целочисленность и положительность дополнительных выведенных формульных условий задачи). Показано, что полученное решение задачи соответствует максимуму целевой функции. Разработан алгоритм поиска целочисленного решения задачи

распределения ресурсов методом неопределенных множителей Лагранжа и разобран конкретный пример.

Изложенный в данном параграфе метод может применяться для распределения ресурсов в промышленном производстве, сельском хозяйстве, системах организационного управления, учебном процессе, решении вопросов целераспределения в военном деле, построении систем информационной, техносферной безопасности, ликвидации чрезвычайных ситуаций, создании систем охраны объектов и тревожной сигнализации. В этом случае необходима его адаптация к рассматриваемым проблемам и задачам. Он может применяться также для распределения жизнеобеспечивающих ресурсов: энергетических, газо- и водоснабжения, продуктов питания и др.

3.1.1. Задача о распределении ресурсов

Одним из важных классов задач комбинаторной оптимизации является задача о назначении целей. Первоначально она рассматривалась как задача определения оптимального распределения комплекта различного вооружения (средств поражения) по целям для нанесения максимального ущерба противнику [1, 8, 12, 53, 74, 99]. В настоящее время область применения таких задач расширилась за счет моделей распределения ресурсов в экономике [82], системах организационного управления [32, 132], планирования производства продукции [121], банковской сфере [111]. Особое внимание распределению ресурсов уделяется при проектном управлении. Для решения данной проблемы может использоваться система рейтингов по рабочим задачам и компетенциям [103].

Во многих задачах о назначении целей имеется требование целочисленности переменных (например, количество ракет, самолетов-перехватчиков, сотрудников, компьютеров). Требование целочисленности переменных существенно усложняет процесс нахождения оптимального решения [116]. Округления нецелочисленных переменных до целых чисел могут привести не только к заметным потерям эффективности целочисленного плана, но и к недопустимому решению. Для решения задачи целочисленного распределения средств применяется метод максимального относительного элемента [8]. Данный метод основан на упорядоченном переборе возможных решений и является численным, приближенным. Проблема его использования заключается в том, что точного целочисленного решения задачи может не быть, а на поиск наиболее близкого к нему приближенного решения будут затрачиваться значительные вычислительные ресурсы.

Многие задачи оптимизации распределения нецелочисленных ресурсов для непрерывных функций решаются методом неопределенных

множителей Лагранжа [32]. Важной инновацией является распространение данного метода на решение задач дискретной оптимизации.

3.1.2. Материалы и методы

Проблема распределения ресурсов (средств) для решения задач заключается в следующем.

Имеется n задач и m средств для их решения. Заданы вероятности $p_j (j=\overline{1, n})$ выполнения j -й задачи каждым средством ($0 < p_j < 1$). Обозначим через x_j количество средств, назначенных для выполнения j -й задачи. Пусть $x_j = [x_j] + \{x_j\}$, где $[x_j]$ - целая часть числа x_j , $\{x_j\}$ - дробная часть.

В этом случае максимизируемая целевая функция будет иметь вид

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[1 - (1 - p_j)^{[x_j] + \{x_j\}} \right] = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[1 - (1 - p_j)^{[x_j]} (1 - p_j)^{\{x_j\}} \right], \quad (3.1.1)$$

где a_j - важность выполнения j -й задачи; $\frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j}$ - нормировка a_j .

Для получения критерия целочисленности решения задачи (3.1.1) разложим множитель $\varepsilon_j = (1 - p_j)^{\{x_j\}}$ в ряд, ограничиваясь двумя членами. Получим:

$$(1 - p_j)^{\{x_j\}} = 1 - \{x_j\} \cdot p_j.$$

При таком разложении абсолютная погрешность вычисления ε_j не превосходит величины $\frac{0,5^2 \cdot 0,5^2}{2} = 0,0313$.

В самом деле, абсолютная погрешность не превосходит первого отброшенного члена, т.е. члена $\frac{\{x_j\}(\{x_j\} - 1)p_j^2}{2}$.

При максимальном значении вероятности $p = 1$ покажем, что $\frac{\{x_j\}(\{x_j\} - 1)p_j^2}{2} \leq \frac{0,5^4}{2}$.

Имеем: $\{x_j\}^2 - \{x_j\} - 0,5^4 \leq 0$, т.е. $0 \leq \{x_j\} \leq 1$ - это верно.

Относительная погрешность не превосходит величины $\Delta = \frac{0,0313}{1 - 0,25} = 0,042$, т.е. 4,2 %, что близко к повышенной точности.

Погрешность в вычислении функции \mathcal{E} составляет:

$$\Delta_{\mathcal{E}} = \left| \frac{\mathcal{E}'_{\varepsilon_j} \varepsilon_j \cdot \Delta}{\mathcal{E}} \right| = \frac{a_j \left[(1-p_j)^{[x_j]} \cdot \varepsilon_j \cdot \Delta \right]}{\sum_{j=1}^n a_j \left[1 - (1-p_j)^{[x_j]} \cdot \varepsilon_j \right]} \leq \Delta,$$

т.е. $\Delta_{\mathcal{E}} \leq 4,2 \%$.

Система ограничений задачи распределения ресурсов имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j = m, \\ 0 \leq \{x_j\} < 1, \quad j = \overline{1, n}, \\ [x_j] \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Для нахождения экстремума функции (3.1.1) при ограничениях (3.1.2) запишем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{E}^* = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[1 - (1-p_j)^{[x_j]} (1 - \{x_j\} p_j) \right] + \lambda \left(m - \sum_{j=1}^n [x_j] - \sum_{j=1}^n \{x_j\} \right). \quad (3.1.3)$$

Последние два ограничения системы (3.1.2) здесь использовать не будем. Они будут учтены в дальнейшем.

Найдем частные производные по $[x_j]$, $\{x_j\}$ ($j = \overline{1, n}$), λ и приравняем их к нулю.

Имеем:

$$\mathcal{E}'_{[x_j]}^* = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[-(1-p_j)^{[x_j]} (\ln(1-p_j)(1 - \{x_j\} p_j)) \right] - \lambda = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\mathcal{E}'_{\{x_j\}}^* = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[(1-p_j)^{[x_j]} p_j \right] - \lambda = 0, \quad (3.1.5)$$

$$\mathcal{E}'_{\lambda}^* = m - \sum_{j=1}^n [x_j] - \sum_{j=1}^n \{x_j\} = 0. \quad (3.1.6)$$

Из формулы (3.1.4) для $j = \overline{1, n-1}$ получаем:

$$\begin{aligned} \ln a_j + [x_j] \ln(1-p_j) + \ln \left((-\ln(1-p_j))(1 - \{x_j\} p_j) \right) = \\ = \ln a_n + [x_n] \ln(1-p_n) + \ln \left((-\ln(1-p_n))(1 - \{x_n\} p_n) \right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Из формулы (3.1.5) при $j = \overline{1, n-1}$ находим

$$\ln a_j + [x_j] \ln(1-p_j) + \ln p_j = \ln a_n + [x_n] \ln(1-p_n) + \ln p_n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
[x_j] &= \frac{1}{\ln(1-p_j)} \left([x_n] \ln(1-p_n) + \ln \frac{p_n}{p_j} + \ln \frac{a_n}{a_j} \right) = \\
&= \frac{[x_n] \ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + \frac{1}{\ln(1-p_j)} \ln \frac{a_n p_n}{a_j p_j}.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Из формулы (3.1.7) имеем

$$\begin{aligned}
\ln \frac{a_n}{a_j} + \ln(-\ln(1-p_n)(1-\{x_n\}p_n)) + [x_n] \ln(1-p_n) - [x_j] \ln(1-p_j) = \\
= \ln(-\ln(1-p_j)) + \ln(1-\{x_j\}p_j).
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенства (3.1.8) получаем:

$$\ln(-\ln(1-p_n)(1-\{x_n\}p_n)) - \ln \frac{p_n}{p_j} = \ln(-\ln(1-p_j)) + \ln(1-\{x_j\}p_j)$$

и

$$\ln \frac{p_j (\ln(1-p_n)(1-\{x_n\}p_n))}{p_n \ln(1-p_j)} = \ln(1-\{x_j\}p_j).$$

Следовательно,

$$\{x_j\} = \frac{1}{p_j} - \frac{\ln(1-p_n)(1-\{x_n\}p_n)}{p_n \ln(1-p_j)}. \tag{3.1.9}$$

Допустим, что $a_n \leq a_j$ ($j = \overline{1, n-1}$).

Предположим, что $\{x_n\} = 0$. В этом случае $\{x_j\} = 0$ ($j = 1, \dots, n-1$)

тогда и только тогда, когда

$$\frac{p_n}{p_j} = \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)}. \tag{3.1.10}$$

Отсюда следует, что условие (3.1.10) выполняется тогда и только тогда, когда все p_j ($j = \overline{1, n}$) равны. Это означает однородность средств.

Тогда из выражения (3.1.9) следует, что $\{x_j\} = 0$ ($j = \overline{1, n-1}$).

Определим условие выполнения условия $\{x_n\} = 0$.

Подставим $[x_j]$ из (3.1.8) и $\{x_j\}$ из (3.1.9) в первое уравнение системы (3.1.2). Получим:

$$\begin{aligned}
[x_n] \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + 1 \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{a_n p_n}{a_j p_j} / \ln(1-p_j) + \\
+ \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{\ln(1-p_n)}{p_n \ln(1-p_j)} \right) + \{x_n\} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + 1 \right) = m.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Для краткости введем следующие обозначения: в формуле (3.1.11) коэффициент при $[x_n]$ обозначим через a , второе слагаемое – через b , третье – через c . Тогда

$$\{x_n\} = (m - a[x_n] - b - c) / a. \quad (3.1.12)$$

Из формулы (3.1.12) следует, что $\{x_n\} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$[x_n] = (m - b - c) / a. \quad (3.1.13)$$

Таким образом, условие (3.1.13) является необходимым условием целочисленности ресурсов.

При $\{x_n\} = 0$ из формулы (3.1.11) имеем

$$[x_n] = \left(m - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{\ln(1-p_n)}{p_n \ln(1-p_j)} - \ln \frac{a_n p_n}{a_j p_j} / \ln(1-p_j) \right) \right) / \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + 1 \right). \quad (3.1.14)$$

При $\{x_j\} = 0$ ($j = \overline{1, n}$) равенство (3.1.14) превращается в следующее равенство

$$[x_n] = \frac{1}{n} \left(m + \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{a_n}{a_j} / \ln(1-p_n) \right). \quad (3.1.15)$$

При выполнении условия $a_n \leq a_j$ ($j = \overline{1, n-1}$) с учетом уравнения (3.1.15) получаем, что $[x_n] > 0$.

Для целочисленности $[x_n]$ необходимо и достаточно, чтобы выражение в скобках в (3.1.15) было кратно n .

При выполнении однородности из равенств (3.1.8) и (3.1.15) для $j = \overline{1, n-1}$ имеем

$$[x_j] = [x_n] + \frac{1}{\ln(1-p_n)} \cdot \ln \frac{a_n}{a_j}. \quad (3.1.16)$$

Если $[x_n]$ – целое положительное число, то для положительной целочисленности $[x_j]$ ($j = \overline{1, n-1}$) необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{\ln(1-p_n)} \cdot \ln \frac{a_n}{a_j}$ ($j = \overline{1, n-1}$) было целым при $a_n \leq a_j$.

Итак, точка $P(x_1, \dots, x_n)$, координаты которой вычисляются по формулам (3.1.15), (3.1.16), при этом в (3.1.15) выражение в скобках кратно n и второе слагаемое в (3.1.16) является целым числом при $a_n \leq a_j$ ($j = \overline{1, n-1}$), оно же является стационарной точкой с целыми положительными координатами.

Достаточное условие экстремума сводится к анализу второго дифференциала функции Лагранжа (3.1.3) для найденной точки P при условии, что dx_i связаны уравнением

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (\sum dx_j^2 \neq 0).$$

Второй дифференциал для функции Лагранжа будет иметь вид

$$d^2 \mathcal{E}^* = - \sum_{j=1}^n \left(a_j / \sum_{j=1}^n a_j \right) (\ln(1-p_j))^2 (1-p_j)^{x_j} dx_j^2, \quad (3.1.17)$$

при этом $\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_j} dx_j = 0$.

Поскольку $d^2 \mathcal{E}^* < 0$, то в точке P имеется максимум.

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы задача целераспределения, сводящаяся к максимизации целевой функции (3.1.1) при ограничениях (3.1.2), имела положительное целочисленное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) все вероятности p_j ($j = \overline{1, n}$) должны быть равны (однородность средств);

2) если $a_n = \min a_j$ ($j = \overline{1, n}$), то $\{x_n\} = 0$ и $[x_n]$, вычисленное по формуле (3.1.15), должно быть целым положительным;

3) выражение $\frac{1}{\ln(1-p_n)} \cdot \ln \frac{a_j}{a_n}$ ($j = \overline{1, n-1}$) должно быть целым.

В самом деле, пусть выполнены условия 1–3. Тогда из первого условия следует, что все p_j равны, т.е. выполняется равенство (3.1.12) и при условии 3 из $\{x_n\} = 0$ с учетом формулы (3.1.12) следует, что $\{x_j\} = 0$ ($j = \overline{1, n-1}$). Отсюда вытекает (3.1.15), и с учетом условия 2 получаем, что $[x_n]$ - целое положительное число, откуда с учетом условия 3 имеем $[x_n]$ ($j = \overline{1, n-1}$) - целое положительное число.

Из (3.1.17) следует, что данное решение максимизирует функцию (3.1.1) при ограничениях (3.1.2).

Докажем теорему в обратную сторону.

Пусть x_j ($j = \overline{1, n}$) - целое положительное решение, максимизирующее функцию (3.1.1) при ограничениях (3.1.2). Тогда при представлении x_j в виде $x_j = [x_j] + \{x_j\}$, где $[x_j]$ - целая, $\{x_j\}$ - дробная часть

числа. Имеем $\{x_j\} = 0$, но тогда выполняется равенство (3.1.12) и все p_j равны ($j = \overline{1, n}$). Значит, выполняется условие 1. Пусть $a_n = \min_{1 \leq j \leq n} a_j$. Тогда очевидно, что значение $[x_n]$, найденное по формуле (3.1.15), будет целым положительным числом, т.е. выполняется условие 2. При этом $[x_j]$ ($j = \overline{1, n-1}$) будет вычисляться по формуле (3.1.16), а так как $[x_n]$ и $[x_j]$ -целые, то выполняется условие 3.

3.1.3. Результаты и их обсуждение

Рассмотрим практическую реализацию разработанного метода. Приведем алгоритм поиска целочисленного решения задачи распределения средств и разберем конкретный пример.

Основные этапы алгоритма решения данной задачи заключаются в следующем.

1. Все вероятности должны быть одинаковы. Если это не так, то производится их корректировка. При невозможности такой корректировки положительного целочисленного решения не будет.

2. Ищется $\min_{1 \leq j \leq n} a_j$. Пусть это будет a_n .

3. Для x_n должно быть известно, что это целое положительное число, т.е. $\{x_j\} = 0$ и $[x_n]$ – целое положительное число.

4. Значение $[x_n]$ вычисляется по формуле (3.1.15).

5. По формуле (3.1.16) находятся значения $[x_j]$, которые будут целыми положительными числами.

Рассмотрим следующий пример выполнения вычислений по разработанному алгоритму.

Пусть $n = 3$; $m = 11$; $p = 0,2$; $a_1 = 0,5$; $a_2 = 0,5$; $a_3 = 0,4$. По формулам (3.1.15) и (3.1.16) находим положительное целочисленное решение: $x_1 = x_2 = 4$, $x_3 = 3$, максимизирующее соответствующую целевую функцию (3.1.1), которая при данных значениях равна

$$\Theta = 2 \cdot \frac{0,5}{1,4} \cdot (1 - 0,2)^4 + \frac{0,2}{1,4} \cdot (1 - 0,2)^3 = 0,438 \ 857.$$

Таким образом, алгоритм позволяет аналитически найти решение задачи распределения ресурсов.

В параграфе показан новый метод решения оптимизационной задачи распределения целочисленного ресурса. Доказана теорема, определяющая необходимые и достаточные условия, при выполнении которых решение

задачи существует и находится по разработанному в статье алгоритму (т.е. установлен критерий существования целочисленного решения). К таким условиям относится однородность ресурсов (средств), а также дополнительные условия (ограничения на целочисленность и положительность дополнительных условий задачи). Разработан алгоритм поиска целочисленного решения задачи распределения ресурсов методом неопределенных множителей Лагранжа. Его применение рассмотрено на конкретном примере.

§ 3.2. Математическая модель оптимизации распределения ресурсов с учетом важности объектов

3.2.1. Рациональное распределение ресурсов

Проблема рационального распределения ресурсов существует во многих областях человеческой деятельности (экономике, технике, учебном процессе, военном деле). Для решения этой проблемы используются разнообразные математические методы и модели. Задачи распределения однородных и неоднородных средств по целям решались обычно симплекс-методом и методом возможных направлений. Детальная проработка данных вопросов для распределения ресурсов в ходе информационного конфликта представлена в работе [55]. В области экономики задачи распределения ресурсов с использованием современного математического аппарата изложены в работах [65, 113]. В статье [65] разработана оптимальная модель планирования для дискретной системы. Вопросам распределения ресурсов в банковской сфере посвящена работа [113]. В работе [96] рассмотрено оптимальное распределение сил и средств, предназначенных для ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций.

Особое внимание распределению ресурсов уделяется при проектном управлении в учебном процессе. Метод проектов в условиях высшего образования рассмотрен в работе [11]. Так, в статье [32] разработан аналитический метод оптимизации выполнения организационных вопросов данной задачи. Метод неопределенных множителей Лагранжа применен в работе [121] для задачи рационального распределения многомерного ресурса при многономенклатурном производстве.

Таким образом, несмотря на то, что проблема моделирования рационального распределения ресурсов достаточно полно и подробно представлена в научной литературе, существует необходимость разработки простого, наглядного метода решения этой задачи в условиях неопределенности применительно к вопросам управления учебным

процессом. Актуальность создания метода распределения ресурсов именно для учебного процесса обусловлена повсеместным внедрением метода проектов в систему образования.

В разделе «Материалы и методы» данного исследования рассмотрена методология решения задачи распределения ресурсов в условиях неопределенности; показано, какие ресурсы учебного процесса могут быть включены в разработанный алгоритм, на конкретном примере рассмотрена возможность применения разработанного метода в учебной деятельности.

3.2.2. Материалы и методы

Продемонстрируем применение метода оптимального распределения ресурсов в учебном процессе в условиях неопределенности.

Предлагаемый метод решения данного класса задач заключается в следующем:

1) выделяются три оптимизационные задачи нелинейного программирования для наилучших, средних и наихудших условий;

2) выбирается показатель эффективности операции в виде взвешенной суммы вероятностей выполнения всех заданий данной работы; ограничения задаются исходя из имеющихся ресурсов (средств);

3) каждая задача решается аналитически методом неопределенных множителей Лагранжа; исследуются необходимые и достаточные условия существования экстремума целевой функции.

Рассмотрим следующую формализованную постановку проблемы распределения ресурсов.

Пусть имеется n задач и m однотипных средств (мероприятий) для их решения. Известны вероятности $p_j (j = \overline{1, n})$ выполнения j -й задачи каждым средством в течение заданного времени, причем $0 < p_j < 1$. Обозначим через x_j количество средств, назначенных для выполнения j -й задачи, через P_j – вероятность выполнения задачи хотя бы одним средством.

Тогда

$$P_j = 1 - (1 - p_j)^{x_j}. \quad (3.2.1)$$

Показатель эффективности – математическое ожидание числа выполненных задач с учетом их важности будет равен:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^n a_j P_j = \sum_{j=1}^n a_j \left[1 - (1 - p_j)^{x_j} \right]. \quad (3.2.2)$$

Коэффициент a_j - это важность выполнения j -й задачи. Нормируем a_j введением безразмерных коэффициентов:

$$b_j = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (3.2.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = m. \quad (3.2.4)$$

Требуется найти числа x_1, x_2, \dots, x_n средств, распределенных по n задачам, причем средний эффект \mathcal{E} может быть: 1) наилучшим; 2) средним; 3) наихудшим.

Таким образом, имеем задачу распределения ресурсов в нечетких условиях. В этом случае вероятности p_j и a_j считаем нечеткими числами, имеющими треугольный вид, соответственно, (p_j^L, p_j^C, p_j^R) и (a_j^L, a_j^C, a_j^R) . Здесь левые координаты соответствуют наихудшим условиям, средние – средним, правые – наилучшим условиям. Имеем три оптимизационных задачи нелинейного программирования, заключающиеся в максимизации функции (3.2.2) при ограничениях (3.2.4), когда p_j и a_j заданы, соответственно, левыми, средними и правыми координатами.

Каждая такая задача сводится к отысканию максимума функции Лагранжа

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E} + \lambda \phi(\overline{X}), \quad (3.2.5)$$

где $\overline{X} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\phi(\overline{X}) = m - \sum_{j=1}^n x_j. \quad (3.2.6)$$

Так, в случае наилучшего значения p_j и a_j имеем:

$$\mathcal{E}^* = \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j^R}{\sum_{j=1}^n a_j^R} \right) \cdot [1 - (1 - p_j^R)^{x_j}] + \lambda \left(m - \sum_{j=1}^n x_j \right) \quad (3.2.7)$$

(в дальнейшем верхний индекс ставить не будем во избежание громоздкости).

Находим частные производные по $x_j (j = \overline{1, n})$ и λ . Приравняв их к нулю, получим:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{x_j}^* = - \left(\frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \right) (1 - p_j)^{x_j} \cdot \ln(1 - p_j) - \lambda = 0, & j = \overline{1, n}, \\ \mathcal{E}_{\lambda}^* = m - \sum_{j=1}^n x_j = 0. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Решим данную систему. Для этого приравняем все уравнения, начиная с первого, к последнему. Имеем:

$$\begin{cases} a_j(1-p_j)^{x_j} \cdot (-\ln(1-p_j)) = a_n(1-p_n)^{x_n} \cdot (-\ln(1-p_n)), & j = \overline{1, n-1}, \\ m = \sum_{j=1}^n x_j. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_j \ln(1-p_j) + \ln[a_j(-\ln(1-p_j))] = x_n \ln(1-p_n) + \ln[a_n(-\ln(1-p_n))],$$

$$j = \overline{1, n-1}.$$

Тогда

$$x_j = \frac{1}{u_j}(v_n - v_j) + x_n \frac{u_n}{u_j}, \quad (3.2.9)$$

где $j = \overline{1, n-1}$,

$u_j = \ln(1-p_j)$, $u_n = \ln(1-p_n)$, $v_j = \ln[a_j(-\ln(1-p_j))]$, $v_n = \ln[a_n(-\ln(1-p_n))]$;

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_j}(v_n - v_j) + x_n \frac{u_n}{u_j} \right) + x_n = m, \text{ т.е.}$$

$$x_n = [m - \sum_{j=1}^{n-1} (\frac{1}{u_j}(v_n - v_j))] / (u_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{u_j} + 1). \quad (3.2.10)$$

Коэффициент λ находим, например, из первого уравнения системы (3.2.8). Таким образом, из выражений (3.2.9) и (3.2.10) находим решение системы (3.2.8). Точка $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которой вычисляются по формулам (3.2.9), (3.2.10), – стационарная точка.

Вопрос о существовании и характере условного эксперимента решается на основе изучения второго дифференциала функции Лагранжа (3.2.5) для найденной точки P при условии, что dx_i связаны уравнением

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (\sum dx_i^2 \neq 0). \quad (3.2.11)$$

Второй дифференциал для функции Лагранжа (3.2.5) будет иметь вид:

$$d^2 \varepsilon^* = - \sum_{i=1}^n \left(a_i / \sum_{j=1}^n a_j \right) (\ln(1-p_j))^2 (1-p_j)^{x_j} dx_i^2, \quad (3.2.12)$$

при этом $\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx_i = 0$.

Если $d^2 \varepsilon^* < 0$, то ε имеет в точке P условный максимум; если $d^2 \varepsilon^* > 0$, то ε имеет в точке P условный минимум. Как следует из

уравнения (3.2.12), для рассматриваемого случая $d^2 \varepsilon^* < 0$, т.е. в точке P имеется максимум. Следовательно, максимальный эффект достигается, если число x_j средств, связанных с j -й задачей, определяется согласно формулам (3.2.9), (3.2.10). Совершенно так же рассматриваются средний вариант эффективности для p_j^C и a_j^C и наихудший при p_j^L и a_j^L .

Рассмотрим второй случай, когда средства являются разнородными, а задачи – однородными. Тогда x_j – число задач, связанных с j -м средством. Во всех формулах первого случая меняются местами m и n , a_j будет означать важность (эффективность) j -го средства.

