МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

В.Н. Богатиков, В.А. Павлов

Дискретная математика

Учебное пособие

Тверь 2023

УДК 004.021(075.8)
ББК 22.12я7

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные процессы и управление» Тамбовского государственного технического университета Дмитриевский Б.С.; кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Автоматизация производственных процессов» Новомосковского института (филиала) РХТУ им. Д.И. Менделеева Лопатин А.Г.

Богатиков В.Н., Павлов В.А. Дискретная математика: учебное пособие. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2023. 132 с.

Представлен материал курса «Дискретная математика», читаемого на кафедре информационных систем факультета информационных технологий ТвГТУ, в частности алфавитные операторы, теоретические, алгоритмические системы, элементы теории формальных языков и грамматик, порядок оценки сложности вычислений.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 09.03.02 Информационные системы и технологии. Может быть полезно для бакалавров, магистрантов и аспирантов, обучающихся по другим направлениям и специальностям в сфере информационных систем и технологий.

Валерий Николаевич Богатиков
Владимир Андреевич Павлов

Дискретная математика

Учебное пособие

Редактор С.В. Борисов
Корректор Я.А. Петрова

Подписано в печать 04.09.2023
Формат 60×84/16 Бумага писчая
Физ. печ. л. 8,25 Усл. печ. л. 7,67 Уч.-изд. л. 7,18
Тираж 100 экз. Заказ № 51 С – 51

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

ISBN 978-5-7995-1304-7

Оглавление

Введение

Дискретная математика – самостоятельное направление современной математики. Она изучает используемые в технике, информатике и других областях знаний математические модели объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире.

В настоящем учебном пособии содержание разделов дискретной математики определяется требованиями государственного образовательного стандарта профессионального образования, предъявляемыми к дисциплине «Дискретная математика» специальности «Прикладная информатика в экономике», а также родственных специальностей. К разделам дискретной математики относятся элементы теории множеств, математической логики, теории графов.

Программа курса подразумевает выполнение контрольной работы и расчетно-графического задания. Студенты, обучающиеся по ускоренной программе (3,5 года), выполняют только контрольную работу.

Дискретная математика, или дискретный анализ, – область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечных множествах. В связи с этим в качестве синонима иногда используют термин «конечная математика». Можно считать общепринятым деление математики на непрерывную и дискретную. Последняя представляет собой важное направление, имеющее предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики предполагает отказ от основных понятий классической математики – предела и непрерывности. Таким образом, для задач дискретной математики обычные средства классического анализа являются вспомогательными.

Дискретная математика и непрерывная дополняют друг друга. Их понятия и методы часто пересекаются. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения, поэтому в таких случаях выбирают либо непрерывную, либо дискретную математику.

При исследовании, анализе и решении управленческих проблем, моделировании объектов исследования и анализе широко используют дискретные методы формализованного представления, являющиеся предметом рассмотрения в дискретной математике. К ним относятся методы, основанные на теоретико-множественных представлениях, графы, алгоритмы, математическая логика и др.

Дискретная математика предлагает:

универсальные средства (языки) формализованного представления;

способы корректной переработки информации, представленной на этих языках;

возможности и условия перехода с одного языка описания явлений на другой с сохранением содержательной ценности моделей.

Сегодня дискретная математика является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и процессов – обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики.

1. Начальные понятия теории множеств

1.1. Элементы и множества

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных объектов. Философы утверждают, что мир – единое неразрывное целое, а выделение в нем объектов – это не более чем произвольный акт нашего мышления, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину. Тем не менее выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому совсем не удивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум то, что оно состоит из элементов. Для конкретики остановимся на двух определениях.

Определение 1. Под множеством **S** понимают любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества **S**.

Определение 2. Под множеством понимают объединение в целое определенных и вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: **A, B, C, …**; а элементы множеств – строчными буквами: **a, b, c, …** .