Наконец, рассмотрим общий случай, когда средства считаем неоднотипными и задачи – разнородными. Пусть x_{ij} – число средств j -го типа, назначенных на решение i -й задачи ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$); p_{ij} – вероятность выполнения j -й задачи, связанной с i -м средством для наилучшего варианта p_j и a_j . В этом случае средний эффект можно рассмотреть как математическое ожидание числа решенных задач. Поскольку формулы однотипны, не будем указывать, какой из трех вариантов рассматривается.

Заметим, что в общем случае могут выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = N_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = M_j, & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

В этом случае все средства разбиваются на m разнородных групп по N_i средств в группе и задачи разбиваются, соответственно, на n групп по M_j задач в каждой. Таким образом, для данного случая средний эффект будет вычисляться по формуле

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^n b_j^{\Pi} \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \right]. \quad (3.2.14)$$

Решение задачи аналогично рассмотренному выше случаю.

Однако в общем случае получается более сложные и громоздкие формулы. Так, функция Лагранжа с неопределенными множителями λ_i и μ_j запишется в виде

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(N_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \mu_j \left(M_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} \right), \quad (3.2.15)$$

частные производные $\varepsilon_{x_{ij}}^{*}$ будут иметь вид

$$\varepsilon_{x_{ij}}^{*} = -b_j \ln(1 - p_{ij}) \prod_{i=1}^m (1 - p_j)^{x_{ij}} - \lambda_i - \mu_j. \quad (3.2.16)$$

При этом

$$\begin{cases} \varepsilon_{\lambda_i}^{*} = N_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \\ \varepsilon_{\mu_j}^{*} = M_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}. \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Приравняем производные (3.2.16) и (3.2.17) к нулю, перенесем $\lambda_i + \mu_j$ в правую часть и логарифмируем обе части каждого такого уравнения. В результате получим:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \ln(1 - p_{ij}) = \ln[(\lambda_i + \mu_j) / \ln(-b_j \ln(1 - p_{ij}))], \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = N_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = M_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Имеем систему $m \cdot n + n + m$ уравнений с $m \cdot n + n + m$ неизвестными ($m \cdot n$ неизвестных x_{ij} , n неизвестных μ_j и m неизвестных λ_i). Решая эту систему, находим неизвестные величины x_{ij} . Для данной задачи второй дифференциал функции Лагранжа (3.2.16) по переменным x_{ij} запишется в виде

$$d^2 \varepsilon^* = - \sum_{j=1}^n b_j \prod_{i=1}^m (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \ln(1 - p_{ij}) \ln(1 - p_{kj}) \cdot dx_{ij} \cdot dx_{kj}. \quad (3.2.19)$$

Отсюда следует, что в точке P , координаты которой удовлетворяют равенствам (3.2.18), имеется максимум. Аналогичный результат будет для имеющейся информации в виде p_{ij}^C и b_{ij}^C , а также при p_j^{Π} и a_j^{Π} .

§ 3.3. Метод расчета инвестиций в условиях неопределенности

Предложена инновационная технология оценки дисконтированной стоимости.

Известно, что дисконтированная стоимость вычисляется на основе формулы

$$\Pi = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt,$$

где $f(t)$ – функция, характеризующая денежный поток инвестиций, p – процентная ставка. Обычно p рассматривается как конечное число. Однако на самом деле поток инвестиций поступает в условиях неопределенности и p зависит от разных факторов, поэтому более правильно было бы рассматривать p как случайную величину, распределенную, например, либо равномерно, либо по нормальному (усеченному) закону. Дисконтированная стоимость Π является функцией $\Pi(p)$ случайной величины p . Зная закон распределения p , можно найти закон распределения Π и ее числовые характеристики.

Закон распределения p определяется при данном уровне значимости α на основе выборочных данных, например с использованием критерия Пирсона. Для числовых характеристик случайной величины Π определяются точечные и интервальные оценки.

Для примера, но не нарушая общности, рассмотрим случай, когда $f(t) = at + b$, где a и b – постоянные, и случайная величина p имеет усеченное нормальное распределение на участке (c_1, c_2) . Найдем закон распределения $\Pi(p)$. Для этого разложим e^{-pt} в ряд Маклорена, для упрощения выкладок, ограничиваясь первыми тремя членами. Погрешность при этом составит $\frac{(pt)^3}{6} \cdot e^{-\varepsilon}$, где ε заключено между pt и 0.

Вычислим $\Pi(p)$:

$$\begin{aligned} \Pi(p) &= \int_0^T (at + b) \left(1 - pt + \frac{p^2 t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{aT^4}{8} p^2 + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2\right) p + \frac{aT^2}{2} + bT. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Из уравнения

$$\frac{aT^4}{8} p^2 + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2\right) p + \frac{aT^2}{2} + bT - \Pi(p) = 0$$

находится выражение для p через $\Pi(p)$:

$$p = \frac{-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4d_0 d_2}}{2d_0}, \quad (3.3.2)$$

где $d_1 = \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2\right)$; $d_0 = \frac{aT^4}{8}$, $d_2 = \frac{aT^2}{2} + bT - \Pi(p)$.

Найдем $|p'| = \frac{1}{\sqrt{d_1^2 - 4d_0 d_2}}$. Тогда плотность распределения

функции $\Pi = \Pi(p)$ запишется в виде

$$f(\Pi) = \frac{1}{(c_2 - c_1)\sigma_p \sqrt{2\pi d_1^2 - 8\pi d_0 d_2}} \cdot \left(e^{\frac{-(2d_0 m_p + d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_0 d_2})^2}{8d_0^2 \sigma_p^2}} + e^{\frac{-(2d_0 m_p + d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_0 d_2})^2}{8d_0^2 \sigma_p^2}} \right). \quad (3.3.3)$$

Разложим данную функцию в ряд Маклорена, ограничиваясь, не нарушая общности, двумя членами:

$$f(\Pi) = \frac{1}{(c_2 - c_1)\sigma_p \sqrt{2\pi d_1^2 - 8\pi d_0 d_2}} \cdot \left(2 - \frac{(2d_0 m_p + d_1)^2 - d_1^2 + 4d_0 d_2}{4d_0^2 \sigma_p^2} \right). \quad (3.3.4)$$

Пусть

$$u_1 = -(2d_0 m_p + d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_0 d_2})^2;$$

$$u_2 = -(2d_0 m_p + d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_0 d_2})^2,$$

тогда погрешность составит $\frac{u_1^2}{2} e^{-\varepsilon_1} + \frac{u_2^2}{2} e^{-\varepsilon_2}$, где ε_1 находится между u_1 и 0, а ε_2 – между u_2 и 0.

На основе формулы (3.3.4) можно найти вероятность попадания Π на участок (α, β) :

$$P(\alpha < \Pi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Pi) d\Pi. \quad (3.3.5)$$

Из формулы (3.3.1) определяются числовые характеристики случайной величины Π :

$$M[\Pi] = \frac{aT^4}{8} (m_p^2 + D_p) + \left(\frac{b-2a}{6} T^3 - \frac{b}{2} T^2 \right) m_p + \frac{aT^2}{2} + bT, \quad (3.3.6)$$

$$D[\Pi] = D[ap^2 + bp] = aD[p^2] + b^2 D[p] + 2K[p^2, p].$$

Упростим последнее выражение, для этого вычислим:

$$a^2 D[p^2] = a^2 D^2[p] + 2a^2 \cdot m_p^2 D[p],$$

$K[p^2, p]$ – момент корреляции между p^2 и p , причем

$$K[p^2, p] = M[(p^2 - m_{p^2})(p - m_p)] = M[(p^2 - m_p^2 - D_p)(p - m_p)] =$$

$$= M[p^3 - p^2 \cdot m_p - m_p^2 \cdot p + m_p^3 - D_p \cdot p + D_p \cdot m_p] =$$

$$= M[p^3] - M[p^2] \cdot m_p - m_p^3 + m_p^3 - D_p \cdot m_p + D_p \cdot m_p = M[p^3] - m_p^3 - m_p D_p$$

и $M[p^3]$ – начальный момент.

Таким образом,

$$D[\Pi] = a^2 D^2[p] + 2a^2 \cdot m_p^2 D[p] + 2M[p^3] - 2m_p^3 - 2m_p D_p. \quad (3.3.7)$$

Итак, формулы (3.3.4)–(3.3.7) позволяют определять с заданной степенью точности плотность распределения дисконтированной стоимости, вероятность ее попадания на данный участок, а также среднее значение и разброс в зависимости от соответствующих характеристик процентной ставки.

§ 3.4. Математическая модель диверсификации

3.4.1. Анализ математической модели диверсификации портфеля в учебном процессе

Проблема внедрения в учебный процесс новых цифровых технологий – одна из важнейших в современной системе образования. В рамках данной проблемы актуальной задачей является разработка новых подходов к оценке качества обучения с учетом возможности обработки больших массивов данных. Это позволяет говорить о портфелях учебных дисциплин, часов [17], формировании индивидуальных траекторий обучения, психологических портретах [20]. Задача диверсификации учебных часов предполагает распределение их по дисциплинам таким образом, чтобы эффективность обучения (доходность портфеля) была максимальной, а риск неуспеваемости материала (риск портфеля) стремился к минимуму. Это возможно при правильном выборе учебных дисциплин и распределении часов между ними для обеспечения заданного уровня формирования компетенций. Вопрос диверсификации занимает центральное место в экономических исследованиях.

Цель данного параграфа состоит в разработке математической модели диверсификации портфеля учебных часов.

Изложим данную задачу применительно к модели Марковица.

Рассмотрим ситуацию, когда студенческая группа в данном учебном году изучает n учебных дисциплин. Пусть: $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор учебных часов, отводимых непосредственно на данные дисциплины. Сюда входят и часы самостоятельной работы обучаемых. Общее количество часов a определяется основной образовательной программой (ООП)

специальности, при этом $\sum_{i=1}^n a_i = a$. Стоимостью портфеля будем называть

общую сумму оценок всех составляющих его дисциплин. Обозначим эту

стоимость через W ($W = \sum_{i=1}^n w_i$, где w_i – важность i -й дисциплины согласно

экспертному оцениванию).

Тогда

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \cdot a_i. \quad (3.4.1)$$

Каждая координата вектора является случайной величиной, поэтому риск портфеля

$$R = \sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}, \quad (3.4.2)$$

где ρ_{ij} - коэффициент линейной корреляции между i -й и j -й дисциплинами по формируемым компетенциям ($i \neq j$); D_i - дисперсия портфеля по i -й дисциплине.

Величину $\frac{W(\Delta t) - C}{C} = d_p(\Delta t)$ назовем доходностью портфеля за промежуток времени Δ (C - общая стоимость портфеля). Величину $d_i(\Delta t) = \frac{X(\Delta t) - C_i}{C_i}$ будем считать доходностью i -й дисциплины. Обозначим через $\lambda_i = C_i / C$ количество долей общей стоимости портфеля, приходящейся на i -ю дисциплину.

Задача формирования оптимального портфеля (нахождения минимального риска портфеля при заданном уровне его доходности) заключается в следующем. Требуется найти вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, который обеспечивает минимум целевой функции

$$R = \sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \rightarrow \min \quad (3.4.3)$$

при заданном уровне ограничений $W \geq W_{зад} \sum_{i=1}^n a_i = a$.

Эта задача условной оптимизации обычно решается методом неопределенных множителей Лагранжа.

Для определения степени влияния на риск доходностей, составляющих и уровня коррелированности дисциплин можно использовать аппарат эластичности функций [18]. Для определения эластичностей следует найти частные производные по всем независимым переменным:

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 2 \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}; \quad \frac{\partial R}{\partial D_i} = \frac{a_i}{\sqrt{D_i}} \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \cdot \sqrt{D_j};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_{ij}} = 2 a_i a_j \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}, \quad (i \neq j).$$

Находим частные эластичности риска портфеля:

$$E_{a_i}(R) = \frac{2 \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \cdot a_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}} = \frac{2a_i}{\sum_{i=1}^n a_i};$$

$$E_{D_i}(R) = \frac{\frac{a_i}{\sqrt{D_i}} \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \cdot \sqrt{D_j} \cdot D_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}} = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_{ij}} = \frac{2a_i \cdot a_j \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \cdot a_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}} = \frac{2a_i a_j}{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (3.4.4)$$

Последняя формула в выражении (3.4.4) является математической моделью диверсификации учебных часов (учебного плана). Коэффициент эластичности показывает отклик результативного признака на изменение факторного признака. Из выражения (3.4.4) следует, что при выполнении условия $\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} < 0$ (т.е. $\rho_{ij} < 0$) коэффициент эластичности $\frac{\partial R}{\partial \rho_{ij}} < 0$.

Риск портфеля будет уменьшаться при отрицательной коррелированности дисциплин. При этом доходность одних составляющих уменьшается, а других – увеличивается. Это основа всех методов диверсификации. При некоррелированности части составляющих ($\rho_{ij} = 0$) знаменатель формулы (3.4.4) уменьшается и эластичность становится больше. При полной независимости составляющих портфель полностью не зависит от степени их коррелированности.

Отрицательная корреляция дисциплин может обеспечить доходность портфеля выше доходностей отдельных составляющих. Поэтому риск может оказаться меньше риска составляющих.

О коррелированности составляющих портфеля в ряде случаев можно судить по значению определителя корреляционной матрицы. Полная коррелированность составляющих делает его равным нулю, полная независимость – единице. Близость его значения к нулю свидетельствует о близкой к линейной зависимости между составляющими. В этом случае нельзя проверить гипотезу, при каком именно значении определителя можно считать коррелированность существенной. Если значение $|\rho_{ij}|$ хотя бы одного из коэффициентов корреляции близко к единице и имеется большое количество составляющих портфеля, то это показывает наличие сильной зависимости. Следует иметь в виду, что близость к единице

коэффициентов корреляции не является необходимым условием наличия сильной линейной корреляции.

Без правильной диверсификации составляющих с учетом их взаимной корреляции невозможно сформировать эффективный портфель учебных часов и рационально составлять учебные планы. Оценка уровня диверсификации может служить дополнительным инструментом выбора подходящей структуры портфеля или способствовать ее улучшению.

Разработанная в данном параграфе модель может применяться не только при организации учебного процесса, но и для решения ряда экономических задач.

3.4.2. Анализ математической модели диверсификации портфеля инвестиций

Проблема анализа и управления инвестиционным процессом является одной из важнейших в цифровой экономике. В качестве актуальной задачи следует отметить разработку новых методов формирования портфеля инвестиций с учетом возможности обработки нечеткой, например, экспертной информации. Задача диверсификации инвестиций заключается в распределении их по активам таким образом, чтобы доходность портфеля стремилась к максимуму, а его риск – к минимуму. Для этого необходимы правильный выбор активов и оптимизация распределения средств по ним.

В ряде работ, например [10, 71], показаны методы решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля для нечетких значений доходности. Задача диверсификации портфеля рассматривается в научной литературе для случая четкой полной информации об активах [83].

В данном параграфе показана разработка математической модели диверсификации инвестиционного портфеля в условиях нечеткой информации.

Рассмотрим эту задачу применительно к модели инвестиций Марковица. Пусть имеется n видов активов, причем $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор денежных средств, вкладываемых в данные активы. Общее количество средств a определяется финансовыми возможностями

инвестора, при этом $\sum_{i=1}^n a_i = a$, т.е. все средства инвестиционного фонда

распределяются по n видам активов. Тогда $x_i = a_i / a$ – доля средств, вкладываемых в i -й актив. Доходностью портфеля W будем называть общую доходность всех его составляющих. В качестве показателя доходности актива может выступать его привлекательность (например, в баллах, процентах, рейтингах и т.д.), выставленная согласно экспертному оцениванию. Доходность актива зависит от вложенных в него средств, т.е. для i -го актива она равна $w_i a$. Тогда

$$W = \sum_{i=1}^n w_i a_i. \quad (3.4.5)$$

Для расчета доходности можно использовать приведенные значения

$$W_{np} = W / a = \sum_{i=1}^n w_i (a_i / a) = \sum_{i=1}^n w_i x_i, \quad (3.4.6)$$

где a_i / a - часть общей стоимости портфеля, приходящаяся на i -й актив.

Можно рассматривать относительное изменение общей доходности портфеля на интервале Δt :

$$d(\Delta t) = \frac{W(\Delta t) - a}{a}. \quad (3.4.7)$$

Тогда $d_i(\Delta t) = \frac{w_i(\Delta t) - a_i}{a_i}$ будет изменением доходности i -го порт-

феля на интервале Δt .

Будущая доходность актива неизвестна, а ее вероятностное описание не всегда корректно. Поэтому для задания доходности используют нечеткие числа. Среди нечетких чисел наиболее часто применяются треугольные, т.е. числа вида $w_i = (w_i^1, \bar{w}_i, w_i^2)$, где w_i^1 - нижняя граница (пессимистическая оценка будущей доходности); \bar{w}_i - среднее значение (наиболее ожидаемая доходность); w_i^2 - верхняя граница (оптимистическая оценка). Поскольку $\bar{w}_i = (w_i^1 + w_i^2) / 2$, то при задании w_i среднее значение \bar{w}_i можно опускать.

Тогда нечеткая доходность инвестиционного портфеля составит

$$\tilde{W} = \left(\sum_i^n w_i^1 a_i; \sum_i^n w_i^2 a_i \right), \quad (3.4.8)$$

Величина вложенных средств в каждый вид актива является случайной величиной, поэтому можно рассчитать риск портфеля:

$$R = \left(\sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}; \sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \right), \quad (3.4.9)$$

где ρ_{ij} - коэффициент линейной корреляции между активами i и j , причем $i \neq j$; D_i - дисперсия i -го актива.

Нахождение вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, минимизирующего риск инвестиционного портфеля R_{\min} при заданной доходности, математически формулируется в виде:

$$R = \sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \rightarrow \min, \quad (3.4.10)$$

$$\tilde{W} \geq W_{зад}, \quad \sum_{i=1}^n a_i = a. \quad (3.4.11)$$

Выражения (3.4.10), (3.4.11) формализуют задачу оптимизации, которая решается методом неопределенных множителей Лагранжа.

Определим с помощью теории эластичности функций влияние на риск составляющих портфеля, их дисперсий и степени коррелированности (факторных признаков). Имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 2 \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}; \quad \frac{\partial R}{\partial D_i} = \frac{a_i}{\sqrt{D_i}} \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \cdot \sqrt{D_j};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_{ij}} = 2 a_i a_j \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}, \quad (i \neq j, i, j = \overline{1, n}).$$

Тогда частные эластичности риска портфеля по факторным признакам a_i , D_i , ρ_{ij} будут равны:

$$E_{a_i}(R) = \frac{2 \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \cdot a_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}} = \frac{2 a_i}{\sum_{i=1}^n a_i};$$

$$E_{D_i}(R) = \frac{\frac{a_i}{\sqrt{D_i}} \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \cdot \sqrt{D_j} \cdot D_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}} = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i};$$

$$E_{\rho_{ij}}(R) = \frac{2 a_i \cdot a_j \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \cdot a_i}{\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}} = \frac{2 a_i a_j}{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij}} \quad (i \neq j, i, j = \overline{1, n}). \quad (3.4.12)$$

Выражение для $E_{\rho_{ij}}(R)$ является математической моделью диверсификации портфеля активов. При $\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j \rho_{ij} < 0$, т.е. когда $\rho_{ij} < 0$, коэффициент эластичности $\frac{\partial R}{\partial \rho_{ij}} < 0$. Риск портфеля уменьшается при отрицательной коррелированности (хеджировании) активов. В этом случае риск может оказаться меньше риска активов. При $\rho_{ij} = 0$ доходность портфеля возрастает, а при независимости активов портфель не зависит от их коррелированности (по портфельной теории этот случай является лучшим выбором активов).

Рассмотрим зависимость риска от дисперсии и коррелированности активов на следующем примере. Пусть $n = 2$, $a_1 = a_2$, $D_1 = D_2 = D$, ρ – корреляция активов. Построим график зависимости $R(\rho, D)$ при изменении D от 0 до 1, а ρ от -1 до 1 (рис. 3.1).

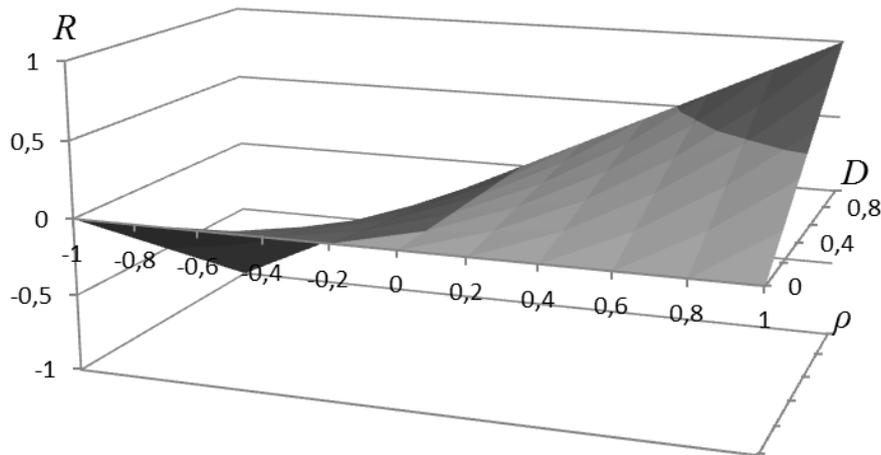


Рис. 3.1

Из рис. 3.1 видно, что риск портфеля существенно зависит от дисперсии и коррелированности активов. Однако предположение о вероятностном характере риска портфеля инвестиций не всегда является оправданным. На риск портфеля оказывают влияние факторы неопределенности. Поэтому для модели диверсификации целесообразно использовать нечеткий риск. Если использовать для риска, как для доходности, треугольные нечеткие числа $(a_i = (a_i^1, \bar{a}_i, a_i^2))$, то нечеткий риск определяется как

$$R = \left(\sum_i^n \sum_j^n a_i^1 a_j^1 \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j}; \sum_i^n \sum_j^n a_i^1 a_j^1 \rho_{ij} \sqrt{D_i} \cdot \sqrt{D_j} \right). \quad (3.4.13)$$

Для дисперсии и корреляционной матрицы в этом случае следует использовать метод оценки ковариаций нечетко-случайных величин [97]. Для ковариации $Cov(a_i, a_j)$ предлагается следующая оценка:

$$Cov(a_i, a_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n 0,5 \cdot [a_i^1 + a_i^2 - \bar{a}_i] \cdot 0,5 \cdot [a_j^1 + a_j^2 - a_j].$$

Разработанная в данной статье модель диверсификации может использоваться при формировании инвестиционных портфелей.

§ 3.5. Динамические модели планирования инвестиций

Динамические модели планирования финансов предполагают возможность анализа результатов вложения инвестиций в различные по продолжительности рисковые проекты с помощью методов линейного программирования.

В качестве показателей эффективности рассматривают, например, прибыль проекта (задача максимизации) или первоначальный объем

инвестиций, а также риск проекта (задача минимизации). Ограничениями задачи могут быть балансовые соотношения, требования к структуре инвестиций, рискам, срокам погашения инвестиций и т.д.

В динамических моделях осуществляется пошаговое (поэтапное) распределение инвестиций. Данные задачи имеют крайне большое значение в современной экономической науке. Основы построения моделей динамического планирования инвестиций разработаны в источниках [31, 47, 57]. Рассмотрим две модели многоэтапного распределения инвестиций: распределение инвестиций для покупки нового оборудования и вложение инвестиций в проекты.

3.5.1. Покупка нового оборудования

Предприятию необходимо закупить новое оборудование стоимостью 780 тыс. ден. ед. Для этого оно берет кредит на данную сумму, заключая контракт. По условиям контракта аванс, который необходимо уплатить через два месяца, составляет 130 тыс. ден. ед. Остальную сумму следует заплатить через шесть месяцев. Для выплаты кредита в заданные сроки администрация предприятия намерена создать целевой фонд для инвестиций в проекты. Индексы риска реализации каждого из проектов оцениваются экспертами по десятибалльной шкале.

Предприятие может выбрать три проекта: А, В, С, которые, исходя из длительности инвестиционных проектов, позволяют выделить десять вариантов использования целевого фонда (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Варианты использования целевого фонда

Направления использования инвестиций	Месяцы возможных реализаций инвестиционных проектов	Продолжительность инвестиционного проекта, месяцы	Процент по кредиту	Индекс риска
А	1, 2, 3, 5, 6	1	1,2	1
В	1, 3, 5	2	3,2	4
С	1, 4	3	5,8	8

Заданы следующие требования:

1) на основе данных по инвестированию и графику выплат разработать оптимальную стратегию, минимизирующую затраты целевого фонда на закупку оборудования;

2) в оптимальной стратегии средний индекс риска инвестиционных фондов в течение каждого месяца не должен превышать 7 баллов;

3) в начале каждого месяца после того, как сделаны новые инвестиции, средняя задолженность по продолжительности погашения инвестиционных фондов не должна превышать 2,6 месяца.

На основе перечисленных исходных данных требуется определить наиболее эффективный проект. При этом проекты повышенной рискованности должны компенсироваться менее рискованными, а продолжительные проекты – выполняться одновременно с более краткосрочными.

Введем обозначения:

A_i – инвестиции в проект A в начале месяца i ($i = 1, 2, 3, 5, 6$);

B_i – инвестиции в проект B в начале месяца i ($i = 1, 3, 5$);

C_i – инвестиции в проект C в начале месяца i ($i = 1, 4$);

K – объем инвестиций в начале первого месяца; $K \rightarrow \min$.

Сведем исходные данные инвестирования в табл. 3.2:

Таблица 3.2. Распределение инвестиций

Инвестиции	Возможные вложения и возврат денежных средств на начало каждого месяца						
	Порядковый № месяца						
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
A в 1-й месяц	1 →	1,012					
A во 2-й месяц		1 →	1,012				
A в 3-й месяц			1 →	1,012			
A в 5-й месяц					1 →	1,012	
A в 6-й месяц						1 →	1,012
B в 1-й месяц	1 →		1,032				
B в 3-й месяц			1 →		1,032		
B в 5-й месяц					1 →		1,032
C в 1-й месяц	1 →			1,052			
C в 4-й месяц				1 →			1,052

Исходя из заданных условий задачи, для каждого месяца можно записать следующие балансовые ограничения на структуру инвестиций:

- 1) $K - A_1 - B_1 - C_1 = 0$ и $K = A_1 + B_1 + C_1$;
- 2) $1,012 \cdot A_1 - A_2 = 0$;
- 3) $1,012 \cdot A_2 + 1,032 \cdot B_1 - A_3 - B_3 = 130$ тыс. ден.ед.;
- 4) $1,012 \cdot A_3 + 1,058 \cdot C_1 - C_4 = 0$;
- 5) $1,032 \cdot B_3 - B_5 - A_5 = 0$;
- 6) $1,012 \cdot A_5 - A_6 = 0$;
- 7) $1,012 \cdot A_6 + 1,032 \cdot B_5 + 1,058 \cdot C_4 = 780 - 130 = 650$.

Ограничения на средневзвешенные риски проекта для каждого месяца записываются следующим образом:

$$\frac{1A_1 + 4B_1 + 8C_1}{A_1 + B_1 + C_1} \leq 7; \quad \frac{1A_2 + 4B_1 + 8C_1}{A_2 + B_1 + C_1} \leq 7; \quad \frac{A_3 + 4B_3 + 8C_1}{A_3 + B_3 + C_1} \leq 7; \quad \frac{4B_3 + 8C_4}{B_3 + C_4} \leq 7;$$

$$\frac{A_5 + 4B_5 + 8C_4}{A_5 + B_5 + C_4} \leq 7; \quad \frac{A_6 + 4B_5 + 8C_4}{A_6 + B_5 + C_4} \leq 7.$$

Из этих ограничений получаются следующие соотношения:

- 8) $-6A_1 - 3B_1 + C_1 \leq 0$;
- 9) $-6A_2 - 3B_1 + C_1 \leq 0$;
- 10) $-6A_3 - 3B_3 + C_1 \leq 0$;
- 11) $3B_5 + C_4 \leq 0$;
- 12) $-6A_5 - 3B_5 + C_4 \leq 0$;
- 13) $-6A_6 - 3B_5 + C_4 \leq 0$.

Ограничения в каждом месяце по среднему сроку погашения инвестиционного фонда составляют:

$$\frac{A_1 + 2B_1 + 3C_1}{A_1 + B_1 + C_1} \leq 2,6; \quad \frac{A_2 + B_1 + 2C_1}{A_2 + B_1 + C_1} \leq 2,6; \quad \frac{A_3 + 2B_3 + C_1}{A_3 + B_3 + C_1} \leq 2,6; \quad \frac{B_3 + 3C_4}{B_3 + C_4} \leq 2,6;$$

$$\frac{A_5 + 2B_5 + 2C_4}{A_5 + B_5 + C_4} \leq 2,6; \quad \frac{A_6 + B_5 + C_4}{A_6 + B_5 + C_4} \leq 2,6.$$

Отсюда:

- 14) $-1,6A_1 - 0,6B_1 + 0,4C_1 \leq 0$;
- 15) $-1,6A_2 - 1,6B_1 - 0,6C_1 \leq 0$;
- 16) $-1,6A_3 - 0,6B_3 - 1,6C_1 \leq 0$;
- 17) $-1,6B_3 + 0,4C_4 \leq 0$;
- 18) $-1,6A_5 - 0,6B_5 - 0,6C_4 \leq 0$;
- 19) $-1,6A_6 - 1,6B_5 - 1,6C_4 \leq 0$.

15), 16), 18), 19) – можно не включать, так как всегда выполняется условие

$$K, A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, B_1, B_3, B_5, C_1, C_4 \geq 0.$$

Таким образом, получили систему четырнадцати линейных неравенств с десятью переменными. Имеем задачу линейного программирования, заключающуюся в минимизации целевой функции K в рамках указанных неравенств.

Задача решается MS Excel с помощью средства «Поиск решения».

Оптимальное решение имеет вид:

$$K = 474\,389 \text{ тыс. ден. ед.}; A_1 = 0; A_2 = 0; A_3 = 0; A_4 = 0; A_6 = 0;$$

$$B_1 = 212\,643 \text{ тыс. ден. ед.}; B_3 = 894\,47 \text{ тыс. ден. ед.};$$

$$B_5 = 923\,09 \text{ тыс. ден. ед.}; C_1 = 261\,747 \text{ тыс. ден. ед.};$$

$$C_4 = 276\,928 \text{ тыс. ден. ед.}$$

Вывод: полученное оптимальное решение обеспечивает уплату в срок 130 тыс. ден. ед. и позволяет вместо 780 тыс. ден. ед. направить на оплату оборудования 474,389 тыс. ден. ед.

3.5.2. Вложение инвестиций в проекты

Пусть имеется четыре проекта, в которые могут быть вложены инвестиции. В табл. 3.3 сведены данные по эффективности инвестиционных проектов на одну вкладываемую денежную единицу.

Таблица 3.3. Эффективность проектов на одну денежную единицу

Варианты вложений	Проект			
	A	B	C	D
1	-1	0	-1	-1
2	0,3	-1	1	0
3	1	0,3	0	0
4	0	1	0	1,5
5	0	1,5	0	1,75

Денежные средства, полученные в результате инвестиций, можно реинвестировать в соответствии с таблицей. Например, одна денежная единица инвестиций в первый год по проекту A к началу второго года даст прибыль в 0,3 ден. ед., а к началу третьего года может быть дополнительно получена еще 1 ден. ед. Компания может получить по 6,5 % годовых за краткосрочный вклад всех денег, которые не были инвестированы в данном году. У предприятия имеется 1 млн ден. ед. Известно, что в проект A в первый год не может быть вложено больше 500 ден. ед. Найдем максимальный доход, полученный к конечному периоду, и определим соответствующие инвестиции в проекты.

Обозначим:

a_i, b_i, c_i, d_i – инвестиции, вложенные в проекты A, B, C, D в i -й год ($i = 1, 2, 3, 4$); s_1, s_2, s_3, s_4 – суммы, которые можно вложить под 6,5 % в первый, второй, третий, четвертый год.

Считаем, что компания в первый год реализует имеющуюся у нее сумму в 1 млн ден. ед. в проекты *A*, *C* и *D* под 6,5 %. Аналогичный баланс имеет место и в последующие годы с учетом данных таблицы. В связи с этим получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 &1) a_1 \leq 500; \quad 2) a_1 + c_1 + d_1 + s_1 = 1\,000; \\
 &3) 0,3 \cdot a_1 + c_1 + 1,065 \cdot s_1 = b_2 + s_2; \quad 4) a_1 + 0,3 \cdot b_2 + 1,065 \cdot s_2 = s_3; \\
 &5) b_2 + 1,5d_1 + 1,065s_3 = s_4; \quad ,5b_2 + 1,75 \cdot d_1 + 1,065 \cdot s_4 \rightarrow \max; \\
 & \quad \quad \quad a_1, \dots, d_4, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Вывод: максимальный доход к конечному периоду равен 3 млн 337 тыс. 500 ден. ед., т.е. прирост составляет 79,76 %, при этом $d_1 = 1\,000$ тыс. ден. ед.; $s_4 = 1\,500$ тыс. ден. ед.

Таким образом, рассмотрены две модели динамического планирования денежных инвестиций в экономике.

Модели динамического планирования инвестиций могут применяться для решения многих задач социально-производственной сферы, таких как динамическое распространение (инвестирование) знаний обучаемым в учебном процессе; многоэтапный раскрой материалов; динамическое моделирование сборки изделий и загрузки оборудования;; многоэтапный процесс изготовления питательных смесей.

§ 3.6. Системный анализ логистического процесса

Для исследования социально-экономических систем одним из наиболее эффективных методов является системный анализ. Он позволяет комплексно рассматривать проблему. Многие экономические явления и процессы были описаны и исследованы с помощью данного общенаучного метода. Однако, по нашему мнению, применение метода системного анализа к логистическим процессам в современной научной литературе не нашло должного отражения. В работах [48, 54, 60] для проведения системного анализа использованы теоретико-множественные модели. Представляет интерес применение для решения рассматриваемой проблемы других математических методов.

Целью работы является системный анализ логистического процесса с помощью методов теории массового обслуживания.

Для осуществления данной цели необходимо решить задачи:

- 1) представления логистического процесса как сложной системы;
- 2) разработки графа состояний и переходов системы;
- 3) составления уравнений Колмогорова.

Логистический экономический процесс – это организованная во времени и пространстве последовательность операций, обеспечивающих движение материальных, информационных и финансовых ресурсов на предприятии или в организации. Логистика считается одной из важнейших подсистем производственного предприятия [130].

Логистический процесс имеет много составляющих. Одним из основных понятий в логистике является понятие материального потока. Рассмотрим пример материального потока на складе продукции (рис. 3.2).

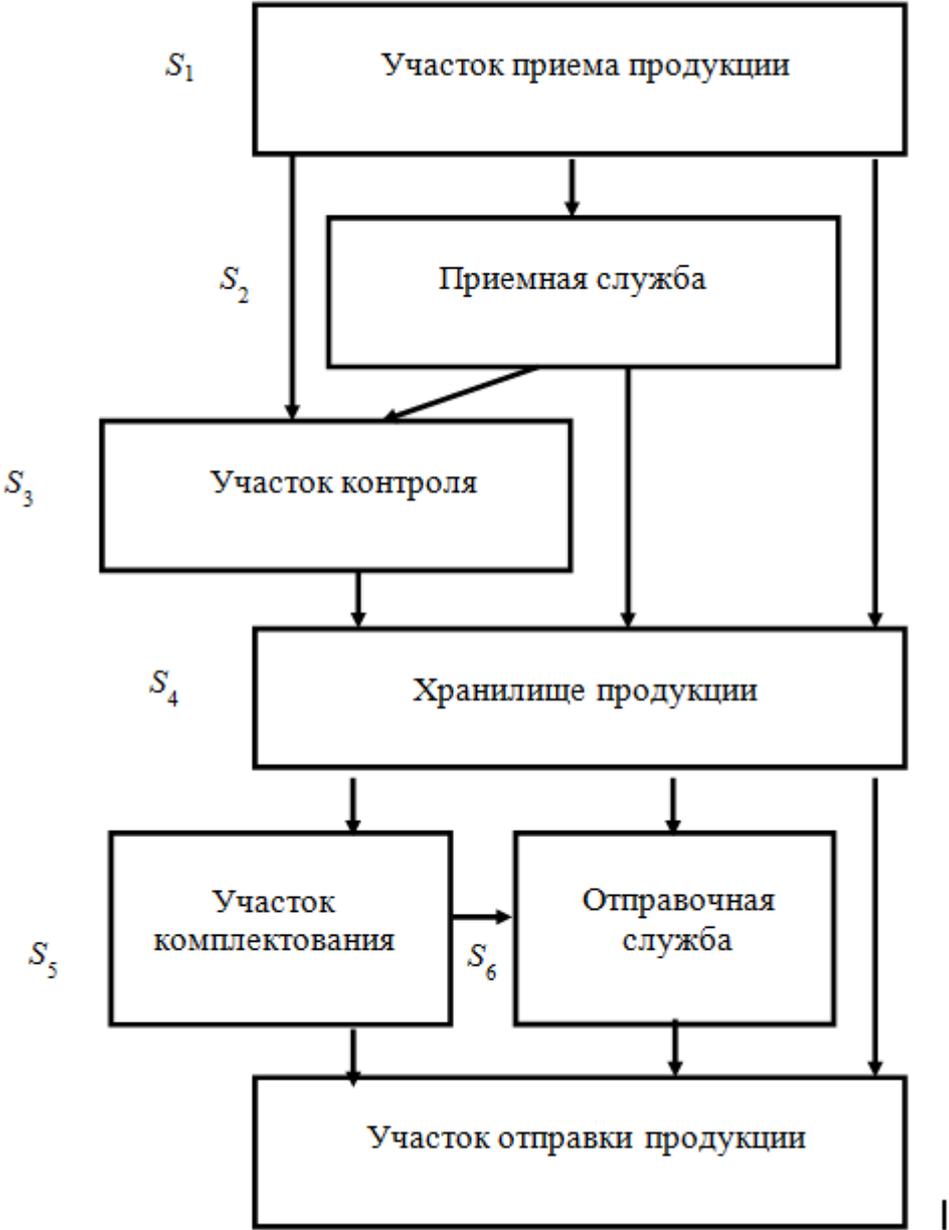


Рис. 3.2

На данной схеме показана сложная система, состоящая из соединенных между собой отдельных звеньев, связанных с этапами реализации материального потока. На схеме S_i ($i = \overline{1,9}$) - этапы движения материального потока, которые представляют собой состояния рассматриваемой системы. При переходе от состояния S_1 к S_2 возможны два основных варианта: продукция либо принята, либо нет.

С точки зрения вероятности, эти варианты представляют собой некоторые события, поэтому рассматриваются с определенными вероятностями, которые будут определены ниже.

Рассмотрим сначала первый случай.

Приближенно будем считать, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием пуассоновского потока продукции с интенсивностью $\lambda_{ij} = \frac{1}{t_{ij}}$, где t_{ij} - продолжительность этапа S_i (до перехода к этапу S_j). Пуассоновский поток характеризуется тем, что за малый промежуток времени поступает не более одной единицы потока, а на непересекающиеся участки времени единицы потока поступают независимо.

Для упрощения выкладок будем рассматривать простейший пуассоновский поток, когда плотности постоянны. Такую логистическую систему будем называть пуассоновской.

Граф переходов из состояния в состояние показан на рис. 3.3.

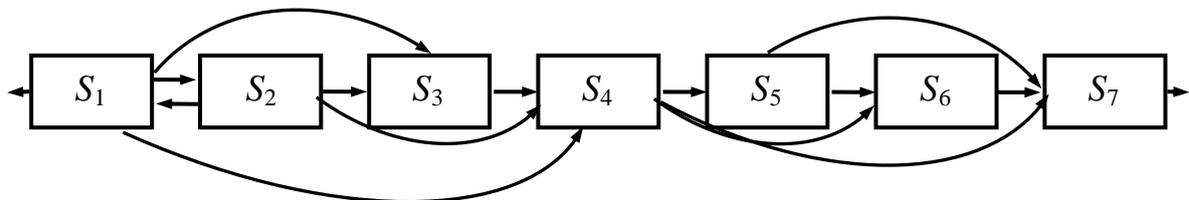


Рис. 3.3

Для данного графа запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова, обозначив через $P_i(t)$ вероятность нахождения системы на этапе S_i ($i = \overline{1,7}$). Пусть λ_{ij} ($i = \overline{1,6}, j = \overline{1,7}$) - плотности потока заявок при переходе от S_i к S_j . Если продукция принята, то при выходе из системы плотность равна λ_7 ; λ_1 - плотность потока непринятой продукции. Имеем:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) - \lambda_{14}P_1(t) - \lambda_1P_1(t), \\ P_2'(t) = \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{23}P_2(t) - \lambda_{24}P_2(t), \\ P_3'(t) = \lambda_{23}P_2(t) + \lambda_{13}P_1(t) - \lambda_{34}P_3(t) \\ P_4'(t) = \lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{24}P_2(t) - \lambda_{45}P_4(t) - \lambda_{46}P_4(t) - \lambda_{47}P_4(t) + \lambda_{14}P_1(t), \\ P_5'(t) = \lambda_{45}P_4(t) - \lambda_{56}P_5(t) - \lambda_{57}P_5(t), \\ P_6'(t) = \lambda_{46}P_4(t) + \lambda_{56}P_5(t) - \lambda_{67}P_6(t), \\ P_7'(t) = \lambda_{47}P_4(t) + \lambda_{57}P_5(t) + \lambda_{67}P_6(t) - \lambda_7P_7, \end{cases} \quad (3.6.1)$$

при этом $\sum_{i=1}^7 P_i(t) = 1$.

В установившемся режиме данная система представляет собой однородную систему алгебраических уравнений: левая часть системы превращается в нулевую, все вероятности $P_i(t)$ становятся постоянными. Полученная система решается обычными методами решения систем линейных уравнений. Вероятности P_i будут означать долю времени нахождения системы в состоянии S_i ($i = \overline{1,7}$).

Запишем решение данной системы, выраженное через P_1 , сначала для P_2 :

$$P_2 = P_1(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + \lambda_1) / \lambda_{21}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение.

Получаем связь между некоторыми плотностями, а именно:

$$\lambda_{12} \cdot \lambda_{21} = (\lambda_{24} + \lambda_{23}) \cdot (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + \lambda_1)$$

или

$$\lambda_{12} = \frac{(\lambda_{24} + \lambda_{23})(\lambda_{13} + \lambda_{14} + \lambda_1)}{\lambda_{21} - \lambda_{24} - \lambda_{23}},$$

т.е. $\lambda_{21} > \lambda_{24} + \lambda_{23}$. Следовательно, для существования пуассоновской логистической системы при наличии забракованной продукции необходимым и достаточным является условие, когда плотность потока забракованной продукции больше суммарной плотности продукции, поступающей на участок контроля и в хранилище. Поэтому для функционирования пуассоновской системы необходимо исключить этап S_2 – участок приемной службы, так как в данной системе он является лишним. Его функции может выполнять участок контроля. Тогда из S_3 идет переход на S_1 с плотностью λ_{31} . Получаем:

$$\begin{cases} P_3 = \lambda_{13}P_1 / (\lambda_{34} + \lambda_{31}), \\ P_4 = (\lambda_{34}P_3 + \lambda_{14}P_1) / (\lambda_{45} + \lambda_{46} + \lambda_{47}), \\ P_5 = \lambda_{45}P_4 / (\lambda_{56} + \lambda_{57}), \\ P_6 = (\lambda_{46}P_4 + \lambda_{56}P_5) / \lambda_{67}, \\ P_7 = (\lambda_{47}P_4 + \lambda_{57}P_5 + \lambda_{67}P_6) / \lambda_7. \end{cases} \quad (3.6.2)$$

Поскольку $\sum_{i=1, (i \neq 2)}^7 P_i(t) = 1$, то, подставив в это равенство выражения

для P_i из (3.6.2), находим P_1 , через которое выражаются все остальные вероятности.

Во втором случае, если продукция сразу не бракуется, то система будет рассматриваться в общем режиме работы, т.е. не переходим к однородной системе (так как первое уравнение не будет иметь смысла) и либо решаем систему (3.6.1) как систему дифференциальных уравнений, либо рассматриваем переходы от этапа к этапу в дискретном варианте, используя не интенсивности потоков, а переходные вероятности. Далее несколько раз используется формула полной вероятности. В результате происходит оценка вероятности нахождения системы на каждом этапе движения материального потока и определяется соответствующее время пребывания.

Заметим, что изображенный на рис. 3.3 граф в случае, когда продукция не бракуется, является информационным графом и сетью. Поэтому при анализе материального потока можно использовать соответствующий аппарат теории графов, в том числе методику планирования работ.

Таким образом, в статье разработаны следующие этапы системного анализа логистического процесса:

- 1) логистический процесс рассмотрен как сложная система;
- 2) граф состояний и переходов системы представлен в виде схемы;
- 3) записана система дифференциальных уравнений Колмогорова и показано ее решение;
- 4) рассмотрен метод нахождения и устранения лишних элементов логистической системы.

ГЛАВА 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ И ПРОТИБОБОРСТВА ИНДИВИДУУМОВ В ГРУППАХ

§ 4.1. Модель динамического взаимодействия индивидуумов в группах

Актуальность исследования обусловлена сложностью и важностью проблемы учета динамического взаимодействия индивидуумов в группах (учебных, производственных коллективах, социальных сетях).

Достаточно часто возникают такие ситуации, когда индивидуумов, осуществляющих совместную деятельность в рамках коллектива, можно разделить на группы по определенным признакам классификации. Представители групп оказывают влияние друг на друга, в результате чего происходит переход индивидуумов в другие группы. Примерами формирования подобных групп являются классификация обучаемых по успеваемости [15], респондентов – по типу личности [25, 36, 78], рабочих – по уровню квалификации. Для описания такого процесса строятся модели динамического влияния на основе систем дифференциальных уравнений. Примером подобных математических моделей служат динамические модели информационного управления в социальных сетях, взаимодействия в социальных системах [64]. Аналогичная проблема взаимодействия существует в многоагентных системах [66, 84]. В современных работах, посвященных данной проблеме, недостаточное внимание, на наш взгляд, уделяется вопросам аналитического решения систем дифференциальных уравнений моделей (используется имитационное моделирование).

В данном параграфе показана динамическая модель учета взаимного влияния индивидуумов в социально-экономических системах или интеллектуальных агентов в многоагентных системах.

Разработана новая математическая модель изменения численного состава групп на основе системы дифференциальных уравнений. Получено решение данной системы в общем виде и для важных частных случаев. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы конкретными числовыми примерами. Для наглядности построены графики в MS Excel. Полученные результаты имеют практическую ценность, так как могут найти применение не только в социально-экономической сфере, но и в многочисленных приложениях систем искусственного интеллекта.

Решены следующие задачи:

- 1) разработана новая модель динамики взаимовлияния индивидуумов в группах;
- 2) получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений модели;
- 3) для построенной модели изучена зависимость решения от входных данных.

Рассмотрим постановку задачи.

Пусть имеется N индивидуумов (респондентов, агентов), которые делятся на две группы с численностью x , y . Индивидуумы могут переходить из группы в группу (один раз на интервале наблюдения). Введем коэффициенты влияния α_{12} – представителей первой группы на представителей второй, α_{21} – представителей второй группы на первую. Смысл коэффициентов влияния будет раскрыт позже. Каждая группа своим влиянием вынуждает респондентов другой группы обрести такой же тип, как и у нее. Успех влияния зависит от величины коэффициентов влияния, от начальной и меняющейся со временем численностей представителей каждой из групп.

Изменение численности групп можно описать системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x\alpha_{21} + (N-x)\alpha_{12}, \\ \frac{dy}{dt} = (N-x)\alpha_{21} - y\alpha_{12} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = -x(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + N\alpha_{12}, \\ y' = -y(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + N\alpha_{21}. \end{cases}$$

Пусть $x \leq N\alpha_{12}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$ и $y \leq N\alpha_{21}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$. Тогда

$$\begin{cases} x = \frac{N\alpha_{12} - e^{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})(t+c_1)}}{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})}, \\ y = \frac{N\alpha_{21} - e^{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})(t+c_2)}}{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})}, \end{cases}$$

при этом

$$c_1 = \frac{\ln(N\alpha_{12} - (\alpha_{12} + \alpha_{21})x(0))}{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})},$$

$$c_2 = \frac{\ln(N\alpha_{21} - (\alpha_{12} + \alpha_{21})y(0))}{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})}.$$

Аналогично рассматриваются случаи, когда $y \leq N\alpha_{21}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$, $x \leq N\alpha_{12}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$ и $y > N\alpha_{21}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$, $x > N\alpha_{12}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$ и $y > N\alpha_{21}/(\alpha_{12} + \alpha_{21})$.

Остановимся на смысле коэффициентов влияния. Воспользуемся основным тождеством:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - r(t)}{x(t)\Delta t} x(t) + \frac{(x(t + \Delta t) - r(t))}{(N - x(t))\Delta t} (N - x(t)),$$

где $r(t)$ – количество индивидуумов первой группы, сохранивших свой тип за время Δt ; $\frac{x(t) - r(t)}{x(t)}$ – доля индивидуумов первой группы, перешедших за время Δt во вторую группу; $\frac{x(t + \Delta t) - r(t)}{x(t)\Delta t}$ – доля индивидуумов второй группы, перешедших за время Δt в первую группу.

Из определения производной и свойства предела следует, что с точностью до бесконечно малой $O(\Delta t)$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -x(t) \cdot \alpha_{21} + (N - x(t)) \cdot \alpha_{12}.$$

Отсюда с учетом приведенного тождества имеем:

$$\alpha_{21} = \frac{x(t + \Delta t) - r(t)}{x(t)\Delta t};$$

$$\alpha_{12} = \frac{(x(t + \Delta t) - r(t))}{(N - x(t))\Delta t}.$$

Следовательно, α_{21} характеризует долю индивидуумов первой группы, перешедших за единицу времени во вторую группу, α_{12} характеризует долю индивидуумов второй группы, перешедших за единицу времени в первую группу,

Рассмотрим теперь модель взаимодействия индивидуумов в трех группах.