Если объект **x** является элементом множества **M**, то говорят, что **x** принадлежит **M**: $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. В противном случае говорят, что **x** не принадлежит **M**: $\mathbf{x} \notin \mathbf{M}$.

В определении множества, принадлежащем немецкому математику Г. Кантору, главным является то, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить в множество, то относительно них существует значительная свобода.

Пример 1. Множество студентов, присутствующих на лекции, множество четных чисел и т.д.

Определение 3. Множество **A** называется подмножеством множества **B**, если всякий элемент из **A** является элементом **B**. Если **A** является подмножеством **B** и **B** не является подмножеством **A**, то говорят, что **A** является строгим (собственным) подмножеством **B**.

В первом случае обозначают $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, во втором случае $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Определение 4. Множество, не содержащее элементов, называется пустым $\varnothing$, оно является подмножеством любого множества. Множество **U** называется универсальным, т.е. все рассматриваемые множества являются его подмножеством.

Рассмотрим два определения равенства множеств:

1) множества **A** и **B** считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Пишут $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, в противном случае – $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$;

2) множества **A** и **B** считаются равными, если $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

Способы задания множеств:

перечислением элементов: $\mathbf{M} = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}\}$, т.е. списком своих элементов;

характеристическим предикатом: $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{P(x)}\}$ (описанием характеристических свойств, которыми должны обладать его элементы);

порождающей процедурой: $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{f}\}$, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры (например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки).

Замечание. При задании множеств перечислением обычно заключают в фигурные скобки обозначения элементов и разделяют запятыми. Перечислением можно задавать только конечные множества (число элементов множества конечно, в противном случае множество называется бесконечным). Характеристический предикат – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае не принадлежит. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества. Бесконечные множества задаются характеристическим предикатом или порождающей процедурой.

Пример 2:

1. $\mathbf{M} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4}\}$ – перечисление элементов множества.
2. $\mathbf{M} = \{\mathbf{m} \mid \mathbf{m} \in \mathbf{N}$ и $\mathbf{m} \leq \mathbf{10}\}$ – характеристический предикат.
3. Числа Фибоначчи задаются условиями (порождающей процедурой): $\mathbf{a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$ для $\mathbf{n > 2}$.

Определение 5. Мощность конечного множества **A** – это число его элементов. Мощность множества обозначают $|\mathbf{A}|$.

Пример 3. $|\varnothing| = \mathbf{0}$, $|\{\varnothing\}| = \mathbf{1}$.

Определение 6. Множества называются равномощными, если их мощности совпадают.

Определение 7. Множество всех подмножеств множества **A** называется булеаном **P(A)**.

Известно, что если множество **A** содержит **n** элементов, то множество **P(A)** содержит $\mathbf{2^n}$ элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества **A** в виде $\mathbf{2^A}$.

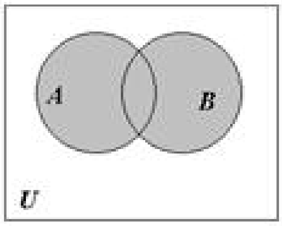
Пример 4.

$\mathbf{A = \{0, 1, 2\}, P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}}$.

1.2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера – Венна

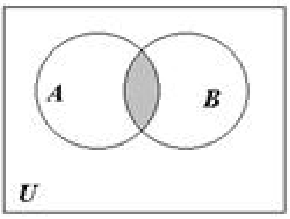
Нижеследующие определения проиллюстрированы диаграммами Эйлера – Венна.