Пусть имеется N индивидуумов (респондентов, агентов), которые образуют три группы с численностью x , y , z . Респонденты могут переходить из группы в группу (один раз на интервале наблюдения). Обозначим через α_{12} , α_{13} коэффициенты влияния представителей группы первого типа на представителей второго и третьего типов соответственно; через α_{21} , α_{23} – коэффициенты влияния респондентов второго типа на респондентов первого и третьего типов соответственно; через α_{31} , α_{32} – коэффициенты влияния представителей третьего типа на представителей

первого и второго типов соответственно. Успех влияния зависит от величины данных коэффициентов, от начальной и меняющейся со временем численностей представителей каждой из групп.

Изменение численного состава групп описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(\alpha_{21} + \alpha_{31}) + y\alpha_{12} + (N - x - y)\alpha_{13}, \\ \frac{dy}{dt} = x\alpha_{21} - y(\alpha_{12} + \alpha_{32}) + (N - x - y)\alpha_{23} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x' = -x(\alpha_{21} + \alpha_{31} + \alpha_{13}) + y(\alpha_{12} - \alpha_{13}) + N\alpha_{13}, \\ y' = x(\alpha_{21} - \alpha_{23}) - y(\alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{23}) + N\alpha_{23}, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

при этом все $\alpha_{ij} > 0$.

Сначала решим однородную систему без постоянных слагаемых. Корни характеристического уравнения будут:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \gamma},$$

где $\beta = \alpha_{21} + \alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{23}$;

$\gamma = \alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{12} + \alpha_{31}\alpha_{32} + \alpha_{31}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{23}$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$.

Собственные векторы: $(\delta_1, 1)$ и $(\delta_2, 1)$,

где $\delta_1 = \frac{\alpha_{13} + \lambda_1 - 2\alpha_{12} - \alpha_{32} - \alpha_{23}}{\alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{23} - \lambda_1}$, $\delta_2 = \frac{\alpha_{13} + \lambda_2 - 2\alpha_{12} - \alpha_{32} - \alpha_{23}}{\alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{23} - \lambda_2}$.

Общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x = c_1\delta_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\delta_2 e^{-\lambda_2 t}, \\ y = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Общее решение системы (4.1.1):

$$\begin{cases} x = c_1\delta_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\delta_2 e^{-\lambda_2 t} - \frac{N\alpha_{23}}{\nu} (2\alpha_{21} - \alpha_{13} - \alpha_{32} + \alpha_{23}), \\ y = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} - \frac{N\alpha_{23}}{\nu} (2\alpha_{21} + \alpha_{31} + \alpha_{13} - \alpha_{23}), \end{cases} \quad (4.1.2)$$

где

$\nu = -\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{21} - 4\alpha_{21}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{31}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{12} - \alpha_{13}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{12}$.

Третье слагаемое в системе (4.1.2) соответствует частным решениям. При этом

$$z = N - c_1 e^{-\lambda_1 t} (1 + \delta_1) - c_2 e^{-\lambda_2 t} (1 + \delta_2) + \frac{N\alpha_{23}}{\nu} (4\alpha_{21} + \alpha_{31} - +\alpha_{32}).$$

Пусть теперь $\frac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$. В этом случае $\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm i \cdot \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}$.

Собственные векторы будут иметь вид: $(\nu_1 + i\nu_2, 1)$ и $(\omega_1 + i\omega_2, 1)$, где $\nu_1, \nu_2, \omega_1, \omega_2$ получаются соответственно из δ_1 и δ_2 для комплексных λ_1 и λ_2 . Во избежание громоздкости выписывать эти выражения в явном виде не будем. Положим $\sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}} = u$. Общее решение системы (4.1.1) для рассматриваемого случая запишется в виде:

$$\begin{cases} x = e^{\frac{\beta}{2}t} [\cos u(c_1\nu_1 + c_1i\nu_2 + c_2\omega_1 + c_2i\omega_2) + \sin u(c_1i\nu_1 - c_1\nu_2 - c_2i\omega_1 + c_2\omega_2)] + y_{c_1}, \\ y = e^{\frac{\beta}{2}t} [\cos u(c_1 + c_2) - i \sin u(c_1 + c_2i\omega_1 + c_2\omega_2)] + y_{c_2}, \end{cases}$$

где y_{c_1} и y_{c_2} – частные решения, получаемые из (4.1.2).

Наконец, для третьего случая, когда $\gamma - \frac{\beta^2}{4} = 0$, общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = \delta_1 e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t) + y_{c_1}, \\ y = e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t) + y_{c_2}. \\ z = N - x - y. \end{cases}$$

Рассмотрим важные частные случаи разработанной математической модели.

Пусть в системе (4.1.1) все α_{ij} равны между собой и равны α . В этом случае (4.1.1) имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -3\alpha x + N\alpha, \\ y' = -3\alpha y + N\alpha. \end{cases}$$

Пусть выполняются соотношения $x \leq N/3$ и $y \leq N/3$, тогда решение системы (4.1.1) имеет вид:

$$\begin{cases} x = \frac{N\alpha - e^{-3\alpha(t+c_1)}}{3\alpha}, \\ y = \frac{N\alpha - e^{-3\alpha(t+c_2)}}{3\alpha}. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

$$\text{Отсюда } z = \frac{N\alpha + e^{-3\alpha(t+c_1)} + e^{-3\alpha(t+c_2)}}{3\alpha}.$$

$$\text{При этом } c_1 = \frac{\ln(-3\alpha x(0) + N\alpha)}{-3\alpha}, \quad c_2 = \frac{\ln(-3\alpha y(0) + N\alpha)}{-3\alpha}.$$

Для пояснения полученного решения рассмотрим следующий пример. Исследуется взаимное влияние студентов трех групп классификации (например: легко обучаемые; среднеобучаемые и труднообучаемые). В результате совместного изучения учебного предмета продолжительностью 36 академических часов ($t \in \overline{0,36}$) численности исходных групп изменяются. Пусть общее число студентов $N = 40$, начальные численности групп: $x(0) = 12$, $y(0) = 10$, $z(0) = 18$. Коэффициент взаимного влияния $\alpha = 0,005$.

Графики зависимостей численностей групп x , y , z от времени t показаны на рис. 4.1.

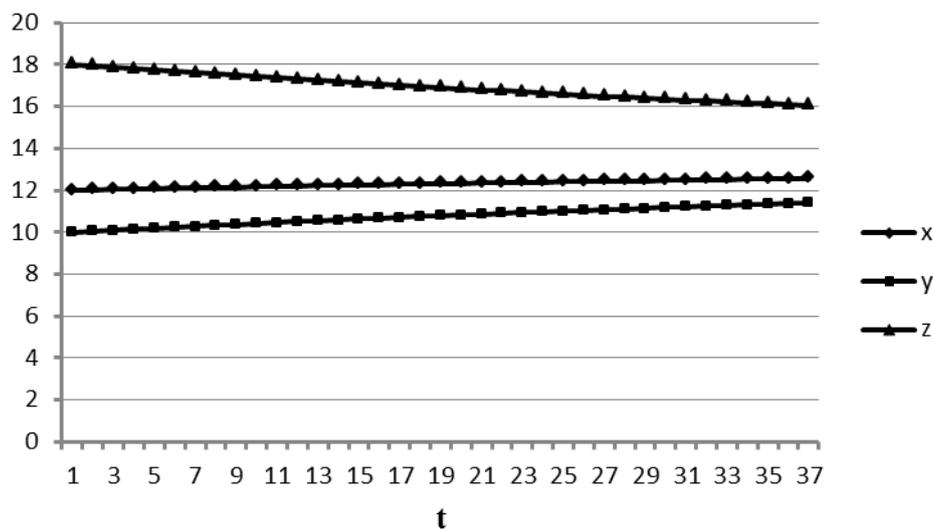


Рис. 4.1

Случаи $x > N/3$ и $y \leq N/3$; $x \leq N/3$ и $y > N/3$; $x > N/3$ и $y > N/3$ показаны соответственно на рис. 4.2, 4.3. Расчеты и построение графиков выполнялись в MS Excel.

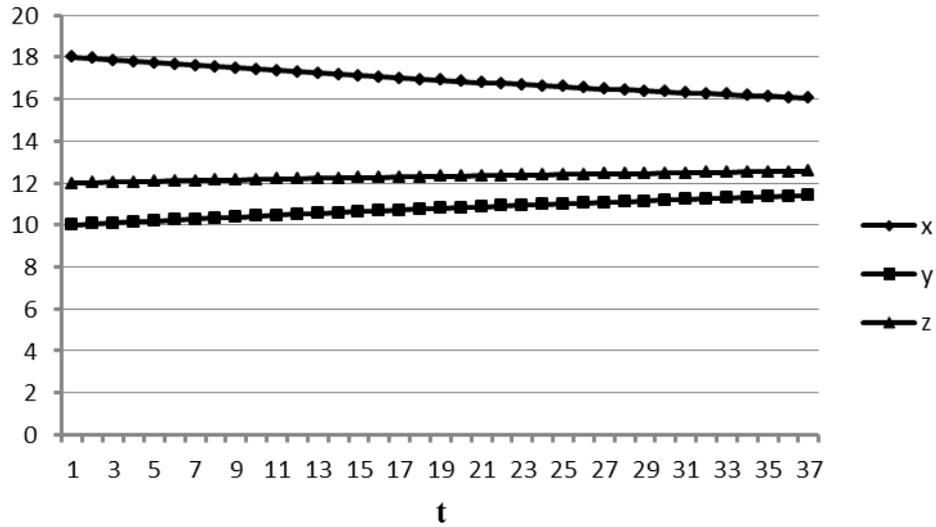


Рис. 4.2

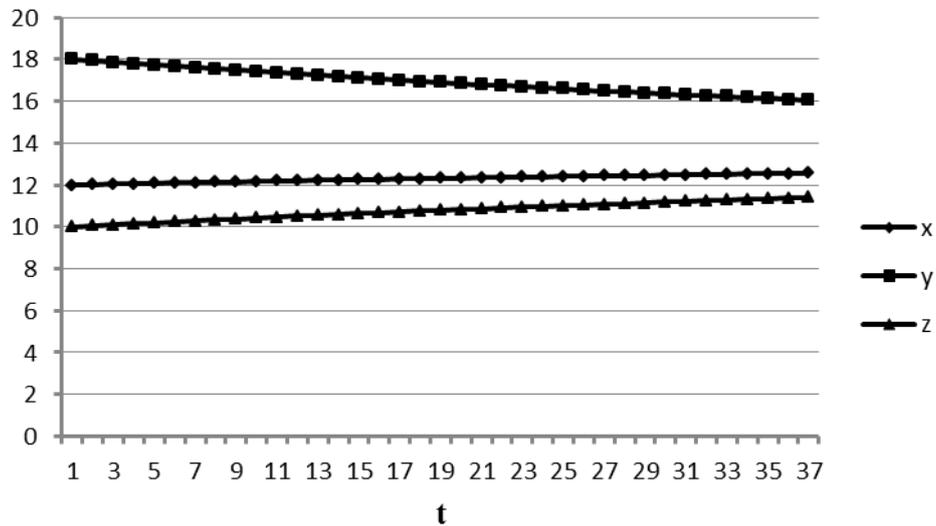


Рис. 4.3

Если нет ограничений общей численности, но при этом все α_{ij} равны между собой и равны α , то имеем систему:

$$\begin{cases} x' = -2\alpha x + \alpha y + \alpha z, \\ y' = \alpha x - 2\alpha y + \alpha z, \\ z' = \alpha x + \alpha y - 2\alpha z, \end{cases}$$

корни характеристического уравнения которой будут: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 3\alpha$.

В этом случае $y = z$ и

$$\begin{cases} x = c_1 + 4c_2 e^{3\alpha t} - 2c_3 e^{-3\alpha t}, \\ y = c_1 + c_2 e^{3\alpha t} + 2c_3 e^{-3\alpha t}. \end{cases}$$

Так, при $x(0) = 12$, $y(0) = z(0) = 18$ находим $c_1 = 20 - 2c_3$, $c_2 = c_3 - 2$. При $c_3 = 1$ имеем: $c_1 = 18$, $c_2 = -1$. Отсюда

$$\begin{cases} x = 18 - 4e^{3\alpha t} - 2e^{-3\alpha t}, \\ y = z = 18 - e^{3\alpha t} + e^{-3\alpha t}. \end{cases}$$

Если рассматривать две группы с численностью x и y соответственно, то имеем систему

$$\begin{cases} x' = -x\alpha_{21} + y\alpha_{12}, \\ y' = x\alpha_{21} - y\alpha_{12}. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Характеристическое уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -\alpha_{21} - \alpha_{12}$. Общее решение системы (4.1.4) запишется в виде:

$$\begin{cases} x = c_1 \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} - c_2 e^{-(\alpha_{21} + \alpha_{12})t}, \\ y = c_1 + c_2 e^{-(\alpha_{21} + \alpha_{12})t}. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Если, например, при $t = 0$, $x = 10$ и $y = 20$, то из условий (4.1.4) находим:

$$c_1 = \frac{30\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}, \quad c_2 = \frac{20\alpha_{12} - 10\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = \frac{30\alpha_{12}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} - \frac{20\alpha_{12} - 10\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} e^{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})t}, \\ y = \frac{30\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} + \frac{20\alpha_{12} - 10\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} e^{-(\alpha_{12} + \alpha_{21})t}. \end{cases}$$

Итак, рассмотрено математическое моделирование взаимодействия индивидуумов в двух и трех группах. Совершенно аналогично рассматривается эта проблема для большего количества групп.

Практическая значимость полученных результатов заключается прежде всего в том, что разработанная динамическая модель может быть использована при исследовании социально-экономических процессов методами математического моделирования (в частности, для анализа и прогнозирования изменения успеваемости обучаемых, согласования позиций при обмене мнениями на форумах в интернет-сообществах). Модель позволит более эффективно управлять поведением интеллектуальных агентов.

§ 4.2. Моделирование конфликтных ситуаций

Данный параграф посвящен системному представлению двухсторонних конфликтных ситуаций для общего случая зависимости эффективности воздействия сторон от времени и от количества противоборствующих единиц. Построена дифференциальная модель системы двух неравенств. Предложен метод ее решения с использованием рекуррентных формул для средних численностей сторон. Произведена оценка основных характеристик системы и условий превосходства одной стороны над другой в зависимости от времени.

4.2.1. Методы анализа конфликтных ситуаций

В настоящее время интеллектуальные и информационные системы широко внедряются в различные области жизни общества, в том числе в военное обеспечение страны. В этой сфере большая роль отводится математическому моделированию. Одна из актуальных задач заключается в построении модели конфликтной ситуации, которая наиболее точно описывает развитие противоборства сторон во времени с учетом индивидуальных особенностей представителей каждой стороны, в частности, быстроты и точности реакции, выраженной в эффективности поражения цели.

Для описания конфликтных ситуаций в литературе используются различные модели: Ланчестера, размножения, Лотки – Вольтерры, Осипова и др. [12, 68, 118]. В статье [80] рассмотрен дискретный аналог модели Ланчестера, решение сводится к отысканию оптимального управляющего воздействия третьей стороны. Автором [93] предложена вероятностная модель «плохо организованного боя» (когда не имеется информации о поражении единиц противника), построенная с использованием теории марковских процессов, рассмотрен вопрос о сходимости вероятностных моделей к модели динамики средних. В работе [34] предложены оптимальные стратегии управления на основе динамического программирования и теории дифференциальных игр. При этом эффективности сторон, определяемые через плотности пуассоновских потоков действия единицы каждой стороны и соответствующие вероятности достижения целей, являются постоянными, так как не зависят от времени и одинаковыми для всех единиц данной стороны. Кроме того, коэффициент превосходства рассматривается как постоянная величина, не зависящая от времени.

Однако реальные ситуации таковы, что эффективности зависят от времени и различны для разных представителей (единиц) данной стороны,

коэффициент превосходства также в общем случае зависит от времени. Поэтому предлагаемые модели являются в достаточной степени приближенными. В самом деле, если речь идет, например, о боевых действиях, то эффективность данной единицы зависит от расположения (удаленности) единиц противника, превосходство в общем случае изменяется.

В статье [34] показано системное представление процесса усвоения учебного материала в виде противоборства правильно и неправильно понятых фрагментов дисциплины. При этом изложен общий случай, когда эффективности зависят от времени и единиц противоборства.

Новизна изложенного в данном параграфе материала заключается в следующем. Эффективность единиц рассматривается в самом общем виде, т.е. зависит от времени и от единиц каждой стороны. Такая общность приводит к замене уравнений Ланчестера неравенствами, определяемыми для данного момента времени по рекуррентной формуле с любой точностью. Неравенства решать не требуется, достаточно использовать рекуррентную формулу для вычисления левой и правой частей неравенства. Рекуррентная формула легко программируется, хотя несложно решается и вручную. При малом интервале времени Δt имеется возможность практически непрерывно наблюдать изменение средних численностей и оценивать в динамике превосходство одной или другой стороны.

Цель данного параграфа заключается в разработке математической модели системного описания противоборства двух сторон для общего случая зависимости эффективности от времени и от противоборствующих единиц, а также зависимости коэффициента превосходства от времени. Для этого решаются задачи:

- 1) построения размеченного графа состояний противоборствующих сторон и составление системы дифференциальных неравенств описания средних численностей сторон;
- 2) разработки метода получения рекуррентной формулы для средних численностей сторон;
- 3) оценки основных характеристик системы: необходимой начальной численности, времени, коэффициента превосходства.

4.2.2. Постановка задачи. Построение размеченных графов состояний противоборствующих сторон

Рассмотрим противоборство двух сторон, I и II. Пусть у стороны I в начальный момент времени имеется N_1 единиц, у стороны II - N_2 единиц. Единицы каждой стороны однородны между собой.

Пусть поток воздействий единицы i стороны I является пуассоновским с плотностью $\lambda_i^{(1)}(t) (i = \overline{1, N_1})$, поток воздействий единицы j стороны II также является пуассоновским с плотностью $\lambda_j^{(2)}(t) (j = \overline{1, N_2})$. Потоки успешных выстрелов, заканчивающихся поражением единицы противника, также будут пуассоновскими с плотностями $\alpha_{ij}^{(1)}(t) = \lambda_{ij}^{(1)}(t) \cdot p_{ij}^{(1)}(t)$ и $\alpha_{ij}^{(2)}(t) = \lambda_{ij}^{(2)}(t) \cdot p_{ij}^{(2)}(t)$ соответственно, где $p_{ij}^{(1)}(t)$ - вероятность поражения единицей i стороны I единицы j стороны II; $p_{ij}^{(2)}(t)$ - вероятность поражения единицей j стороны II единицы i стороны I. Величины $\alpha_{ij}^{(1)}(t)$ и $\alpha_{ij}^{(2)}(t)$ будем называть эффективностями единиц сторон, соответственно I и II.

Будем считать, что на любую единицу одной стороны может оказывать воздействие любая единица другой стороны и любая единица может находиться в одном из двух состояний: поражена, не поражена.

Поражение цели понимается широко. Например, в учебном процессе неправильно понятый фрагмент превращается в правильно понятый; при выборах на каждого избирателя воздействует агитационный поток, под влиянием которого избиратель может поменять свое мнение. В первом случае цель – это фрагмент учебного материала. Поражение цели означает переход от неправильно понятого фрагмента к правильному и наоборот. Во втором случае цель – это голос избирателя, который под воздействием агитации может быть потерян либо приобретен.

Считаем также, что временем, затрачиваемым на одно воздействие, можно пренебречь по сравнению с длительностью рассматриваемого процесса. Это позволяет считать, что процесс конфликтной ситуации является марковским.

Пусть в случае поражения единицы воздействие мгновенно переносится на другую, непораженную единицу.

Согласно методу Ланчестера, сторону I будем рассматривать как систему, которая в любой момент времени t может находиться в одном из возможных состояний $E_k^{(1)}$, где k – число непораженных единиц стороны I на момент времени t ($k = N_1, N_1 - 1, N_1 - 2, \dots, 1, 0$) (рис. 4.4).

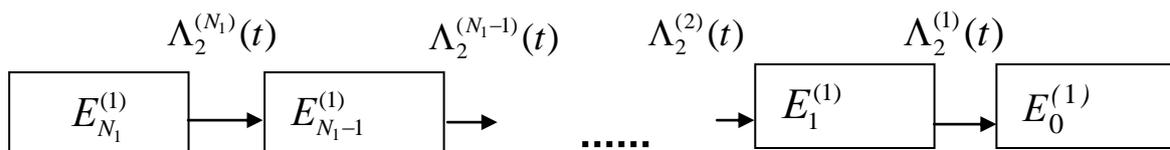


Рис. 4.4. Состояния системы стороны I

Обозначим через $P_k^{(1)}(t)$ вероятность нахождения стороны I в момент t в состоянии $E_k^{(1)}$ ($k = N_1, N_1 - 1, N_1 - 2, \dots, 1, 0$), $\Lambda_2^{(N_1-k)}(t)$ – плотности потока, переводящего систему из состояния $E_{N_1-k}^{(1)}$ в состояние $E_{N_1-k-1}^{(1)}$.

Аналогичным графом можно представить состояния стороны II.

4.2.3. Определение плотностей переводящих потоков и эффективности единиц

Сторона I переходит из одного состояния в другое в результате того, что сторона II за малый промежуток времени Δt на рубеже $E_{N_1-k}^{(1)}$ производит одно успешное воздействие (ординарность потока) с вероятностью $1 - e^{-\Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \cdot \Delta t}$. С точностью до членов первого порядка по Δt эта вероятность равна $\Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \cdot \Delta t$, т.е.

$$1 - e^{-\Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \cdot \Delta t} = \Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \cdot \Delta t. \quad (4.2.1)$$

Вероятность того, что единица j стороны II за время Δt не осуществит ни одного успешного воздействия, равна $e^{-\alpha_j^{(2)}(t) \Delta t}$. Эта вероятность с точностью до членов первого порядка по Δt составляет $1 - \alpha_j^{(2)}(t) \Delta t$.

Допустим, что в момент времени t у стороны II имеется l непораженных единиц. Тогда вероятность того, что ни одна из этих единиц не осуществит ни одного успешного воздействия, равна

$$\prod_{s=1}^l (1 - \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t) \Delta t) = 1 - \sum_{s=1}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t) \Delta t \quad (4.2.2)$$

с точностью до членов первого порядка по Δt .

Пусть $\alpha_{\max}^{(2)}(t) = \max_{1 \leq i \leq N_1} \max_{1 \leq j \leq N_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t)$, $\alpha_{\min}^{(2)}(t) = \min_{1 \leq i \leq N_1} \min_{1 \leq j \leq N_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t)$ на временном промежутке $[t_1, t_2]$. Тогда правая часть формулы (4.2.2) не меньше, чем $1 - l \alpha_{\max}^{(2)}(t) \Delta t$, и не больше, чем $1 - l \alpha_{\min}^{(2)}(t) \Delta t$.

В любой момент времени t сторона II может находиться в любом состоянии $E_{N_2-l}^{(2)}$ с вероятностью $P_l^{(2)}(t)$. Поэтому вероятность того, что за Δt со стороны II не будет осуществлено успешных воздействий, будет не больше, чем

$$P_{\max}^{(2)}(t) = \sum_{l=1}^{N_2} P_l^{(2)}(t) \cdot [1 - l \alpha_{\min}^{(2)}(t) \Delta t], \quad (4.2.3)$$

и не меньше, чем $P_{\min}^{(2)}(t)$, которая получается из (4.2.3) заменой $\alpha_{\max}^{(2)}(t)$ на $\alpha_{\min}^{(2)}(t)$.

Тогда вероятность того, что за Δt сторона II осуществит одно успешное воздействие, будет не больше, чем

$$1 - P_{\min}^{(2)}(t) = 1 - \sum_{l=0}^{N_2} P_l^{(2)}(t) + \alpha_{\max}^{(2)}(t) \Delta t \cdot \sum_{l=0}^{N_2} l \cdot P_l^{(2)}(t), \quad (4.2.4)$$

и не меньше, чем $1 - P_{\max}^{(2)}(t)$.

В формуле (4.2.4) суммирование по l начинается с нуля, поскольку если начальные численности сторон N_1 и N_2 достаточно велики, то можно предположить, что в момент времени t у обеих сторон количество боевых единиц составляет более нуля. Поэтому $P_1^{(1)} = 0$, $P_0^{(2)} = 0$. Обозначим через $m_2(t)$ математическое ожидание $\sum_{l=0}^{N_2} l \cdot P_l^{(2)}(t)$ числа не пораженных к моменту t единиц стороны II.

Обратим внимание, что $\sum_{l=0}^{N_2} P_l^{(2)}(t) = 1$. С учетом этого выражение (4.2.4) преобразуется к виду

$$1 - P_{\min}^{(2)}(t) = \alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot \Delta t \cdot m_2(t). \quad (4.2.5)$$

Аналогично $1 - P_{\max}^{(2)}(t) = \alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot \Delta t \cdot m_2(t)$.

Из равенств (4.2.1) и (4.2.5) получаем:

$$\alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \leq \Lambda_2^{(N_1-k)}(t) \leq \alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \quad (4.2.6)$$

для $k = \overline{0, N_1 - 1}$.

4.2.4. Дифференциальная модель средних численностей сторон

Для графа, изображенного на рис. 4.1, запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{dP_{N_1}^{(1)}(t)}{dt} = -\Lambda_2^{(N_1)}(t) \cdot P_{N_1}^{(1)}(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dP_k^{(1)}(t)}{dt} = -\Lambda_2^{(k)}(t) \cdot (P_{k+1}^{(1)}(t) + P_k^{(1)}(t)), \quad k = \overline{1, N_1 - 1}, \\ \frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt} = \Lambda_2^{(1)}(t) \cdot P_1^{(1)}(t), \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Умножим первое уравнение данной системы на N_1 , второе на $N_1 - 1$ и т.д., последнее - на нуль и сложим соответственно левые и правые части полученных после умножения уравнений.

Тогда левая часть суммарного уравнения будет представлять собой производную: $\left[\sum_{k=0}^{N_1} kP_k^{(1)}(t) \right]_t$ математического ожидания $\sum_{k=0}^{N_1} kP_k^{(1)}(t)$ числа не пораженных к моменту t единиц стороны I, которое обозначим через $m_1(t)$.

Правая часть суммарного уравнения будет иметь вид

$$-\Lambda_2^{(N_1)}(t) \cdot N_1 \cdot P_{N_1}^{(1)}(t) - \Lambda_2^{(N_1-1)}(t) \cdot (N_1 - 1) \cdot P_{N_1-1}^{(1)}(t) + \Lambda_2^{(N_1)}(t) \cdot (N_1 - 1) \cdot P_{N_1}^{(1)}(t) + \dots - \Lambda_2^{(1)}(t) \cdot P_1^{(1)} + \Lambda_2^{(2)}(t) \cdot P_2^{(1)} + 0 \cdot \Lambda_2^{(1)}(t) \cdot P_1^{(1)}. \quad (4.2.8)$$

Пусть $\Lambda_{\min}^{(2)}(t) = \min_{1 \leq k \leq N_1} \Lambda_2^{(k)}(t)$, $\Lambda_{\max}^{(2)}(t) = \max_{1 \leq k \leq N_1} \Lambda_2^{(k)}(t)$.

Тогда значение (4.2.8) будет не больше, чем

$$-\Lambda_{\min}^{(2)} \cdot [P_{N_1}^{(1)} + P_{N_1-1}^{(1)} + \dots + P_1^{(1)}] = -\Lambda_{\min}^{(2)} \cdot [1 - P_0^{(1)}] = -\Lambda_{\min}^{(2)}.$$

Отсюда получаем, что формула (4.2.8) ограничена сверху выражением $-\Lambda_{\min}^{(2)}(t)$, а снизу – выражением $-\Lambda_{\max}^{(2)}(t)$.

Аналогичные неравенства получаются для стороны II, т.е.

$$-\Lambda_{\max}^{(2)}(t) \leq m_1'(t) \leq -\Lambda_{\min}^{(2)}(t), \quad (4.2.9)$$

$$-\Lambda_{\max}^{(1)}(t) \leq m_2'(t) \leq -\Lambda_{\min}^{(1)}(t). \quad (4.2.10)$$

С учетом ограничений (4.2.6) неравенства (4.2.9) и (4.2.10) запишутся соответственно в виде:

$$\begin{cases} -\alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \leq m_1'(t) \leq -\alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot m_2(t), \\ -\alpha_{\max}^{(1)}(t) \cdot m_1(t) \leq m_2'(t) \leq -\alpha_{\min}^{(1)}(t) \cdot m_1(t). \end{cases}$$

4.2.5. Метод оценки средних численностей сторон.

Рекуррентная формула

Из определения производной следует, что

$$m_1'(t) = \frac{m_1(t + \Delta t) - m_1(t)}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

$$m_2'(t) = \frac{m_2(t + \Delta t) - m_2(t)}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с Δt .

Тогда с точностью $\varepsilon = o(\Delta t)$ (например, $\varepsilon = \Delta t^2$) при малом Δt имеем:

$$\begin{cases} m_1(t) - \alpha_{\max}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \cdot \Delta t \leq m_1(t + \Delta t) \leq m_1(t) - \alpha_{\min}^{(2)}(t) \cdot m_2(t) \cdot \Delta t, \\ m_2(t) - \alpha_{\max}^{(1)}(t) \cdot m_1(t) \cdot \Delta t \leq m_2(t + \Delta t) \leq m_2(t) - \alpha_{\min}^{(1)}(t) \cdot m_1(t) \cdot \Delta t. \end{cases}$$

Пусть $t = 0$, тогда

$$\begin{cases} N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t \leq m_1(\Delta t) \leq N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t; \\ N_2 - \alpha_{\max}^{(1)}(0) \cdot N_1 \cdot \Delta t \leq m_2(\Delta t) \leq N_2 - \alpha_{\min}^{(1)}(0) \cdot N_1 \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Отсюда для $t = \Delta t$ получаем:

$$\begin{cases} N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_2 \cdot \Delta t - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot (N_2 - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \leq \\ \leq m_1(2\Delta t) \leq N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_2 \cdot \Delta t - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot (N_2 - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t; \\ N_2 - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot (N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \leq m_2(2\Delta t) \leq \\ \leq N_2 - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot N_1 \cdot \Delta t - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot (N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot N_2 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Этот процесс можно продолжить, для произвольного натурального k имеем рекуррентную формулу. Обозначим правые части неравенств (4.2.11) соответственно через $m_1^{\Pi}(\Delta t)$, $m_2^{\Pi}(\Delta t)$. Аналогично для левых частей этих неравенств будем использовать обозначения: $m_1^{\text{I}}(\Delta t)$, $m_2^{\text{I}}(\Delta t)$.

Тогда система (4.2.12) запишется в виде:

$$\begin{cases} m_1^{\text{I}}(\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t \leq m_1(2\Delta t) \leq \\ \leq m_1^{\Pi}(\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\text{I}}(\Delta t) \cdot \Delta t; \\ m_2^{\text{I}}(\Delta t) - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t \leq m_2(2\Delta t) \leq \\ \leq m_2^{\Pi}(\Delta t) - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) \cdot m_1^{\text{I}}(\Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Для времени $t = k \cdot \Delta t$ будем иметь:

$$\begin{cases} m_1^{\text{I}}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)}(\Delta t) m_2^{\Pi}((k-1)\Delta t) \Delta t \leq m_1(k\Delta t) \leq \\ \leq m_1^{\Pi}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) m_2^{\text{I}}((k-1)\Delta t) \Delta t; \\ m_2^{\text{I}}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\max}^{(1)}(\Delta t) m_1^{\Pi}((k-1)\Delta t) \Delta t \leq m_2(2\Delta t) \leq \\ \leq m_2^{\Pi}((k-1)\Delta t) - \alpha_{\min}^{(1)}(\Delta t) m_1^{\text{I}}((k-1)\Delta t) \Delta t. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Правые части неравенств (4.2.14) будем обозначать соответственно через $m_1^{\Pi}(k\Delta t)$, $m_2^{\Pi}(k\Delta t)$, левые – через $m_1^{\text{I}}(k\Delta t)$, $m_2^{\text{I}}(k\Delta t)$.

Правило составления системы (14.2.14) для параметра k формулируются следующим образом: **в левой части стоит левая граница средней численности данной стороны при « $k - 1$ » минус произведение максимальной эффективности противоположной стороны при « $k - 1$ » на правую границу средней численности противоположной стороны при « $k - 1$ »; в правой части стоит правая граница средней численности данной стороны при « $k - 1$ » минус произведение минимальной эффективности противоположной стороны при « $k - 1$ » на левую границу средней численности противоположной стороны при « $k - 1$ »;**

Система (4.2.14) дает возможность с заданной точностью $\varepsilon > 0$ оценивать интервалы имеющих средних численностей единиц обеих сторон. Заметим, что поскольку $\varepsilon = o(\Delta t)$, то, задавая, например, $\varepsilon = \Delta t^2$ при заданном Δt к моменту времени $t = k\Delta t$ для данных $\alpha_{\min}^{(2)}(t)$, $\alpha_{\max}^{(2)}(t)$, $\alpha_{\min}^{(1)}(t)$, $\alpha_{\max}^{(1)}(t)$, N_1 , N_2 , получаем соответствующие оценки средних численностей сторон к моменту времени t .

Рассмотрим пример. Пусть $\Delta t = 0,1$ мин, $\alpha_{\min}^{(2)} = 0,1 \frac{1}{\text{мин}}$, $\alpha_{\max}^{(2)} = 0,15 \frac{1}{\text{мин}}$, $\alpha_{\min}^{(1)} = 0,11 \frac{1}{\text{мин}}$, $\alpha_{\max}^{(1)} = 0,16 \frac{1}{\text{мин}}$, $N_1 = 50$, $N_2 = 60$. Найдем оценки для $m_1(t)$ и $m_2(t)$ при $t = 3\Delta t$ ($k = 3$). Здесь для упрощения выкладок эффективности взяты постоянными.

Из неравенств (4.2.12) имеем:

$$\begin{aligned} 50 - 0,15 \cdot 60 \cdot 0,1 - 0,15(60 - 0,11 \cdot 50 \cdot 0,1) \cdot 0,1 &\leq m_1(2\Delta t) \leq \\ &\leq 50 - 0,1 \cdot 60 \cdot 0,1 - 0,1(60 - 0,16 \cdot 50 \cdot 0,1) \cdot 0,1; \\ 48,21 &\leq m_1(2\Delta t) \leq 48,81. \end{aligned}$$

Аналогично для $m_2(2\Delta t)$ получаем:

$$58,41 \leq m_2(2\Delta t) \leq 58,91.$$

Правая часть первого неравенства при $k = 3$ будет иметь вид

$$m_1^{II}(2\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)} \cdot m_2^{II}(2\Delta t) \cdot \Delta t = 48,81 - 0,1 \cdot 58,41 \cdot 0,1 = 48,22;$$

левая:

$$m_1^{II}(2\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)} \cdot m_2^{II}(2\Delta t) \cdot \Delta t = 48,2 - 0,15 \cdot 58,91 \cdot 0,1 = 47,32.$$

Таким образом:

$$47,32 \leq m_1(3\Delta t) \leq 48,22.$$

Аналогично получаем:

$$58,41 - 0,16 \cdot 48,81 \cdot 0,1 \leq m_2(3\Delta t) \leq 58,91 - 0,11 \cdot 48,2 \cdot 0,1.$$

Отсюда

$$57,63 \leq m_2(3\Delta t) \leq 58,38.$$

Следовательно, в любой момент $k\Delta t$ с точностью $\varepsilon = \Delta t^2$ определяются границы интервалов изменения средних численностей сторон.

Если решать рассмотренный пример по методу Ланчестера, где

$$\begin{cases} m_1(t) = N_1 ch\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \cdot t - N_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} sh\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \cdot t; \\ m_2(t) = N_2 ch\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \cdot t - N_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} sh\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \cdot t, \end{cases} \quad (4.2.15)$$

то при $\alpha_1 = \alpha_{\min}^{(2)}$, $\alpha_2 = \alpha_{\min}^{(1)}$ получим:

$$m_1(3\Delta t) = 48,02; m_2(3\Delta t) = 58,64.$$

При $\alpha_1 = \alpha_{\max}^{(2)}$, $\alpha_2 = \alpha_{\max}^{(1)}$

$$m_1(3\Delta t) = 46,9; m_2(3\Delta t) = 57,58.$$

Из анализа проведенных исследований следует, что результаты, полученные по формулам (4.2.14) при $k = 3$, мало отличаются от результатов модели Ланчестера, если эффективности в ней считать либо максимальными, либо минимальными.

Система (4.2.14) соответствует минимальному риску, т.е. когда каждая сторона рассматривает для себя худшие условия (минимальную эффективность), а для противоположной стороны – лучшие условия (максимальную эффективность).

Заметим, что неравенства (4.2.14) можно было записать и в других вариантах. Например, множителями при таких же эффективностях, как в системе (4.2.14), стоят либо левые границы в левой и правой частях неравенства, либо правые границы.

Пусть $k = 1$, найдем разность между правой и левой частью неравенства (4.2.11). Имеем:

$$\begin{aligned} N_1 - \alpha_{\min}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t - (N_1 - \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t) = \\ = N_2 \cdot \Delta t (\alpha_{\max}^{(2)}(0) - \alpha_{\min}^{(2)}(0)). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Потребуем, чтобы данная разность была не больше $\varepsilon_1 > 0$. Тогда

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon_1}{N_2 \cdot (\alpha_{\max}^{(2)}(0) - \alpha_{\min}^{(2)}(0))}.$$

Для рассмотренного примера

$$\Delta t \leq \frac{\varepsilon_1}{60 \cdot (0,15 - 0,1)} = \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

При $\varepsilon_1 = 1$ получаем $\Delta t \leq 0,3$ мин. Далее для любого k будет показана оценка разности (4.2.16).

Пусть выполняется система неравенств (допущение ее выполнения обосновано возможностью выбора соответствующего значения Δt):

$$\begin{cases} N_1 > \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_2 \cdot \Delta t; \\ N_2 > \alpha_{\max}^{(2)}(0) \cdot N_1 \cdot \Delta t. \end{cases}$$

Тогда из систем (4.2.11)–(4.2.13) следует, что

$$m_1^{\text{II}}(\Delta t) > 0, m_1^{\text{II}}(\Delta t) > 0, m_2^{\text{II}}(\Delta t) > 0, m_2^{\text{II}}(\Delta t) > 0. \quad (4.2.17)$$

$$\begin{cases} m_1^{\text{II}}(\Delta t) > m_1^{\text{II}}(2\Delta t); \\ m_1^{\text{II}}(\Delta t) > m_1^{\text{II}}(2\Delta t), \end{cases} \quad (4.2.18)$$

$$\begin{cases} m_2^{\text{II}}(\Delta t) > m_2^{\text{II}}(2\Delta t); \\ m_2^{\text{II}}(\Delta t) > m_2^{\text{II}}(2\Delta t). \end{cases} \quad (4.2.19)$$

Отсюда

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\text{I}}(\Delta t) \cdot \Delta t; \\ m_1^{\text{I}}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t; \\ m_2^{\Pi}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_1^{\text{I}}(\Delta t) \cdot \Delta t; \\ m_2^{\text{I}}(\Delta t) > \alpha_{\min}^{(2)}(\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(\Delta t) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (4.2.20)$$

Итак, неравенства (4.2.17)–(4.2.20) верны при $t = \Delta t$, т.е. для $k = 1$.

Воспользуемся теперь принципом математической индукции и докажем, что если неравенства (4.2.17)–(4.2.20) имеют место для времени $k\Delta t$, то они имеют место и для времени $(k+1)\Delta t$. На основе (4.2.14) имеем:

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) = m_1^{\Pi}(k\Delta t) - \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t)m_2^{\text{I}}(k\Delta t)\Delta t; \\ m_1^{\text{I}}((k+1)\Delta t) = m_1^{\text{I}}(k\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t)m_2^{\Pi}(k\Delta t)\Delta t; \\ m_2^{\Pi}((k+1)\Delta t) = m_2^{\Pi}(k\Delta t) - \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t)m_1^{\text{I}}(k\Delta t)\Delta t; \\ m_2^{\text{I}}((k+1)\Delta t) = m_2^{\text{I}}(k\Delta t) - \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t)m_1^{\Pi}(k\Delta t)\Delta t. \end{cases} \quad (4.2.21)$$

Из первого равенства (4.2.21) с учетом первого неравенства (4.2.20) при $k\Delta t$ получаем, что

$$m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) < m_1^{\Pi}(k\Delta t).$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных трех равенств (4.2.21). Отсюда следует выполнимость соотношений (4.2.20) для $k+1$.

Следовательно, имеем две системы вложенных отрезков:

$$\left[m_1^{\text{I}}(k\Delta t), m_1^{\Pi}(k\Delta t) \right] \text{ и } \left[m_2^{\text{I}}(k\Delta t), m_2^{\Pi}(k\Delta t) \right], \quad k=1, 2, \dots$$

Левые и правые границы этих отрезков стремятся к некоторым пределам.

Первый предел представляет собой значение правой границы $m_1(t)$ при всех $k > k_0$, второй – значение левой границы для $k > k_0$, т.е. для любых $\varepsilon^{(1)} > 0$ и $\varepsilon^{(2)} > 0$

$$\begin{cases} \left| m_1^{\Pi}((k+1)\Delta t) - m_1^{\Pi}(k\Delta t) \right| < \varepsilon^{(1)}; \\ \left| m_1^{\text{I}}((k+1)\Delta t) - m_1^{\text{I}}(k\Delta t) \right| < \varepsilon^{(2)}. \end{cases} \quad (4.2.22)$$

Аналогично для $m_2(t)$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t)m_2^{\text{I}}(k\Delta t) < \varepsilon^{(1)}; \\ \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t)m_2^{\Pi}(k\Delta t) < \varepsilon^{(2)}. \end{cases}$$

Алгоритм отыскания значения k следующий. Полагаем $k_0 = 1$ и вычисляем значения левых частей неравенств, сравниваем полученные результаты соответственно с $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$. Если оба неравенства выполняются, присваиваем k_0 значение $k_0 + 1$ и весь процесс повторяется. Как только хотя бы одно неравенство не будет выполнено для некоторого k_0 , это означает, что для этого k_0 число $k_0 - 1$ будет решением. Для этого значения $k_0 - 1$ со сколь угодно большой степенью точности $\varepsilon^{(1)}$ в качестве правой границы $m_1(t)$ можно взять значение $m_1^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$, в качестве левой – $m_1^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$. Аналогично в качестве правой границы $m_2(t)$ можно взять значение $m_2^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$, в качестве левой – $m_2^{\Pi}((k_0 - 1)\Delta t)$.

Если неравенство не выполняется ни для какого k , увеличиваются $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(2)}$.

Рассмотрен случай, когда интервал Δt фиксирован. В случае невыполнения одного из неравенств можно добиться результата при меньших значениях k , уменьшая соответственно Δt .

Оценим разность между правой и левой границей для $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Имеем:

С учетом (4.2.21) систему (4.2.22) можно представить в развернутом виде:

$$\left| m_1^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\min}^{(2)}(i\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t - m_1^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\max}^{(2)}(i\Delta t) \cdot m_2^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t \right| < \varepsilon^{(1)};$$

$$\left| m_2^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\min}^{(1)}(i\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t - m_2^{\Pi}(\Delta t) - \sum_{i=1}^k \alpha_{\max}^{(1)}(i\Delta t) \cdot m_1^{\Pi}(i\Delta t) \cdot \Delta t \right| < \varepsilon^{(2)}.$$

4.2.6. Оценка основных характеристик системы

В данном материале речь пойдет о потребном наряде сил, представляющем собой первоначальное количество единиц N_1 (N_2), при котором средние численности сторон достигнут заданных значений к данному моменту времени t , а также о потребном времени, по истечении которого число непораженных единиц обеих сторон будет не более (не менее) заданного, и о коэффициенте, при помощи которого оценивается превосходство одной стороны над другой.

Пусть момент времени t и интервал Δt заданы. Тогда $k = [t / \Delta t]$.

При этом

$$\begin{cases} m_1^{\Pi}(k\Delta t) \leq m_1(t) \leq m_1^{\Pi}(k\Delta t), \\ m_2^{\Pi}(k\Delta t) \leq m_2(t) \leq m_2^{\Pi}(k\Delta t). \end{cases}$$

Совершая k раз итерацию относительно правых и левых частей данных неравенств, последнюю систему преобразуем к виду:

$$\begin{cases} a_1 N_1 + a_2 N_2 \leq m_1(t) \leq b_1 N_1 + b_2 N_2, \\ c_1 N_1 + c_2 N_2 \leq m_2(t) \leq d_1 N_1 + d_2 N_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим множество точек (N_1, N_2) с целыми коэффициентами.

Пусть задан интервал Δt .

Не нарушая общности, оценим время t , при котором

$$m_1(t) \geq m_1, \quad m_2(t) \geq m_2. \quad (4.2.23)$$

Из системы (4.2.22) с достаточной точностью можно считать, что $m_1(t) = m_1^{\text{II}}(k\Delta t)$ (или $m_1(t) = m_1^{\text{I}}(k\Delta t)$), аналогично $m_2(t) = m_2^{\text{II}}(k\Delta t)$ (или $m_2(t) = m_2^{\text{I}}(k\Delta t)$).

Сначала полагаем $k = 1$, находим, например, $m_1^{\text{II}}(\Delta t)$ и $m_2^{\text{II}}(\Delta t)$ и сравниваем полученные значения с m_1 и m_2 соответственно. Если выполнены неравенства (4.2.23), то $t = \Delta t$. В противном случае переходим к значению $k = k + 1$ и весь процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены неравенства (4.2.23). Как только это произойдет для некоторого k , полагаем $t = k\Delta t$.

Для оценки превосходства, например, стороны I над стороной II в момент $t = (k + 1)\Delta t$ найдем разность

$$m_1^{\text{II}}(k\Delta t) - m_1^{\text{I}}(k\Delta t). \quad (4.2.24)$$

Очевидно, эта разность положительна тогда и только тогда, когда имеется превосходство стороны I в момент времени $t = (k + 1)\Delta t$. Если разность (4.2.24) равна нулю, то имеем равновесие сил.

Преобразуем (4.2.24), используя формулы (4.2.21). Получим:

$$\begin{aligned} m_1^{\text{II}}((k + 1)\Delta t) - m_2^{\text{II}}((k + 1)\Delta t) &= m_1^{\text{II}}(k\Delta t) - \alpha_{\max}^{(2)} m_2^{\text{II}}(k\Delta t)\Delta t - m_2^{\text{II}}(k\Delta t) - \\ &- \alpha_{\min}^{(1)} m_1^{\text{I}}(k\Delta t)\Delta t = m_1^{\text{II}}(k\Delta t)(1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t) - m_2^{\text{II}}(k\Delta t)(1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда условие превосходства стороны I:

$$\frac{m_1^{\text{II}}(k\Delta t)}{m_2^{\text{II}}(k\Delta t)} > \frac{(1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t)}{(1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t)}. \quad (4.2.25)$$

Положим $\chi_1 = \frac{m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot (1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t)}{m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot (1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t)}$ и назовем коэффициентом

превосходства стороны I, если $\chi_1 > 1$; если $\chi_1 < 1$, то имеет место превосходство стороны II; при $\chi_1 = 1$ будем говорить о равновесии сил.

Заметим, что условие превосходства стороны II можно получить аналогично условию (4.2.25), используя (4.2.21). Тогда

$$\frac{m_2^{\text{II}}(k\Delta t)}{m_1^{\text{II}}(k\Delta t)} > \frac{(1 + \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t)}{(1 + \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t)}. \quad (4.2.26)$$

Положим $\chi_2 = \frac{m_2^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot (1 + \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t)}{m_1^{\text{II}}(k\Delta t) \cdot (1 + \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t)}$.

Тогда $\chi_2 > 1$ означает превосходство стороны II, $\chi_2 < 1$ – превосходство стороны I, $\chi_2 = 1$ – равновесие сил.

При $k = 0$ имеем:

$$\chi_1 = \frac{N_1 \cdot (1 + \alpha_{\min}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t)}{N_2 \cdot (1 + \alpha_{\max}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t)};$$

$$\chi_2 = \frac{N_2 \cdot (1 + \alpha_{\min}^{(2)}(k\Delta t)\Delta t)}{N_1 \cdot (1 + \alpha_{\max}^{(1)}(k\Delta t)\Delta t)}.$$

Для рассмотренного ранее числового примера получаем:

$$\chi_1 = \frac{50 \cdot (1 + 0,1)}{60 \cdot (1 + 0,15)} = 0,8;$$

$$\chi_2 = \frac{60 \cdot (1 + 0,1)}{50 \cdot (1 + 0,16)},$$

т.е. в начальный момент времени имеется превосходство стороны II.

Отметим, что в модели Ланчестера (4.2.16) коэффициент превосходства определяется как $\chi = \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$, где α_1, α_2 - постоянные на

протяжении всей конфликтной ситуации эффективности сторон. При этом сам коэффициент превосходства также постоянен в течение боя. Поэтому можно сказать, что модель Ланчестера описывает конфликтную ситуацию достаточно приближенно. В то же время предложенная в данной работе авторами модель, ее характеристики и соответствующие коэффициенты превосходства достаточно гибко ориентированы на постоянно изменяющиеся условия конфликтных ситуаций, в частности, ее зависимости от времени и соответствующих средних численностей в любой момент времени.

Итак, построена модель системного описания процесса противоборства двух сторон с использованием системы дифференциальных уравнений Колмогорова, преобразованная в систему двух дифференциальных неравенств, решение которых находится по рекуррентной формуле с любой степенью точности.