Определение 8. Объединением множеств **A** и **B** называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A**, **B**:



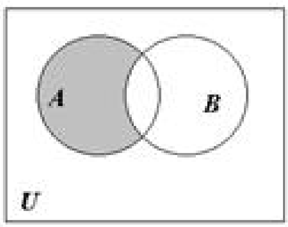
$$\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A} \text{ или } \mathbf{x \in B\}}.$$

Определение 9. Пересечением множеств **A** и **B** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству **A**, так и множеству **B**:



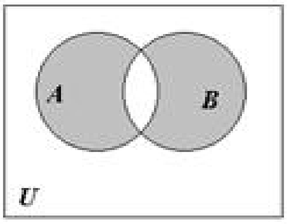
$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.}$$

Определение 10. Разностью множеств **A** и **B** называется множество всех тех и только тех элементов **A**, которые не содержатся в **B**:



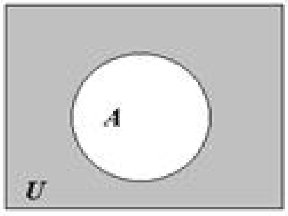
$$\mathbf{A \setminus B = \{x \mid x \in A} \text{ и } \mathbf{x \notin B\}.}$$

Определение 11. Симметрической разностью множеств **A** и **B** называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству **A**, либо только множеству **B**:



$$\mathbf{A + B = \{x \mid} \text{ либо } \mathbf{x \in A,} \text{ либо } \mathbf{x \in B\}}.$$

Определение 12. Абсолютным дополнением множества **A** называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству **A**:



$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{U \setminus A}.$$

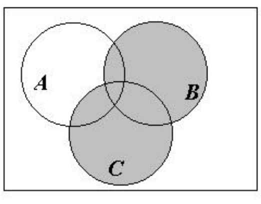
Диаграммы Эйлера – Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество **U**, а внутри него – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и быть обозначены соответствующим образом. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, следует заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

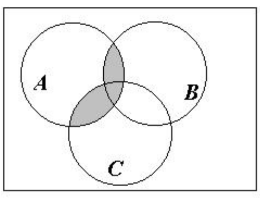
Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

Пример 5. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость соотношения $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

Левая часть соотношения:

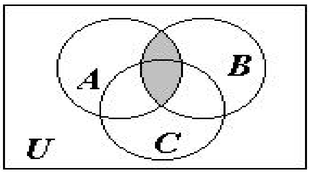
$\mathbf{B \cup C}$ $\mathbf{A \cap (B \cup C)}$

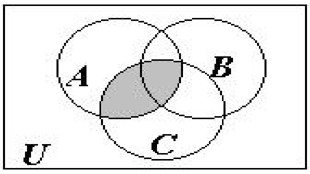


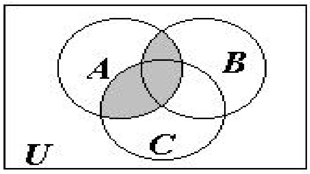


Правая часть соотношения:

$A \cap B$ **$A \cap C$** **$(A \cap B) \cup (A \cap C)$**







Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное соотношение справедливо.

1.3. Основные тождества алгебры множеств

Для произвольных множеств **A**, **B** и **C** справедливы соотношения, данные ниже:

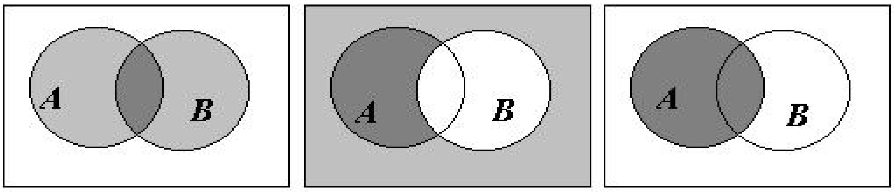
1. Коммутативность объединения: $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$	1’. Коммутативность пересечения: $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$
2. Ассоциативность объединения: $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$	2’. Ассоциативность пересечения: $\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения: $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$	3’. Дистрибутивность пересечения относительно объединения: $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами: $\mathbf{A \cup \emptyset = A}$; $\mathbf{A \cup \overline{A} = U}$; $\mathbf{A \cup U = U}$	4’. Законы действия с пустым и универсальным множествами: $\mathbf{A \cap U = A}$; $\mathbf{A \cap \overline{A} = \emptyset}$; $\mathbf{A \cap \emptyset = \emptyset}$
5. Закон идемпотентности объединения: $\mathbf{A \cup A = A}$	5’. Закон идемпотентности пересечения: $\mathbf{A \cap A = A}$
6. Закон де Моргана: $\mathbf{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$	6’. Закон де Моргана: $\mathbf{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$
7. Закон поглощения: $\mathbf{A \cup (A \cap B) = A}$	7’. Закон поглощения: $\mathbf{A \cap (A \cup B) = A}$
8. Закон склеивания: $\mathbf{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A}$	8’. Закон склеивания: $\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A}$
9. Закон Порецкого: $\mathbf{A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B}$	9’. Закон Порецкого: $\mathbf{A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B}$
10. Закон двойного дополнения: $\mathbf{\overline{\overline{A}} = A}$	