Сделана оценка основных характеристик системы, в том числе коэффициента превосходства, зависящего от времени, что существенно улучшает аналогичный показатель разных моделей статистического характера и родственных моделей [42, 46, 51, 63].

§ 4.3. Математическая модель конкуренции политических партий

Одной из важнейших проблем общественного развития является организация конкуренции (борьбы) политических партий. Для анализа и прогнозирования данного процесса наиболее удобен метод математического моделирования. Актуальность разработки модели борьбы партий определяется важностью рассматриваемого процесса для определения стратегии жизни стран и народов. В данном исследовании для описания конкуренции партий используется модифицированная модель Ричардсона (гонки вооружений) в виде динамической системы дифференциальных уравнений. С помощью операторного метода получено аналитическое решение динамической системы дифференциальных уравнений. Для пояснения разработанного метода рассмотрен конкретный числовой пример. Проанализированы особенности применения модели конкуренции политических партий. Определены перспективы дальнейшего развития разработанного метода.

4.3.1. Методы и модели исследования социальных процессов и явлений

Для успешного общественного развития необходимо проводить исследования социальных процессов и явлений с целью их анализа и прогнозирования. При этом возникает проблема обработки и анализа больших массивов информации. Для выделения, формализации результативных признаков и существенных факторов наиболее удобен метод математического моделирования. Актуальность применения этого метода для исследования социально-экономических процессов определяется цифровизацией – внедрением цифровых технологий в разные сферы жизни общества. При исследовании социальных процессов методом моделирования следует учитывать динамичность исследуемых процессов. Разнообразие социальных процессов вызывает необходимость применения большого количества адекватных им математических моделей, использующих современные математические методы.

Примеры использования оптимального управления в социальных моделях приведены в обзоре [105]. В работе [69] для описания процессов в сложных системах с присутствием человеческого фактора используются нестационарные временные ряды. Многие социальные процессы связаны с конфликтными ситуациями и противоборством государств, народов, религиозных общин, партий, группировок и т.д. Противоборство может протекать в форме вооруженных конфликтов, экономической конкуренции, информационной войны, политической борьбы. Для описания моделей динамического противоборства в настоящее время наиболее часто применяют модели в виде систем дифференциальных

уравнений [126]. Так, в статьях [65, 72, 73] для исследования вопросов информационного противоборства в социуме применяются системы нелинейных дифференциальных уравнений. Для исследования противоборства партий, групп успешно применяются динамические модели, описывающие развитие некоторого процесса во времени: Лотки – Вольтерры (хищник – жертва) [112], Ричардсона (гонка вооружений) [51], Чанди – Мисры (эпидемиологический подход) [123], диффузии Ланжевена [124]. Для решения конфликтных ситуаций в социальной сфере применяются также модели теории игр. Существует большое количество разнообразных моделей партий [43].

Для жизни современного общества большое значение имеет конкурентная борьба политических партий. Несмотря на то, что в настоящее время разработано большое количество математических моделей социальных процессов, проблема моделирования конкурентной борьбы политических партий изучена недостаточно. Актуальность данной темы возрастает с развитием общества. Необходимо разработать наглядную модель партийной конкуренции, позволяющую получить аналитическое решение задачи, чтобы не применять сложные и громоздкие численные методы, требующие больших затрат вычислительных ресурсов. Кроме того, результаты, полученные с помощью численных методов, в ряде случаев трудно поддаются анализу.

Одной из наиболее распространенных моделей для описания вооруженных конфликтов является модель Ричардсона [89]. В данном исследовании для описания процесса конкуренции (борьбы) политических партий применяется модифицированная модель Ричардсона. В разработанной модели не используются параметры, характеризующие претензии сторон, так как они не характерны для борьбы партий.

В разделе «Материалы и методы» данного исследования разработана новая модель борьбы партий. В разделе «Результаты и обсуждение» на конкретном примере показана возможность применения разработанного метода и приведены его особенности.

4.3.2. Материалы и методы

Цель работы заключается в разработке математической модели борьбы политических партий.

Для реализации поставленной цели необходимо решить ряд задач:

- 1) формализовать динамическую модель конкуренции политических партий в виде системы дифференциальных уравнений;
- 2) получить аналитическое решение системы;
- 3) для проверки разработанного алгоритма рассмотреть числовой пример;

4) проанализировать особенности применения и дальнейшего развития разработанного метода описания конкуренции политических партий.

Рассмотрим и формализуем постановку проблемы.

Пусть имеется две партии, и в момент времени t у первой партии $x = x(t)$ сторонников, у второй – $y = y(t)$ сторонников. В ходе различного рода мероприятий, таких как дебаты, дискуссии, праймериз, демонстрации, митинги, шествия, съезды, количество x и y меняется. Этот процесс можно описать системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = \alpha y + \gamma x, \\ y' = \beta x + \delta y, \end{cases} \quad (4.3.1)$$

$x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, где t_0 - начальное время.

Сначала рассмотрим случай, когда $x'(t_0) \neq 0$ и $y'(t_0) \neq 0$. Здесь x' , y' – соответственно скорости изменения числа x и y ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – коэффициенты пропорциональности, причем $\alpha > 0, \beta > 0$ (коэффициенты агитируемости), $\gamma < 0, \delta < 0$ (коэффициенты выбытия). В самом деле, каждая партия изменяет скорость роста (или сокращения) агитационной работы пропорционально уровню числа сторонников другой партии, т.е.

$$\begin{cases} x' = \alpha y, \\ y' = \beta x. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

В то же время, чем больше число сторонников данной партии, тем меньше скорость его роста, т.е.

$$\begin{cases} x' = \gamma x, \\ y' = \delta y. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Получим оценку для коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на примере оценки γ . При условии отсутствия сторонников второй партии из первого уравнения системы (4.3.3) находим: $x(t) = e^{\gamma(t-t_0)} x(t_0)$. Отсюда

$x(t_0 - \frac{1}{\gamma}) = x(t_0) \frac{1}{e}$, т.е. $-\frac{1}{\gamma}$ – это время, которое требуется для снижения

количества сторонников первой партии в $e = 2,7$ раза. Аналогично $-\frac{1}{\delta}$ –

время, по истечении которого уменьшится количество сторонников второй

партии при отсутствии сторонников первой партии; $\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} \right)$ – время,

необходимое для увеличения числа сторонников первой (второй) партии в $e = 2,7$ раза при их первоначальном отсутствии.

Решим систему (4.3.1) операторным методом.

Рассматривая функции $x(t)$ и $y(t)$ как оригиналы, введем их изображения:

$$x(t) = X(p), \quad y(t) = Y(p).$$

Запишем изображения производных:

$$x'(t) = pX(p) - x_0; \quad y' = pY(p) - y_0.$$

Операторная система:

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 = \alpha Y(p) + \gamma X(p), \\ pY(p) - y_0 = \beta X(p) + \delta Y(p), \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} (p - \delta)X(p) - \alpha Y(p) = x_0, \\ -\beta X(p) + (p - \delta)Y(p) = y_0. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p - \gamma & -\alpha \\ -\beta & p - \delta \end{vmatrix} = (p - \gamma)(p - \delta) - \alpha\beta = p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta;$$

$$\Delta X(p) = \begin{vmatrix} x_0 & -\alpha \\ y_0 & p - \delta \end{vmatrix} = x_0(p - \delta) - \alpha y_0; \quad \Delta Y(p) = \begin{vmatrix} p - \gamma & x_0 \\ -\beta & y_0 \end{vmatrix} = y_0(p - \gamma) + \beta x_0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} X(p) = \frac{x_0(p - \delta) + \alpha y_0}{p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta}; \\ Y(p) = \frac{y_0(p - \gamma) + \beta x_0}{p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta}. \end{cases}$$

Преобразуем $X(p)$ и $Y(p)$. Получим:

$$\begin{cases} X(p) = \frac{x_0(p - \delta)}{p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta} + \frac{\alpha y_0}{p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta}, \\ Y(p) = \frac{y_0(p - \gamma)}{p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta} + \frac{\beta x_0}{p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta}. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\begin{aligned} A = p^2 - p(\delta + \gamma) + \gamma\delta - \alpha\beta &= p^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} p(\delta + \gamma) + \frac{1}{4}(\delta + \gamma)^2 - \frac{1}{4}(\delta + \gamma)^2 + \gamma\delta - \alpha\beta = \\ &= \left(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \right)^2 - \frac{1}{4}(\delta + \gamma)^2 + \gamma\delta - \alpha\beta = \left(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \right)^2 - \frac{1}{4}(\delta - \gamma)^2 - \alpha\beta. \end{aligned}$$

Пусть

$$B^2 = \frac{1}{4}(\delta + \gamma)^2 - \gamma\delta + \alpha\beta. \quad (4.3.5)$$

$$\text{Тогда } A = \left(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \right)^2 - B^2.$$

Для B возможны следующие случаи:

1) $\frac{1}{4}(\delta - \gamma)^2 + \alpha\beta \leq 0$. Такая ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\gamma = \delta$ и либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$ и левая часть равна нулю, при этом $A = (p - \delta)^2$, $B = 0$. Пусть, например, $\alpha = 0$, тогда первое слагаемое из равенства (4.3.4) для $X(p)$ преобразуется следующим образом:

$$\frac{x_0(p - \delta)}{A} = x_0 e^{\delta t} \cdot \cos Bt = x_0 e^{\delta t}, \quad (4.3.6)$$

второе слагаемое

$$\frac{\alpha y_0}{(p - \delta)^2} = \alpha y_0 t e^{\delta t}. \quad (4.3.7)$$

2) $\frac{1}{4}(\delta - \gamma)^2 + \alpha\beta > 0$.

Для второго случая преобразуем числитель первого слагаемого в $X(p)$ системы (4.3.4):

$$\begin{aligned} x_0(p - \delta) &= x_0 p - x_0 \delta - x_0 \cdot \frac{1}{2}(\delta + \gamma) + x_0 \cdot \frac{1}{2}(\delta + \gamma) = \\ &= x_0(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma)) - x_0(\delta - \frac{1}{2}(\delta + \gamma)) = x_0(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma) - \frac{1}{2}x_0(\delta - \gamma)). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Тогда первое слагаемое преобразуется к виду

$$\frac{x_0 \left(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \right)}{A} = x_0 e^{\frac{1}{2}(\delta + \gamma)t} \cdot chBt. \quad (4.3.9)$$

Прибавив ко второму слагаемому в $X(p)$ системы (4.3.4) второе слагаемое из уравнения (4.3.8), деленное на A , получим:

$$C = \frac{\alpha y_0 - \frac{1}{2}x_0(\delta - \gamma)}{A}. \text{ Обозначим числитель этой формулы через } D, \text{ т.е.}$$

$$D = \alpha y_0 - \frac{1}{2}x_0(\delta - \gamma), \quad (4.3.10)$$

$$C = \frac{D}{B} \cdot \frac{B}{\left(p - \frac{1}{2}(\delta + \gamma) \right)^2 - B^2} = \frac{D}{B} e^{\frac{1}{2}(\delta + \gamma)t} \cdot shBt. \quad (4.3.11)$$

Таким образом, с учетом (4.3.6) и (4.3.7) в первом случае для $X(p)$ получаем оригинал:

$$x(t) = x_0 e^{\delta t} + \alpha y_0 t e^{\delta t} = e^{\delta t} (x_0 + \alpha y_0 t);$$

для второго случая на основе выражений (4.3.9) и (4.3.11) получаем:

$$x(t) = x_0 e^{\frac{1}{2}(\delta+\gamma)t} ch Bt + \frac{D}{B} e^{\frac{1}{2}(\delta+\gamma)t} sh Bt = e^{\frac{1}{2}(\delta+\gamma)t} \left(x_0 ch Bt + \frac{D}{B} sh Bt \right),$$

здесь B и D определяются соответственно по формулам (4.3.5) и (4.3.10).

Аналогично для $Y(p)$ получаем оригинал:

для первого случая

$$y(t) = e^{\gamma t} (y_0 + \beta x_0 t);$$

для второго случая

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}(\delta-\gamma)t} \left(y_0 ch Bt + \frac{D_1}{B} sh Bt \right).$$

Здесь $D_1 = \beta x_0 + \frac{1}{2} y_0 (\delta - \gamma)$, B определяется по формуле (4.3.5).

Таким образом, получено решение системы дифференциальных уравнений (4.3.1) операторным методом.

4.3.3. Результаты и их обсуждение

Для пояснения разработанного метода рассмотрим условный пример. Пусть имеются следующие значения: $t_0 = 1$, $x_0 = 50\,000$, $y_0 = 45\,000$, $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,03$, $\gamma = -0,02$, $\delta = -0,01$.

На рис. 4.5 построены графики изменения численностей x и y со временем.

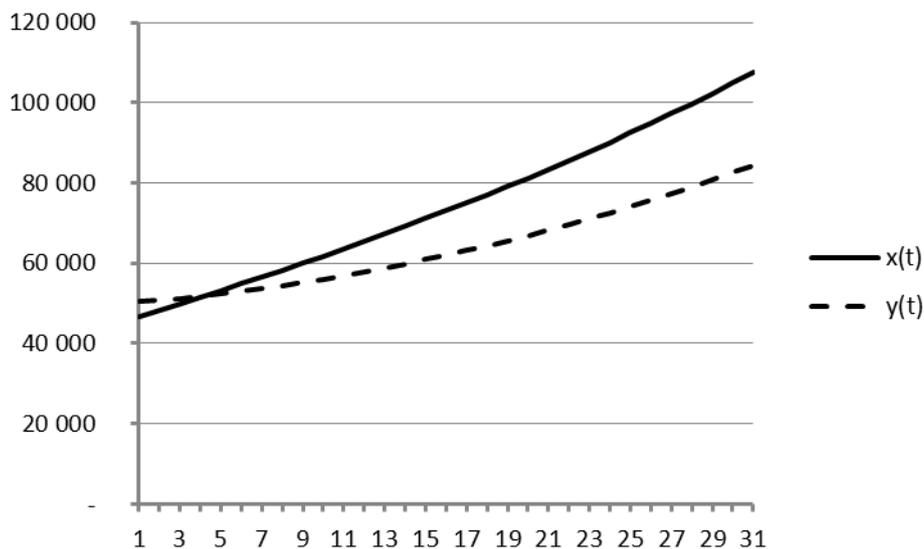


Рис. 4.5

Проанализируем частный случай разработанной математической модели.

Если $x'(t_0)=0$ и $y'(t_0)=0$, то из равенств (4.3.1) следует, что

$$\begin{cases} \alpha = -\gamma \frac{x_0}{y_0}; \\ \beta = -\delta \frac{y_0}{x_0}; \\ \alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\frac{1}{2}(\delta+\gamma)t} x_0 \left(ch \frac{1}{2}(\delta+\gamma)t - sh \frac{1}{2}(\delta+\gamma)t \right); \\ y(t) &= e^{\frac{1}{2}(\delta+\gamma)t} y_0 \left(ch \frac{1}{2}(\delta+\gamma)t - sh \frac{1}{2}(\delta+\gamma)t \right). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что производные первого порядка этих функций равны нулю, т.е. графики представляют собой параллельные прямые линии.

Наиболее близкими к разработанной модели являются модели, рассмотренные в статьях [51, 89]. В статье [51] для получения решения анализируются условия равновесия системы дифференциальных уравнений, сама система не решается. Полученное в статье [89] решение модели Ричардсона, основывается на устойчивости системы дифференциальных уравнений, предложен метод задания коэффициентов системы.

Рассмотрение указанных моделей позволяет сделать вывод о том, что используемый методологический подход является новым, наглядным и эффективным.

Дальнейшее направление исследований связано с разработкой модели многопартийной конкуренции (число партий более двух), использованием нечетких чисел в качестве коэффициентов системы. Представляет интерес рассмотрение коалиционной политики партий [81].

Таким образом, получены следующие результаты:

- 1) для описания конкуренции политических партий использована модифицированная модель Ричардсона в виде системы двух дифференциальных уравнений с четырьмя коэффициентами;
- 2) получено аналитическое решение динамической системы дифференциальных уравнений с помощью операторного метода;
- 3) для проверки разработанного алгоритма рассмотрен конкретный числовой пример;
- 4) проанализированы особенности применения и перспективы дальнейшего развития нового разработанного метода описания конкуренции политических партий.

Следует отметить, что выводы, полученные при использовании математических моделей социально-экономических процессов, следует проверить эмпирически в реальных условиях.

ГЛАВА 5 МЕТОДЫ И МОДЕЛИ РЕЗЕРВОВ

§ 5.1. Математическая модель создания резерва денежных средств

Одной из основных целей функционирования любой организации, существования семейной ячейки, отдельного индивидуума является оптимальное управление резервом денежных средств. В данной главе показана общая схема решения данной задачи.

Проведено исследование зависимости доли резерва денежных средств от времени, как для дискретного, так и для непрерывного случая.

Основные решаемые задачи:

- 1) описать в общем виде изменение доли резервного значения как функции времени;
- 2) показать, как осуществляется оптимальное управление резервными средствами;
- 3) проанализировать различные ситуации, определяемые соответствующими соотношениями между параметрами, характеризующими данную модель.

5.1.1. Построение непрерывной модели резерва денежных средств

Процесс изменения резерва денежных средств будем рассматривать на временном интервале Δ . Разобьем этот интервал на N подынтервалов $\Delta_n = [t_n, t_{n+1}]$, ($n = \overline{1, N}$). Пусть $M(t)$ – вся сумма денежных средств в момент времени t , $Q(t)$ – резервная сумма, $P(t) = Q(t)/M(t)$ – доля резервной части. Рассматривается случай, когда $M(t)$ не пополняется извне, т.е. является убывающей функцией. За время Δt ($\Delta t \leq \Delta_n$) $P(t)$ либо увеличится, либо уменьшится. Резервная часть увеличивается тем больше, чем меньше денежных средств расходуется. Резервная часть уменьшается при увеличении расходов. В первом случае $P(t)$ увеличивается тем больше, чем больше будет выделенных для расходования средств $1 - P(t)$, которые не были использованы за Δt , т.е. изменение $P(t)$ представляет собой

некоторую функцию, зависящую от $1 - P(t)$ и Δt . Наиболее простая зависимость

$$\alpha(1 - P(t)) \cdot \Delta t,$$

где α – постоянная величина, $\alpha > 0$. Такое допущение справедливо, поскольку в первом случае $P(t + \Delta t)$ представляет собой часть средств $1 - P(t)$, которые не были использованы за промежуток Δt , и эта часть увеличивается с увеличением Δt .

Во втором случае (уменьшения $P(t)$) за время Δt часть резервных средств начинает использоваться. Изменение денежных средств определяется зависимостью

$$-\gamma \cdot P(t)\Delta t,$$

где γ – постоянная величина ($\gamma > 0$).

Известны различные методики оценки коэффициентов α и γ в задачах по составлению дифференциальных и разностных уравнений [22, 30, 75].

Рассмотрим тождество:

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \frac{P(t + \Delta t) - R(t)}{(1 - P(t))\Delta t} (1 - P(t))\Delta t - \frac{P(t) - R(t)}{P(t)\Delta t} P(t)R(t),$$

где $R(t)$ – доля $P(t)$, оставшаяся в резерве; $\frac{P(t + \Delta t) - R(t)}{1 - P(t)}$ – доля задействованных средств, которые за Δt ушли в резерв; $\frac{P(t) - R(t)}{P(t)}$ – доля выделенных для расходования денежных средств, которые за Δt стали использоваться.

Для краткости положим $P_n = P(t)$, $P_{n+1} = P(t + \Delta t)$, $R_n = R(t)$.

С учетом тождества коэффициент α определим как среднюю для выборки $\{x_n | x_n = (P_{n+1} - R_n) / (1 - P_n) \cdot \Delta_n\}$, где $n = \overline{1, N}$. Коэффициент γ определяется как средняя арифметическая для выборки $\{x_n | x_n = (P_n - R_n) / P_n \cdot \Delta_n\}$, $n = \overline{1, N}$. Действительно, в этом случае $P(t + \Delta t)$ является частью $P(t)$ резервных средств, которые стали использоваться за время Δt , причем эта часть тем больше, чем больше Δt .

Изменение $\Delta P(t)$ можно записать следующим образом:

$$\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha(1 - P(t))\Delta t - \gamma P(t)\Delta t.$$

Используя предельный переход (при $\Delta t \rightarrow 0$), имеем

$$P'(t) + (\alpha + \gamma)P(t) - \alpha = 0. \quad (5.1.1)$$

При $P(t_0) = P_0$ получим следующее решение уравнения (5.1.1)

$$P(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \cdot e^{(\alpha + \gamma)(t_0 - t)}. \quad (5.1.2)$$

Выражение (5.1.2) определяет часть резервных денежных средств в момент времени t . Решение данного уравнения является устойчивым [23].

При описании коэффициентов α и γ нечеткими (треугольными) числами левая часть уравнения (5.1.2) задается парой чисел $[P^{(1)}, P^{(2)}]$, соответствующих левой и правой границам коэффициентов α и γ . Для сравнения полученной оценки с допустимым уровнем можно использовать методику, предложенную в статье [22].

График функции $P(t)$ при выполнении неравенства $P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} < 0$ показан на рис. 5.1, а при обратном соотношении ($P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} > 0$) – на рис. 5.2.

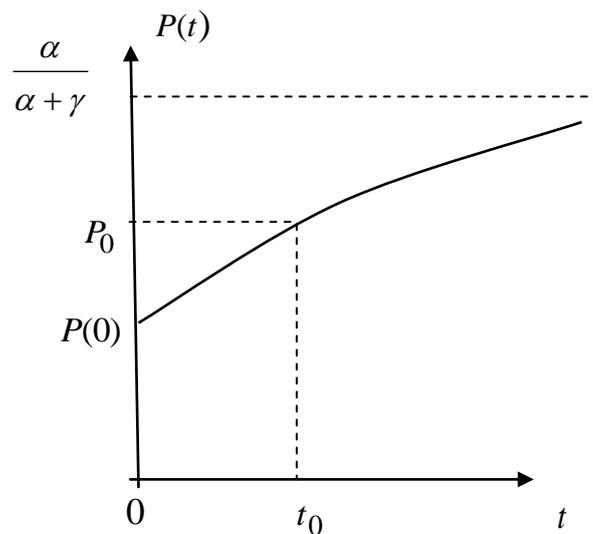


Рис. 5.1

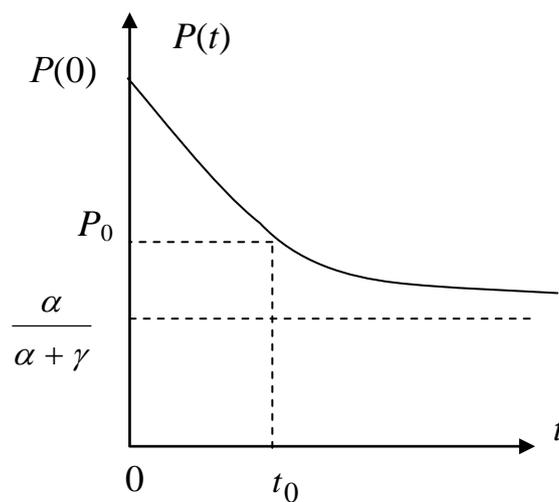


Рис. 5.2

Имеют место следующие предельные переходы:

$$P(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \cdot e^{(\alpha + \gamma)t_0} \text{ при } t \rightarrow 0;$$

$$P(t) \rightarrow P_0 \text{ при } t \rightarrow t_0.$$

Неравенство $P(t_0) < \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ определяет предельную границу

уменьшения резервной доли денежных средств $P(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$. При

выполнении условия $P(t_0) > \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ эта граница соответствует увеличению резервных средств.

5.1.2. Построение разностной модели резерва денежных средств

Во многих практических ситуациях можно рассматривать изменение резервных средств в дискретные моменты времени, отличающиеся друг от друга на постоянный временной интервал Δt . Пусть $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $P(n) = P(t_n)$, $n = 0, 2, \dots, k$. В этом случае можно использовать разностные модели, построенные для управления налоговыми платежами [30] и для оценки качества обучения [23]:

$$\Delta P(t_n) = P(t_n + \Delta t) - P(t_n) = \alpha(1 - P(t_n)) - \gamma P(t_n).$$

Решение разностного уравнения, аналогичное решению (5.1.2), будет иметь вид

$$P(n) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \cdot (1 - (\alpha + \gamma))^{n-n_0}, \quad (5.1.3)$$

где n_0 – начальное значение аргумента; $P(n_0) = P_0$.

Возможны следующие случаи соотношения параметров данного уравнения:

1) $\alpha + \gamma > 1$, $P_0 > \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$. В этом случае график функции $P(n)$ имеет колебательный характер вокруг оси $\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ (вначале функция убывающая).

Таким образом, на рис. 5.3 показана стабилизация доли резервных денежных средств около значения $\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$.

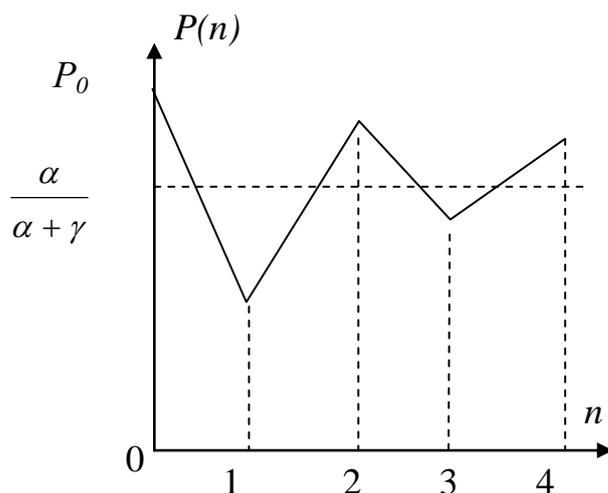


Рис. 5.3

2) $\alpha + \gamma > 0$, $P_0 < \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$, $P(n)$ (вначале функция возрастающая).

График функции $P(n)$ также имеет колебательный характер (рис. 5.4).

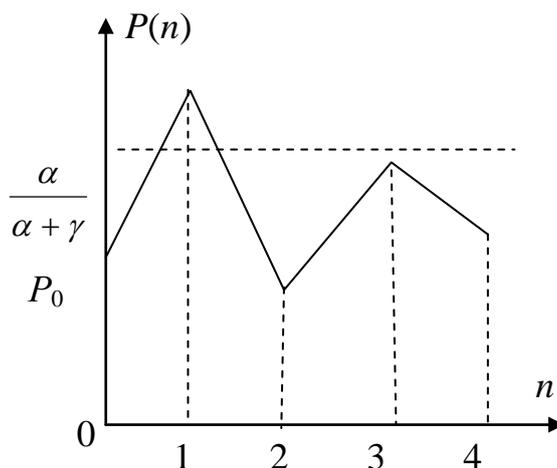


Рис. 5.4

3) $\alpha + \gamma = 0$, зависимость $P(n)$ от $\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ линейная.

4) $\alpha + \gamma < 1$, $P_0 < \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ ($P_0 > \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$). В этом случае $P(n)$ возрастает (убывает), приближаясь снизу (рис. 5.5) и сверху (рис. 5.6) к линии $P(n) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$

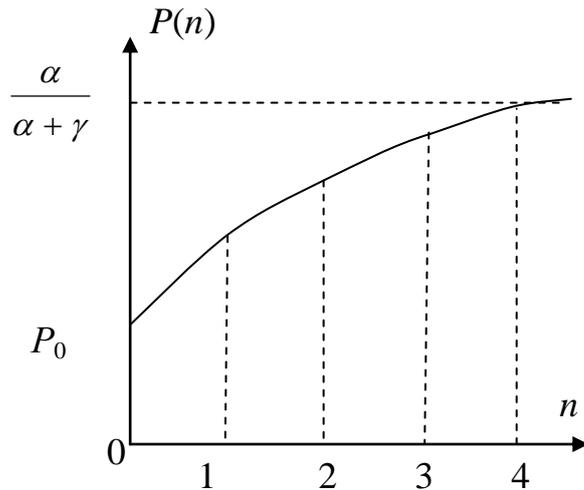


Рис. 5.5

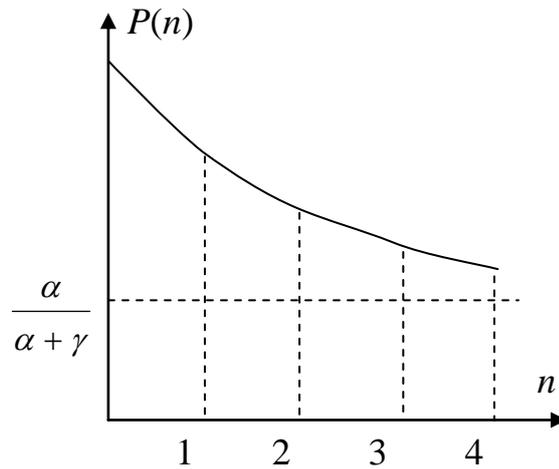


Рис. 5.6

5.1.3. Оптимальное планирование резерва

Одной из важных задач при планировании является определение времени t , при котором резерв достигает заданного уровня $P(t) = P$. Это время для непрерывного случая определяется из уравнения (5.1.2):

$$t = \frac{1}{\alpha + \gamma} \cdot \ln \left[\left(P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right) \cdot e^{(\alpha + \gamma)t_0} \right] / \left(P - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right). \quad (5.1.4)$$

Для дискретного случая равенство (5.1.4) при $\alpha + \gamma < 1$ запишется следующим образом:

$$n = \left\lfloor n_0 + \ln \left[\left(P(n) - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right) / \left(P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right) \right] / \ln(1 - (\alpha + \gamma)) \right\rfloor, \quad (5.1.5)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа/

Другая важная задача – определение резервной части P_0 в начальный момент времени для данного уровня P – также может быть решена с использованием уравнения (5.1.3):

$$P_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \left(P - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right) \cdot e^{(\alpha + \gamma)(t - t_0)}. \quad (5.1.6)$$

Аналогично для дискретного случая имеем

$$P_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \left(P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right) \cdot (1 - (\alpha + \gamma))^{n_0 - n}. \quad (5.1.7)$$

Из формул (5.1.4) и (5.1.6) следует, что резервную долю $P(t) = P$ можно изменить, меняя момент времени или корректируя P_0 . Аналогичные выводы следуют из формул (5.1.5) и (5.1.7) для дискретного случая.

Итак, на основе формул (5.1.4) и (5.1.6), (5.1.5) и (5.1.7) можно управлять резервной долей $P(t)$.

Управление резервными средствами можно рассматривать как эффективное или неэффективное. В качестве меры эффективности можно принять отношение полученного значения $P(t)$ к планируемому или оптимальному в данных условиях для каждого момента времени. Если оно близко к 1, то имеет место эффективное управление резервом. Чем меньше указанное отношение, тем неэффективнее управление.

Для процесса управления в нечетких условиях можно оценить риск неэффективности резервными средствами аналогично оценке риска неэффективности управления учебным процессом [22] или неэффективности управления проектом [11]. Для этого проверяется условие $P(t) \geq G$, где $P(t) = [P_1(t), P_2(t)]$, $P_1(t)$ – левая граница; $P_2(t)$ – правая граница; $G = [G_1, G_2]$; G_1 – левая граница; G_2 – правая граница треугольных чисел. Для различных соотношений $P_1(t)$, $P_2(t)$, G_1 , G_2 находится площадь зоны неэффективности. Для заданного уровня принадлежности определяется степень неэффективности через геометрическую вероятность с последующим нахождением интеграла от $P(t)$ на интервале изменения уровня принадлежности.

5.1.4. Моделирование составляющих резерва

Рассматривается денежная сумма $M(t)$ для n -го интервала времени $\Delta_n = [t_n, t_{n+1}]$ ($n = \overline{1, N}$, N – количество промежутков). В общем случае она представляет собой взвешенную сумму вида

$$M(t) = \sum_{i=1}^k C_i n_i(t),$$

где k – количество составляющих денежной суммы, C_i – приведенные веса, $n_i(t_n)$ – денежный ресурс i -й составляющей на момент времени t ,

представленной в целых единицах. Весовые коэффициенты C_i определяются на основе опроса экспертов. Так, при планировании суммы $M(t)$ семейного бюджета, например, на месяц, составляющими резерва являются составляющие денежные средства потребительской корзины, оставленные в резерве.

Пусть $m_i(t)$ – резервная часть денежной суммы i -й составляющей на момент времени t (в целых единицах). Общую долю резерва $P(t)$ в момент t можно рассчитать по формуле

$$P(t) = \sum_{i=1}^k c_i m_i(t) / M(t).$$

Для момента времени t имеем оптимизационную задачу максимизации целевой функции $L = \sum_{i=1}^k c_i m_i(t)$ при целых положительных

значениях $m_i(t)$ и ограничениях $M(t) - \sum_{i=1}^k c_i m_i(t) \geq 0$. Задача заключается в

отыскании целых положительных значений $m_i(t)$, которые дают минимум разности между значениями $M(t)$ и $M(t) \cdot P(t)$. Это задача целочисленного программирования. Так определяется долевое участие различных составляющих денежной суммы в любой момент времени в задаче максимизации резерва.

Разработанная модель позволяет осуществлять оптимальное управление резервными средствами. Полученные результаты могут найти широкое применение в технике, экономике, экологии, военном деле, социальной сфере.

§ 5.2. Модель мобилизации налоговых платежей

Налоговая система представляет собой наиболее действенный рычаг государственного регулирования социально-экономического развития общества. Поэтому проблема мобилизации населения на оплату налогов является одной из самых важных в нашей стране. Особую актуальность она приобретает в условиях реформирования налоговой системы для разработки эффективного механизма обеспечения стабильности налоговых поступлений.

Известно много математических моделей налоговой сферы [3, 9, 61], но они не затрагивают вопросы мобилизации налогоплательщиков. Классические модели мобилизации населения [70, 75, 94] рассматривают упрощенную разностную модель в условиях четкой информации. Однако для области сбора налогов характерны неопределенность информации о параметрах модели и массовость изучаемых процессов (начиная с

регионального уровня). Этим обусловлена необходимость разработки новых математических методов и моделей мобилизации налоговых платежей.

Авторами разработана модель мобилизации налоговых платежей в различных информационных условиях.

Полученные результаты являются развитием методов и моделей стимулирования качества обучения через систему поощрений, порицаний и согласования интересов [22, 35] применительно к проблеме мобилизации налогоплательщиков.

5.2.1. Построение дифференциальной модели изменения доли добросовестных налогоплательщиков

Допустим, что процесс изменения доли добросовестных налогоплательщиков рассматривается на некотором участке Δ , который будем называть основным промежутком. Разобьем этот участок на N частичных промежутков $\Delta_n = [t_n, t_{n+1}]$, где $n = \overline{1, N}$. Примем за единицу общее количество налогоплательщиков.

В дальнейшем будем использовать сокращения: ДН и НН – соответственно добросовестные и недобросовестные налогоплательщики, ДДН и ДНН – соответственно доля добросовестных и доля недобросовестных налогоплательщиков.

Пусть в данный момент времени t ДДН будет $P(t)$. тогда за время Δt ($\Delta t \subseteq \Delta_n$) $P(t)$ либо увеличивается, либо уменьшится. Эта доля увеличивается тем больше, чем больше ДН, и ДДН уменьшается при уменьшении числа ДН. В первом случае $P(t)$ увеличивается тем больше, чем будет больше ДНН, которые за Δt заплатили налоги, т.е. стали ДН. Таким образом, изменение $P(t)$ представляет собой некоторую функцию, зависящую от $1 - P(t)$ и Δt . По аналогии с [22, с. 959] наиболее простая зависимость имеет вид

$$\alpha(1 - P(t)) \cdot \Delta t, \quad (5.2.1)$$

где α – постоянная величина, $\alpha > 0$.

Такое допущение оправданно, поскольку в первом случае $P(t + \Delta t)$ представляет собой часть НН $1 - P(t)$, которые за промежуток Δt заплатили налоги, и эта часть тем больше, чем больше промежуток Δt .

Во втором случае, в случае уменьшения $P(t)$, когда за время Δt часть ДН превратилась в НН, данное изменение имеет вид

$$-\gamma \cdot P(t) \Delta t, \quad (5.2.2)$$

где γ – постоянная величина, $\gamma > 0$.

Известны разные методики оценки коэффициентов α и γ . В простейшем случае эти коэффициенты определяются как средние арифметические соответствующих статистических данных или через начальные условия и дополнительно заданные условия $x_1 = x(t_1)$, где x_1 – заданное значение исходной функции $x(t)$ при $t_1 \neq t_0$ (t_0 – начальный момент времени). В работе [23, с. 319–320] для модели оптимального управления резервными средствами в учебном процессе коэффициенты α и γ характеризуются интервальными оценками (доверительными интервалами) выборочных средних при доверительной вероятности β , сколь угодно близкой к единице. В [22, с. 957–959] при аналогичной модели α и γ определяются через средние значения, рассматриваемые как нечеткие числа, для которых используются треугольные представления; значения всех других величин также рассматриваются как треугольные представления соответствующих нечетких чисел. Для схожей задачи мобилизации средств эти коэффициенты вычисляются с использованием метода наименьших квадратов [33].

Для определения коэффициентов α и γ предложим следующий метод. Рассмотрим основное тождество:

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \frac{P(t + \Delta t) - R(t)}{(1 - P(t))\Delta t} (1 - P(t))\Delta t - \frac{P(t) - R(t)}{P(t)\Delta t} P(t)R(t),$$

где $R(t)$ – доля $P(t)$ (ДДН), которая сохранила за время Δt статус ДН; $\frac{P(t + \Delta t) - R(t)}{1 - P(t)}$ – доля НН, которые за Δt заплатили налоги и перешли в разряд ДН; $\frac{P(t) - R(t)}{P(t)}$ – ДДН, которые за Δt прекратили платить налоги и перешли в разряд НН.

Положим $P_n = P(t)$, $P_{n+1} = P(t + \Delta t)$, $R_n = R(t)$. С учетом записанного тождества коэффициент α определим как выборочную среднюю для выборки $\{x_n | x_n = (P_{n+1} - R_n) / (1 - P_n) \cdot \Delta_n\}$, где $n = \overline{1, N}$. Коэффициент γ определяется как средняя выборочная для выборки $\{x_n | x_n = (P_n - R_n) / P_n \cdot \Delta_n\}$, $n = \overline{1, N}$. В этом случае $P(t + \Delta t)$ является частью $P(t)$ – ДН, которые за время Δt стали НН, причем эта часть тем больше, чем больше Δt .

Изменение $\Delta P(t)$ величины $P(t)$ за время Δt определяется по формуле

$$\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha(1 - P(t))\Delta t - \gamma P(t)\Delta t. \quad (5.2.3)$$

Разделив это равенство на Δt и устремив Δt к нулю, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\alpha(1 - P(t))\Delta t - \gamma P(t)\Delta t] = \alpha(1 - P(t)) - \gamma P(t).$$

Отметим, что внутри и в левой границе каждого n -го промежутка функция ДДН дифференцируема, поскольку указанный предел существует независимо от способа стремления Δt к нулю. Следовательно, $P'(t) = \alpha(1 - P(t)) - \gamma P(t)$. Преобразуем данное равенство к виду

$$P'(t) + (\alpha + \gamma)P(t) - \alpha = 0. \quad (5.2.4)$$

Отметим, что при более сложных зависимостях (5.2.1) и (5.2.2) могут быть получены более сложные дифференциальные уравнения, решаемые, в частности, численными методами. Рассмотрение таких зависимостей представляет самостоятельный интерес и выходит за рамки данной работы.

Находим решение уравнения (5.2.4):

$$P(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + c \cdot e^{-(\alpha + \gamma)t}. \quad (5.2.5)$$

Пусть t_0 – начальный момент времени и $P(t_0) = P_0$, тогда $P_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + c \cdot e^{-(\alpha + \gamma)t_0}$, откуда $c = (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \cdot e^{(\alpha + \gamma)t_0}$ и

$$P(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \cdot e^{(\alpha + \gamma)(t_0 - t)}. \quad (5.2.6)$$

Формула 5.2.6 выражает ДДН в момент времени t . Решение устойчивое [23, с. 323–324]. При интервальной оценке [23, с. 320] $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ и $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ уравнение (5.2.6) справедливо в прямоугольнике: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ и $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$. Фиксируем t_0, t, P_0 , тогда P зависит от α и γ . Возникает задача определения промежутка изменения P . Достаточно решить оптимизационную задачу нелинейного программирования (например, численными методами) в прямоугольнике $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ и $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$. В этом случае P заключено между своими минимальным и максимальным значениями в указанном прямоугольнике.

При нечетком описании коэффициентов α и γ левая часть уравнения (5.2.6) описывается парой чисел $[P^{(1)}, P^{(2)}]$, соответствующих левой и правой границам α и γ . В этом случае анализ соответствия полученной оценки $[P^{(1)}, P^{(2)}]$ допустимому уровню осуществляется аналогично тому, как это показано в [22, с. 958–960] для резерва оценок в учебном процессе.

При $P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} < 0$ функция $P(t)$ – возрастающая выпуклая вверх функция. При $P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} > 0$ функция $P(t)$ – убывающая выпуклая вниз.

Можно показать, что линия $P(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ будет горизонтальной асимптотой. Кроме того, очевидно, $P(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \cdot e^{(\alpha + \gamma)t_0}$ при $t \rightarrow 0$ и

$P(t) \rightarrow P_0$ при $t \rightarrow t_0$.

Графики функций аналогичны соответствующим графикам, приведенным на рис. 5.1 и 5.2, (5.1.1).

Если $P(t)$ – ДДН, то увеличение $P(t)$ связано с уплатой, а уменьшение – с неуплатой налогов. Условие $P(t_0) < \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ определяет предельную границу возрастания $P(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$. При $P(t_0) > \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ эта граница соответствует предельному снижению ДДН.

5.2.2. Построение разностной модели доли добросовестных налогоплательщиков

Во многих ситуациях целесообразно рассматривать изменение ДДН в фиксированные моменты времени, отличающиеся друг от друга на временной промежуток Δt . Пусть $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $P(n) = P(t_n)$, $n = 0, 2, \dots, k$.

Разностная модель построена в [23, с. 321] для оценки качества обучения:

$$\Delta P(t_n) = P(t_n + \Delta t) - P(t_n) = \alpha(1 - P(t_n)) - \gamma P(t_n).$$

Решение разностного уравнения аналогично решению (5.1.7) с соответствующими графиками (см. (5.1.2), рис. 5.3–5.6) и таким же соотношением параметров.

Рассмотрим пример. Пусть $P(n)$ – ДДН в начале каждого месяца, начиная с сентября и заканчивая февралем, т.е. $n = \overline{1,6}$. Пусть $\alpha = 0,3$; $\gamma = 0,4$; $P_0 = 0,3$. Тогда имеем четвертый случай соотношения параметров, причем $\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} = 0,4286$.

Тип графика показан на рис. 5.5, (5.1.3).

Значения $P(n)$ вычисляются по формуле (5.1.3) и по месяцам. Показаны ниже:

№ месяца	1	2	3	4	5	6
Значение $P(n)$	0,39	0,417	0,425	0,4276	0,4283	0,4285

Значения $P(n)$ оказались почти одинаковыми вследствие того, что в данном примере $\frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ сравнительно мало отличается от P_0 . Таким образом, ДДН с каждым месяцем немного возрастает. При значительном отличии значения $P(n)$ тоже будут достаточно разными.

5.2.3. Оптимальное планирование доли добросовестных налогоплательщиков

При планировании ДДН возникает задача определения времени t , для которого $P(t) = P$. Искомое время определяется для непрерывного случая из уравнения (5.1.4), для дискретного случая – из уравнения (5.1.5).

Другая задача заключается в отыскании ДДН P_0 в начальный момент времени для данного значения P и решается также с использованием уравнения (5.1.6), для дискретного случая – уравнения (5.1.7):

$$P_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \left(P - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right) \cdot (1 - (\alpha + \gamma))^{n_0 - n}. \quad (5.2.7)$$

Вернемся к рассмотренному примеру. Зададим $P(n) = 0,427$. Из формулы (5.1.7) определим соответствующий месяц $n = 4$. Соответствующее значение $P_0 = 0,23$. Таким образом, при уменьшении $P(4)$ до значения 0,427 начальное ДДН должно быть уменьшено до 0,23.

Формулы (5.1.4) и (5.1.6) позволяют регулировать ДДН $P(t) = P$, либо изменяя рассматриваемый момент времени, либо корректируя P_0 . Аналогичную роль играют формулы (5.1.5) и (5.1.7) для дискретного случая.

Дальнейшее рассмотрение проведем для непрерывного случая (дискретный случай рассматривается аналогично).

Оптимальное управление ДДН осуществляется следующим образом. Из формулы (5.1.6) следует, что P_0 является возрастающей функцией относительно P для зависимости, изображенной на рис. 5.5. Пусть $P'_0 \leq P_0 \leq P''_0$. Значение P'_0 будет минимизировать $P(t)$.

Для зависимости, изображенной на рис. 5.6, проведем следующие рассуждения. Придадим аргументу t приращение Δt . Найдем

$$\begin{aligned} \Delta P_0(t) = P_0(t + \Delta t) - P_0(t) &= \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + \left(P(t + \Delta t) - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right) \cdot e^{(\alpha + \gamma)(t + \Delta t - t_0)} - \\ &\quad - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} - \left(P(t) - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right) \cdot e^{(\alpha + \gamma)(t - t_0)}. \end{aligned}$$

Положим $P(t + \Delta t) = P(t) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Тогда $\Delta P_0(t) = e^{(\alpha + \gamma)(t - t_0)} \cdot \left[(e^{(\alpha + \gamma)\Delta t} - 1) \left(P(t) - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\right) \right]$.

Отсюда следует, что при

$$P(t) < \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + e^{(\alpha + \gamma)\Delta t} \cdot \varepsilon / (e^{(\alpha + \gamma)\Delta t} - 1) \quad (5.2.8)$$

приращение $\Delta P_0(t) < 0$, в противном случае $\Delta P_0(t) \geq 0$.

Следовательно, если выполняется неравенство (5.2.8), при убывании P величина P_0 также будет убывать. Поэтому $P_0 = P'_0$ будет оптимальным значением, минимизирующим $P(t)$. В случае выполнения противоположного неравенству (5.2.8) неравенства оптимальным значением, минимизирующим $P(t)$, является $P_0 = P''_0$. На основе формул (5.1.4) и (5.1.6) можно управлять ДДН $P(t)$.

Научная значимость и новизна данной работы заключается в разработке модели мобилизации налоговых платежей и анализе зависимости доли добросовестных налогоплательщиков от параметров уравнений, описывающих данную модель. Раскрыто существо параметров модели, предложен новый метод их определения. Показано моделирование составляющих доли добросовестных налогоплательщиков. Построенная модель позволяет осуществлять оптимальное управление мобилизацией сбора налогов при четких и нечетких условиях.

Полученные результаты могут найти применение не только в экономике, но и в технике при моделировании работы технического устройства, состоящего из стабильно работающих и восстанавливаемых узлов. В военном деле аналогичная модель представляет оптимальное планирование боеготовых и подлежащих восстановлению единиц боевой техники. В социальной сфере, кроме рассмотренных моделей учебного процесса [22, 23], подобную модель можно применять, например, при описании численности здоровых, выздоровевших и заболевших людей в период эпидемии. Разработанную модель можно использовать для моделирования работы автозаправочных станций; аналогичным образом моделируется работа магазина, банка и т.п.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя предварительные итоги, авторам хотелось бы остановиться на двух вопросах: о возможностях использования разработанных в монографии математических методов и моделей и о перспективах развития метода математического моделирования.

Используя предложенные в монографии модели и методы, можно:

1) разработать «интеллектуального помощника» страхового агента, который поможет учитывать при оформлении страховки свойства личности страхующегося лица, обеспечивая оптимальную процедуру голосования;

2) принимать более обоснованные решения в условиях риска и неопределенности;

3) быстро и оперативно находить оптимальные решения для широкого круга практически важных задач;

4) рационально распределять ресурсы и средства при решении задач планирования и управления;

5) обоснованно формировать оптимальный портфель инвестиций;

6) налаживать взаимодействие членов коллектива и эффективно разрешать конфликтные ситуации;

7) прогнозировать результаты конкуренции политических партий, групп, объединений;

8) управлять резервами денежных средств в личном хозяйстве, производственных и других фондах;

9) повышать собираемость налогов и сборов и др.

Процесс цифровизации общества и внедрение систем искусственного интеллекта вызывает необходимость использования имеющихся и разработки новых методов и моделей созданием алгоритмов, шаблонов, программ.

Дальнейшее развитие разработанных в монографии математических методов и моделей связано с использованием их в составе базы моделей в системах поддержки принятия решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абчук В.А., Матвейчук Ф.А. Томашевский Л.П. Справочник по исследованию операций. М.: Воениздат, 1979. 368 с.
2. Алтунин А.Е., Семухин М.А. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: ТГУ, 2003. 352 с.
3. Анисимов А.Л., Ширпужев С.В. Об оптимизации затрат на взимание налогов и сборов // Известия Уральского государственного экономического университета. 2016. № 5 (67). С. 39–45.
4. Базилевский М.П. Отбор информативных регрессоров с учетом мультиколлинеарности между ними в регрессионных моделях как задача частично-булевого линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. № 2 (22). С. 104–118.
5. Базилевский М.П. Сведение задачи отбора информативных регрессоров при оценивании линейной регрессионной модели по методу наименьших квадратов к задаче частично-булевого линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. № 1 (20). С. 108–117.
6. Баканова А.П., Логинов К.В., Шиков А.Н. Проектирование системы управления корпоративными знаниями и компетенциями в инновационной компании // Региональные проблемы преобразования экономики. № 6 (104). С. 25–34.
7. Березнев В.А. О полиномиальной сложности одной модификации симплекс-метода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. № 44 (7). С. 244–260.
8. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр. М.: Радио и связь, 1983. 216 с.
9. Блау С.Л., Федорова Л.П. Модель финансирования инвестиционной деятельности за счет мобилизации внутрифирменных ресурсов // Фундаментальные и прикладные исследования кооперативного сектора экономики. 2016. № 3. С. 17–21.
10. Большакова И.В. Нечеткие доходности в портфельной теории (метод треугольных нечетких чисел) // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. 2020. № 2. С. 50–59.
11. Бтемирова Р.И. Метод проектов в условиях современного высшего образования // Современные проблемы науки и образования. 2016. № 3. С. 217.
12. Буравлев А.И. Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сторон // Вооружение и экономика. 2009. № 4 (8). С. 4–8.

13. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.
14. Восканян А.Б., Ершова Г.И. Военно-прикладная математика. М.: ВКА ПВО, 1983. 188 с.
15. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Классификации групп учащихся при дифференцированно-групповой форме обучения // Саморазвивающаяся среда технического университета: Материалы Всерос. науч.-практ. конф.: в 3 ч. Тверь: ТвГТУ. 2017. С. 74–78.
16. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Математическое программирование. Тверь: ТвГТУ, 2017. 88 с.
17. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Способы оптимизации портфеля оценочных баллов // Вестник Тверского государственного технического университета. 2008. № 13. С. 267–273.
18. Ганичева А.В. Прикладная статистика. СПб: Лань, 2017. 172 с.
19. Ганичева А.В. Ганичев А.В. Методы и модели принятия оптимальных решений. Тверь: Тверская ГСХА, 2016. 117 с.
20. Ганичева А.В. Ганичев А.В. Модель согласования портретов преподавателей и обучаемых // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. Т. 8. № 3 (30). С. 16–17.
21. Ганичева А.В. Исследование влияния психологических характеристик индивида на величину страхования // Проблемы анализа риска. 2011. Т. 5. № 5. С. 81–97.
22. Ганичева А.В. Математическая модель оптимального управления резервными средствами в учебном процессе // В мире научных открытий. 2015. № 12-3 (72). С. 953–964.
23. Ганичева А.В. Математическая модель оценки качества обучения // В мире научных открытий. 2015. № 61 (66). С. 313–326.
24. Ганичева А.В. Математическая модель планирования мероприятий // В мире научных открытий. Сер.: Экономика и инновационное образование. 2011. № 6 (18). С. 254–260.
25. Ганичева А.В. Математическое описание типологии учащихся // Мир лингвистики и коммуникации: электронный научный журнал. 2014. Т. 1. № 35. С. 36–42.
26. Ганичева А.В. Матричная игра размещения консультационных пунктов // Европейский журнал социальных наук. 2011. № 9 (12). С. 424–429.
27. Ганичева А.В. Метод оптимального страхования // Управление экономическими системами: Электронный научный журнал. 2011. № 11 (35). С. 46.
28. Ганичева А.В. Метод решения некоторых классов оптимизационных задач // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. № 7 (2). С. 43–54.

29. Ганичева А.В. Модель менеджмента качества учебных планов // Качество. Инновации. Образование. 2012. № 4 (83). С. 37–41.
30. Ганичева А.В. Модель мобилизации налоговых платежей // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2018. № 2 (43). С. 98–104.
31. Ганичева А.В. Определение оптимальных сроков инвестирования // Математические методы, модели и информационные технологии в АПК (Немчиновские чтения). Труды XV Межд. науч.-практ. конф. Независимого научного аграрно-экономического общества России. М.: РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева, 2011. С. 112–115.
32. Ганичева А.В. Оптимальное решение и оценка полезности организационных вопросов // Ярославский педагогический вестник. 2011. № 3 (2). С. 53
33. Ганичева А.В. Оценка эффективности процесса обучения // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2014. № 4 (29). С. 301–304.
34. Ганичева А.В. Системный подход к процессу получения и формирования знаний // В мире научных открытий. 2011. № 12 (24). С. 83–101.
35. Ганичева А.В. Согласование интересов участников учебного процесса // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2017. № 4 (41). С. 350–355.
36. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математическая модель взаимоотношений индивидуумов // Научное обозрение. Международный научно-практический журнал. 2018. № 3. С. 4.
37. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Метод проектирования и приращений решения задач линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2022. № 10 (3). С. 1–16.
38. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Метод решения некоторых классов оптимизационных задач // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. № 7 (2). С. 43–54.
39. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Приближенный метод оптимизации задач нелинейного программирования // Прикладная математика и вопросы управления. 2022. № 4. С. 9–25.
40. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Принятие решений на основе рисков ситуаций и процессов // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2014. № 4 (29). С. 226–230.
41. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Риск и полезность ситуаций и процессов // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2015. № 2 (31). С. 247–251.
42. Гатина В.Д. Модели Ланчестера в профильном курсе «Информатика и ИКТ» // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2016. № 1 (39). С. 278–283.

43. Гильманов В.В. Партийные модели рекрутирования правящих элит и лидеров. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: История. Политология. 2017. № 22 (271). С. 189–199.
44. Григореевская Л.П., Григореевский Л.Б. Поиск критериев оптимального содержания обучения на лекционном и практическом занятиях // Сибирский педагогический журнал. 2007. № 11. С. 54–66.
45. Данданян А.Н., Хайдарова Л.А., Курганова М.В. Решение задач нелинейного программирования по условиям Куна-Таккера // Наука XXI века: актуальные направления развития. 2020. № 1-2. С. 24–27.
46. Динамические модели информационного управления в социальных сетях / И.Н. Барабанов [и др.] // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 172–182.
47. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталева Е.Ю. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе. М.: Финансы и статистика, 2000. 176 с.
48. Душкин Р.В. Теоретико-множественная модель функционального подхода к интеллектуализации процессов управления зданиями и сооружениями // Программные продукты и системы. 2019. № 2. С. 306–312.
49. Жевнеров В.А. Модификация симплекс-метода на основе принципа эволюции // Проблемы управления. 2004. № 1. С. 28–31.
50. Жилина А.А., Кострова В.Н., Преображенский Ю.П. Разработка методики постановки задачи выбора управленческого решения на основе оптимизационного подхода // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. № 6 (1). С. 243–253.
51. Канищева О.И. Применение математических средств при моделировании военных конфликтов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2017. № 8-1 (34-1). С. 200–204.
52. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Математические методы в системах принятия решений: учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2005. 311 с.
53. Кежаев В.А., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Обоснование решений в задачах целераспределения с использованием инновационных технологий дискретного программирования // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2012. № 2 (72). С. 97–103.
54. Козелков О.А. Системный анализ логистической производственной системы на основе теоретико-множественных моделей // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2014. С. 115–123.
55. Кононов В.Б. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системы обработки информации. 2003. № 1. С. 59–62.

56. Копылов А.В., Игольникова О.С. Методика управления совместными рисками инновационного проекта на основе экономико-математических методов // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2010. № 2 (12). С. 131–134.
57. Коридзе Э.З. Вычислительная процедура построения моделей инвестиционного планирования // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2010. № 16. С. 81–87.
58. Красс М.С., Чупрыков Б.П. Математика для экономистов: учеб. пособие. СПб.: Издательский дом «Питер», 2010. 496 с.
59. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. М.: ЮНИТИ, 2005. 407 с.
60. Куприянов Ю.В. К вопросу формирования теоретико-множественной модели производственной бизнес-системы на основе функционально-ресурсного подхода // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2015. № 4 (16). С. 45–51.
61. Лискина Е.Ю. Некоторые математические модели налогов и сборов в России // Вестник Рязанского государственного университета. 2014. № 2 (43). С. 168–182.
62. Маркина И.А. Переверзев Е.В. Оценка рисков при внутри-корпоративных расчетах // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2013. № 4 (25). С. 38–41.
63. Математическое моделирование социальных процессов: сборник трудов / под ред. А.П. Михайлова. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Социол. фак. 2013. Вып. 15. М.: ООО «МАКС Пресс». 252 с.
64. Мачуева Д.А., Ажмухамедов И.М. Моделирование процесса информационного взаимодействия в социальных системах // Системы управления, связи и безопасности. 2018. № 2. С. 18–39.
65. Михайлов Р.Л., Поляков С.Л. Модель оптимального распределения ресурсов и исследование стратегий действий сторон в ходе информационного конфликта // Системы управления, связи и безопасности. № 4. С. 323–344.
66. Мутовкина Н.Ю., Семенов Н.А. Модель изменения типов интеллектуальных агентов в методологии системной динамики anylogic // Программные продукты и системы. 2018. № 1. С. 145–151.
67. Мушик Э., Мюллер П. методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990. 208 с.
68. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами: сборник трудов. 2012. № 37. С. 25–62.
69. Обзор современных моделей и методов анализа временных рядов динамики процессов в социальных, экономических и социотехнических системах / Е.Г. Андрианова [и др.] // Российский технологический журнал. 2020. № 8 (4). С. 7–45.

70. Павлов В.А. Математические модели социально-экономических процессов в обществе // Вестник Рязанского государственного университета. 2011. № 33. С. 177–189.
71. Перепелица Д.Г. Изучение возможностей практического использования модели оптимизации инвестиционного портфеля с применением нечетких множеств на российском финансовом рынке // Интернет-журнал «Науковедение». 2016. Т. 8. № 5.
72. Петров А.П., Маслов А.И., Цаплин Н.А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование. 2015. № 27 (12). С. 137–148.
73. Петров А.П., Прончева О.Г. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве с двухкомпонентной повесткой // Математическое моделирование. 2019. № 31 (7). С. 91–108.
74. Письменная В.А., Якутин А.В. Повышение эффективности решения задачи целераспределения в системах воздушно-космической обороны // Вестник Концерна ВКО Алмаз-Антей. 2017. № 1. С. 76–81.
75. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов. М.: Логос, 2001. 296 с.
76. Пудова М.В. Новые алгоритмы решения задач линейного программирования со специальной структурой // Дискретн. анализ и исследование операций. Сер. 2. 2002. Т. 9. № 1. С. 78–98.
77. Реут В.Б. Математическая экономика. Ч. 1: Графические и математические модели в микроэкономике: учеб. пособие. Тверь: ТГУ, 2000. 139 с.
78. Розанова Л. В. Математическое моделирование влияния темпераментов на динамику межличностных взаимодействий в малых группах // Математические структуры и моделирование. 2002. № 10. С. 162–169.
79. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Высшая школа, 2002, 288 с.
80. Сазанова Л.А. Модель Ланчестера как дискретная управляемая система // Международный журнал социальных и гуманитарных наук. 2016. Т. 1. № 1. С. 202–204.
81. Сидоров В.В. Коалиционная политика политических партий в парламентских системах. Казань: Казан. ун-т, 2016. 149 с.
82. Славянов А.С. Анализ и практическое применение моделей распределения ресурсов // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. № 9. С. 228–244.
83. Сосина Н.А. Пример диверсификации портфеля ценных бумаг на основе корреляционного анализа // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения: материалы

- Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1. Тольятти: Качалин А.В., 2019. С. 359–365.
84. Стеряков А. А. Об одном универсальном методе построения моделей для сложных многоагентных систем // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 4. С. 513–523.
 85. Сумин В.И., Кузнецова Л.Д., Лукин М.А. Определение коэффициентов математической модели управления качеством обучения методом линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. № 3 (22). С. 214–222.
 86. Таныгина В.В. Решение задачи нелинейного программирования методом Франка-Вулфа // Научному прогрессу – творчество молодых. 2019. № 1. С. 81–84.
 87. Тимофеев А.Г., Лебединская О.Г. Поиск быстрого решения задачи нелинейного программирования // Транспортное дело России. 2019. № 2. С. 48–51.
 88. Трифонов Д.А. К вопросу о сущности и способах управления рисками банковского портфеля // Бизнес. Образование. Право. Вестник Волгоградского института бизнеса. 2011. № 1 (14). С. 168–176.
 89. Фирсова И., Глухова Е. Математическая модель отношений между двумя государствами для решения проблем вооруженного конфликта // Финансовая жизнь. 2015. № 1. С. 25–28.
 90. Фомин С.А. Быстрый приближенный алгоритм для задачи положительного линейного программирования // Труды ИСП РАН. 2004. Т. 6. С. 27–40.
 91. Хасанов А.С. Об особенностях алгоритмов решения задач линейного программирования с неограниченными областями допустимых решений. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2017. № 1. С. 113–123.
 92. Чернов Г., Мозес Л. Элементарная теория статистических решений. М.: Советское радио, 1962. 406 с.
 93. Чуев В.Ю. Вероятностная модель боя многочисленных группировок // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2011. Спец. выпуск «Математическое моделирование». С. 223–232.
 94. Чунаков А.И. Оценка эффективности мероприятий социального маркетинга // Известия ВолгГТУ. 2006. Т. 11. № 6. С. 216–218.
 95. Шаповалов А.В., Преображенский А.П., Чопоров О.Н. Возможности применения методов оптимизации в управлении портфелями проектов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. № 8 (1). С. 32.
 96. Шаптала В.Г., Радоуцкий В.Ю., Ветрова Ю.В. Разработка алгоритмов оптимального распределения сил и средств, предназначенных для ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций // Вестник

- Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2015. № 6. С. 257–260.
97. Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121–138.
 98. Шевченко В.Н. Линейное программирование: история, достижения, проблемы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия «Математическое моделирование и оптимальное управление». 2003. № 1. С. 216–227.
 99. Юдин А.В. Целераспределение неоднородных средств подавления методом двух функций // Актуальные проблемы науки и техники: материалы IV Межд. конкурса науч.-исслед. работ. Уфа: ООО «Научно-издательский центр "Вестник науки"», 2021. С. 11–15.
 100. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.: Наука, 1969. 424 с.
 101. Antczak T. An-approximation Method in Nonlinear Vector Optimization // Nonlinear Analysis. 2005. Vol. 63(2). P. 225–236.
 102. Approximation Algorithms for Optimization of Combinatorial Dynamical Systems / Y. Insoon [et al.] // Approximation Algorithms for Optimization of Combinatorial Dynamical Systems. IEEE Trans. Autom. Control. 2016. Vol. 61(9). P. 2644–2649.
 103. Bakanova A.P., Shikov A.N. The Method of Employee Competencies Management Based on the Ontological Approach // CEUR Workshop Proceedings. 2020. № 2590. P. 1–9.
 104. Chen X.Y., Zhang A.C. Modeling and Optimal Control of a Class of Warfare Hybrid Dynamic Systems Based on Lanchester Attrition Model // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Article ID 481347. 7 p.
 105. Comissiong D.M.G., Sooknanan J. A Review of the Use of Optimal Control in Social Models // Internat. J. of Dynamics and Control, 2018. Vol. 6 (4). P. 1841–1846.
 106. Control and Analytical Activity of Teachers in the Educational Institution N.I. Levshina [et al.] // International Journal of Innovation, Creativity and Change. 2020. Vol. 12 (2). P. 725–733
 107. Development of a Mathematical Model of Conflict between the Parties in the Implementation of the Offset Transaction / S. Kubiv [et al.] // Technology Audit and Production Reserves, Socionet; Technology Audit and Production Reserves. 2020. Vol. 2. Issue 4 (52). P. 28–31.
 108. Djukic R.R. Partial Stability of Multi Attribute Decision-making Solutions for Interval Determined Criteria Weights – the Problem of Nonlinear Programming // Military Technical Courier. 2020. Vol. 68. Issue 3. P. 488–529.
 109. Dominiononi G., Marasco A., Romano A. A Mathematical Approach to Study and Forecast Racial Groups Interactions: Deterministic Modeling and

- Scenario Method // *International Journal of Methodology*. 2018. Vol. 52. Issue 4. No 25. P. 1929–1956.
110. Dupuy T. *Understanding War. History and Theory of Combat*. 2nd ed. Nova Publishers, 1998. 312 p.
 111. Filippova A.S. Economic-mathematical Modeling of a Multi-criteria Optimization Management Problem of a Retail Unit of a Commercial Bank Perm University Herald // *Economy*. 2019. Vol. 14. Issue 1. P. 93–109.
 112. Ganicheva A.V. Optimization Models of Components of Educational Process *British Journal of Mathematics & Computer Science*. 2016. Vol. 14 Issue 5. P. 1–11.
 113. Hans M.D., Bock G., Kostina E. An Approximation Technique for Robust Nonlinear Optimization // *Mathematical Programming: Series A and B*. 2006. Vol. 107. Issue 1-2. P. 213–230.
 114. Helmbold R.L. Osipov: The ‘Russian Lanchester’ // *European Journal of Operations Research*. 1993. Vol. 65. No 2. P. 278–288.
 115. Jensen P.A., Bard J.F. *Nonlinear Programming Methods. S1 Separable Programming*. Wiley, 2002. 700 p.
 116. Kataev A.V., Kataeva T.M., Makarova E.L. Project Management: Mathematical Models of Optimal Executors’ Appointment for Project Works // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Серия «Экономика. Управление. Право»*. 2016. № 3. С. 294–299.
 117. Lanchester F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. London: Constable and Co, 1916. 243 p.
 118. Lanchester Model for Three-way Combat / M. Kress [et al.] // *European Journal of Operational Research*. 2018. Vol. 264 (1). P. 46–54.
 119. Luenberger D.G., Ye. Y. *Linear and Nonlinear Programming*. Basel: Springer International Publishing, 2016. 546 p.
 120. Mai T., Mortari D. Theory of Functional Connections Applied to Quadratic and Nonlinear Programming under Equality Constraints // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2022. Vol. 406 (4). P. 113912.
 121. Mathematical Model for Production Plan Optimization A Case Study of Discrete Event / S. Rezig [et. al.] // *Systems Mathematics*. 2020. Vol. 8 (6). P. 955.
 122. Menshikh V.V., Samorokovsky A.F., Avsentev O.S. Models of Resource Allocation Optimization when Solving the Control Problems in Organizational Systems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 973. Issue 1. P. 12–40.
 123. Misra A.K., Kumar A. A Simple Mathematical Model for the Spread of Two Political Parties // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 2012. Issue 17 (3). P. 343–354.
 124. Modeling Conflict in a Social System Using Diffusion Equations / A.Yu. Petukhov [et al.] // *Simulation*. 2018. Vol. 94 (12). P. 1053–1061.

125. Optimization of Faculty Time-Management: Some Practical Ideas / M.J. García [et al.] // *International Journal of Engineering Education*. 2018. Vol. 34. Issue 5. P. 1467–1478
126. Rinaldi S., Della Rossa F. Conflicts Among N Armed Groups: Scenarios from a new Descriptive Model // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 92 (3). P. 3–12.
127. Salman A.M., Al-Jilawi A.S. Solving Nonlinear Optimization Problem Using Approximation Methods // *International Journal of Health Sciences*. 2022. Vol. 6/. P. 1578–1586.
128. Still C., Westerlund T. A Linear Programming-based Optimization Algorithm for Solving Nonlinear Programming Problems // *European Journal of Operational Research*. 2010. Vol. 200 (3). P. 658–670.
129. Structural Control System for the Educational Program Based on Information Technology / S.A. Bronov [et al.] // *European Proceedings of Social and Behavioural Sciences Epsbs*. 2020. Vol. 90. P. 286–293.
130. Sumets O. The Eventual Model of the Algorithm for Designing the Logistics System of a Production Enterprise // *Intellectualization of Logistics and Supply Chain Management*. 2021. Vol. 9 (8). P. 53–66.
131. Taylor J., Brown G. Canonical. Methods in the Solution of Variable. Coefficient Lanchester-Type Equations of. Modern Warfare // *Operations Research*. 1977. Vol. 24 (1). Issue 45. P. 44–69.
132. Universal Method for Solving Optimization Problems under the Conditions of Uncertainty in the Initial Data / L. Raskin [et. al.] // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies* 2021. Vol. 1 (4). P. 46–53.
133. Wang J. Approximate Nonlinear Programming Algorithms for Solving Stochastic Programs with Recourse // *Annals of Operations Research*. 1991. Vol. 31. Issue 1-4. P. 371–384.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Принятие решений в условиях рискованных ситуаций и процессов	6
§ 1.1. Исследование влияния отношения индивида к риску на принятие решений	6
1.1.1. <i>Общая постановка задачи</i>	7
1.1.2. <i>Модели страхования.....</i>	9
1.1.3. <i>Типология личности</i>	11
1.1.4. <i>Метод оптимального страхования</i>	20
1.1.5. <i>Оптимальное функционирование системы «страховщик – страхователь»</i>	26
§ 1.2. Риск и полезность ситуаций и процессов	29
1.2.1. <i>Векторное описание ситуаций и процессов.....</i>	29
1.2.2. <i>Измерение ситуаций и процессов.....</i>	31
1.2.3. <i>Преобразование ситуаций и процессов.....</i>	35
1.2.4. <i>Портфель ситуации и процесса.....</i>	36
§ 1.3. Методы принятия решений на основе анализа риска и полезности.....	37
1.3.1. <i>Риск и полезность для дискретного множества исходов.....</i>	37
1.3.2. <i>Определение риска и полезности для непрерывного множества факторов и результатов.....</i>	42
§ 1.4. Графоаналитический метод принятия решений в информационных условиях риска и неопределенности.....	45
Глава 2. Методы решения некоторых классов оптимизационных задач.....	52
§ 2.1. Максимизация линейной функции при одном линейном ограничении с положительными коэффициентами	53
§ 2.2. Максимизация линейной функции при нескольких линейных ограничениях	57
§ 2.3. Метод проектирования и приращений при решении задач линейного программирования	59
2.3.1. <i>Метод проектирования.....</i>	59

2.3.2. Практическая реализация метода проектирования	65
2.3.3. Метод приращений	67
2.3.4. Практическая реализация метода приращений	69
2.3.5. Оценка сложности метода проектирования и приращений.....	71
§ 2.4. Приближенный метод оптимизации задач нелинейного программирования.....	74
2.4.1. Материалы и методы.....	75
2.4.2. Результаты и их обсуждение	79
Глава 3. Моделирование задач распределения ресурсов, инвестирования, диверсификации и логистики	83
§ 3.1. Метод решения задачи оптимизации распределения целочисленного ресурса	84
3.1.1. Задача о распределении ресурсов	85
3.1.2. Материалы и методы	86
3.1.3. Результаты и их обсуждение	91
§ 3.2. Математическая модель оптимизации распределения ресурсов с учетом важности объектов	92
3.2.1. Рациональное распределение ресурсов	92
3.2.2. Материалы и методы	93
§ 3.3. Метод расчета инвестиций в условиях неопределенности.....	97
§ 3.4. Математическая модель диверсификации.....	100
3.4.1. Анализ математической модели диверсификации портфеля в учебном процессе.....	100
3.4.2. Анализ математической модели диверсификации портфеля инвестиций.....	103
§ 3.5. Динамические модели планирования инвестиций.....	106
3.5.1. Покупка нового оборудования	107
3.5.2. Вложение инвестиций в проекты	110
§ 3.6. Системный анализ логистического процесса.....	111
Глава 4. Моделирование динамического взаимовлияния и противоборства индивидуумов в группах.....	116
§ 4.1. Модель динамического взаимовлияния индивидуумов в группах	116
§ 4.2. Моделирование конфликтных ситуаций	124

4.2.1. Методы анализа конфликтных ситуаций	124
4.2.2. Постановка задачи. Построение размеченных графов состояний противоборствующих сторон	125
4.2.3. Определение плотностей переводящих потоков и эффективности единиц.....	127
4.2.4. Дифференциальная модель средних численностей сторон.....	128
4.2.5. Метод оценки средних численностей сторон. Рекуррентная формула.....	129
4.2.6. Оценка основных характеристик системы.....	134
§ 4.3. Математическая модель конкуренции политических партий	137
4.3.1. Методы и модели исследования социальных процессов и явлений	137
4.3.2. Материалы и методы	138
4.3.3. Результаты и их обсуждение	142
Глава 5. Методы и модели резервов	144
§ 5.1. Математическая модель создания резерва денежных средств ...	144
5.1.1. Построение непрерывной модели резерва денежных средств...	144
5.1.2. Построение разностной модели резерва денежных средств....	147
5.1.3. Оптимальное планирование резерва	149
5.3.4. Моделирование составляющих резерва	150
§ 5.2. Модель мобилизации налоговых платежей.....	151
5.2.1. Построение дифференциальной модели изменения доли добросовестных налогоплательщиков.....	152
5.2.2. Построение разностной модели доли добросовестных налогоплательщиков.....	155
5.2.3. Оптимальное планирование доли добросовестных налогоплательщиков.....	156
Заключение.....	158
Библиографический список.....	159

Антонина Валериановна Ганичева
Алексей Валерианович Ганичев

**Методы и модели решения задач принятия решений,
оптимизации и распределения ресурсов**

Монография

Редактор М.Б. Юдина
Корректор С.В. Зорикова

Подписано в печать 20.02.2024

Формат 60×84/16

Физ. печ. л. 10,75

Тираж 50 экз.

Усл. печ. л. 9,99

Заказ № 10

Бумага писчая

Уч.- изд. л. 9,35

С – 10

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22