Пример 6. Необходимо доказать тождество $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{A}$.

Решение. Докажем тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера – Венна):

1. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) = (\mathbf{A} \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})) \cap (\mathbf{B} \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})) =$
   $= \mathbf{A} \cap ((\mathbf{B} \cup \mathbf{A}) \cap (\mathbf{B} \cup \overline{\mathbf{B}})) = \mathbf{A} \cap ((\mathbf{B} \cup \mathbf{A}) \cap \mathbf{U}) = \mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{A}) = \mathbf{A}.$
2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера – Венна:

$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ $\quad\quad$ $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$ $\quad\quad$ $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{A}$



1.4. Прямое произведение множеств. Отношения и функции

Определение 13. Упорядоченная пара **<x, y>** интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов (x и y), расположенных в определенном порядке. Две пары, **<x, y>** и **<u, ν>**, считаются равными тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{\nu}$.

Упорядоченная **n**-ка элементов $\mathbf{x_1, \ldots, x_n}$ обозначается $\langle \mathbf{x_1, \ldots, x_n} \rangle$.

Определение 14. Прямым произведением множеств **X** и **Y** называется множество $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары **<x, y>**, такие, что $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Определение 15. Прямым произведением множеств $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ называется совокупность всех упорядоченных **n**-ок $\langle \mathbf{x_1, \ldots, x_n} \rangle$, таких, что $\mathbf{x} \in \mathbf{X1}, \ldots, \mathbf{x_n} \in \mathbf{X_n}$. Если $\mathbf{X_1} = \mathbf{X_2} = \ldots = \mathbf{X_n}$, то пишут $\mathbf{X_1} \times \mathbf{X_2} \times \ldots \times \mathbf{X_n} = \mathbf{X^n}$.

Пример 7.

1. Пусть $\mathbf{X} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{Y} = \{0, 1\}$. Тогда

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 0\rangle, \langle 3, 1\rangle\};$$
$$\mathbf{Y} \times \mathbf{X} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}.$$

2. Пусть **X** – множество точек отрезка **[0, 1]**, а **Y** – множество точек отрезка **[1, 2]**. Тогда $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ – множество точек квадрата $[0, 1] \times [1, 2]$ с вершинами в точках **(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,2)**.

Определение 16. Бинарным (или двуместным) отношением ρ называется множество упорядоченных пар.

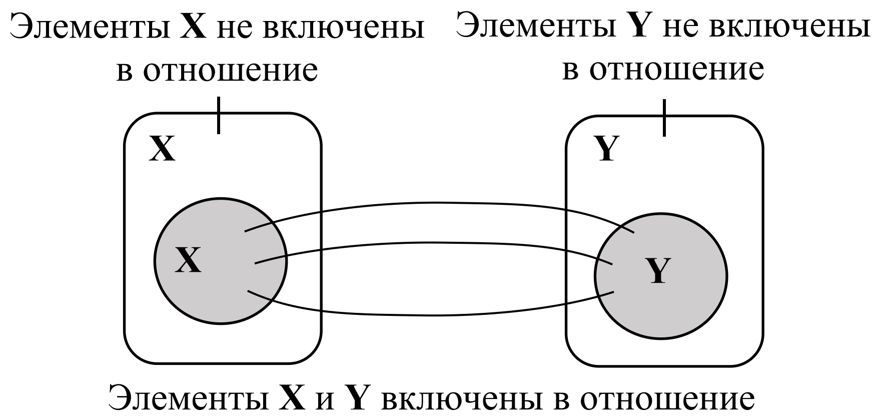
Если ρ есть отношение и пара **<x, y>** принадлежит этому отношению, то наряду с записью $\langle \mathbf{x, y} \rangle \in \rho$ употребляется запись $\mathbf{x\rho y}$. Элементы **x** и **y** называются координатами (или компонентами) отношения ρ.

Определение 17. **N**-арным отношением называется множество упорядоченных **n**-ок.

Определение 18. Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $\mathbf{D_\rho} = \{\mathbf{x} \mid$ существует такое $\mathbf{y}$, что $\mathbf{x\rho y}\}$.

Определение 19. Областью значений бинарного отношения ρ называется множество $\mathbf{E}_\rho = \{\mathbf{y} \mid$ существует такое **x**, что $\mathbf{x\rho y}\}$.

Пусть $\rho \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ определено в соответствии с нижеследующим рисунком:



Область определения $\mathbf{D}_\rho$ и область значений E_ρ устанавливаются соответственно: $\mathbf{D}_\rho = \{x\text{: } (x, y) \in \rho\}$, $\mathbf{E}_\rho = \{y\text{: } (x, y) \in \rho\}$.

Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств. Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах, обычно задаются:

1) списком (перечислением) пар, для которых это отношение выполняется;

2) матрицей – бинарному отношению $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{M} \times \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_3\}$, соответствует квадратная матрица порядка **n**, в которой элемент $\mathbf{c}_{ij}$, стоящий на пересечении **i**-й строки и **j**-го столбца, равен 1, если между $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ имеет место отношение **R**, или 0, если оно отсутствует.

Пример 8. Пусть $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение ρ, заданное на множестве $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$, если ρ означает «быть строго меньше».

Отношение ρ как множество содержит все пары элементов **a**, **b** из **M**, такие, что $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Тогда $\rho = \{(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$.

Матрица отношения имеет вид

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение 20. Бинарное отношение **f** называется функцией, если из $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{f}$ и $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \in \mathbf{f}$ следует, что $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Поскольку функции являются бинарными отношениями, две функции **f** и **g** равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Область определения функции обозначается $\mathbf{D_f}$, а область значений – $\mathbf{R_f}$. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если $\mathbf{f}$ – функция, то вместо $\mathbf{<x, y> \in f}$ пишут $\mathbf{y = f(x)}$ и говорят, что $\mathbf{y}$ – значение, соответствующее аргументу $\mathbf{x}$, или $\mathbf{y}$ – образ элемента $\mathbf{x}$ при отображении $\mathbf{f}$. При этом x называется прообразом элемента y.

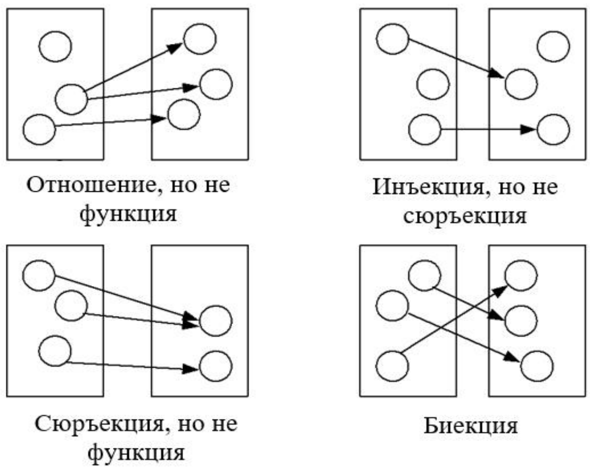
Определение 21. Назовем $\mathbf{f}$ $\mathbf{n}$-местной функцией из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{f: X^n \to Y}$. Тогда пишем $\mathbf{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ и говорим, что $\mathbf{y}$ – значение функции при значении аргументов $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$.

Пусть $\mathbf{f: X \to Y}$.

Определение 22. Функция $\mathbf{f}$ называется инъективной, если для любых $\mathbf{x_1, x_2, y}$ из $\mathbf{y = f(x_1)}$ и $\mathbf{y = f(x_2)}$ следует, что $\mathbf{x_1 = x_2}$, т.е. каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.

Определение 23. Функция f называется сюръективной, если для любого элемента $\mathbf{y \in Y}$ существует элемент $\mathbf{x \in X}$, такой, что $\mathbf{y = f(x)}$.

Определение 24. Функция $\mathbf{f}$ называется биективной, если $\mathbf{f}$ одновременно сюръективна и инъективна. Ниже показаны понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции:



Пример 9. Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающие значение в этом же множестве:

1. Функция $\mathbf{f(x) = e^x}$ – инъективна, но не сюръективна.
2. Функция $\mathbf{f(x) = x^3 - x}$ – сюръективна, но не инъективна.
3. Функция $\mathbf{f(x) = 2x + 1}$ – биективна.

Определение 25. Суперпозиция функций – функция, полученная из системы функций $\mathbf{f, f_1, f_3, \ldots, f_k}$ некоторой подстановкой функций $\mathbf{f_1, f_3, \ldots, f_k}$ во внешнюю функцию $\mathbf{f}$ вместо переменных и переименованиями переменных.

Пример 10. Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

1.5. Свойства бинарных отношений. Специальные бинарные отношения [9]

Определение 26. Отношение ρ на множестве **X** называется рефлексивным, если для любого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ выполняется $\mathbf{x\rho x}$.

Определение 27. Отношение ρ на множестве **X** называется симметричным, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ из $\mathbf{x\rho y}$ следует $\mathbf{y\rho x}$.

Определение 28. Отношение ρ на множестве **X** называется транзитивным, если для любых $\mathbf{x, y, z} \in \mathbf{X}$ из $\mathbf{x\rho y}$ и $\mathbf{y\rho z}$ следует $\mathbf{x\rho z}$.

Определение 29. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение на множестве **X** называется отношением эквивалентности на множестве **X**.

Пример 11.

1. Отношение равенства на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности.
2. Отношение подобия на множестве треугольников есть отношение эквивалентности.
3. Отношение «строго меньше» на множестве действительных чисел не рефлексивно, не симметрично и транзитивно на этом множестве.
4. Отношение перпендикулярности прямых не рефлексивно, симметрично, не транзитивно.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве **X**.

Определение 30. Классом эквивалентности, порожденным элементом **x**, называется подмножество множества **X**, состоящее из тех элементов $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, для которых $\mathbf{x\,\rho\, y}$. Класс эквивалентности, порожденный элементом **x**, обозначается через $\mathbf{[x]: [x] = \{y \mid y \in X}$ и $\mathbf{x\rho y\}}$.

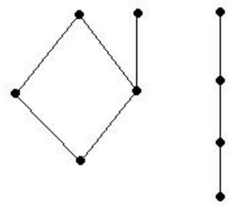
Определение 31. Отношение ρ на множестве **X** называется антисимметричным, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ из $\mathbf{x\rho y}$ и $\mathbf{y\rho x}$ следует $\mathbf{x = y}$.

Определение 32. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением частичного порядка на множестве **X**.

Пример 12.

1. Отношение $\mathbf{x \le y}$ на множестве действительных чисел есть отношение частичного порядка.
2. Схема организации подчинения в учреждении есть отношение частичного порядка на множестве должностей.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если **y** покрывает **x**, то точки **x** и **y** соединяют отрезком, причем точку, соответствующую **x**, располагают ниже **y**. Такие схемы называются диаграммами Хассе. Ниже показаны две диаграммы Хассе, причем вторая соответствует линейно упорядоченному множеству:



1.6. Операции над бинарными отношениями

Так как отношения на *X* задаются подмножествами $\rho \subseteq X \times Y$, для них определимы те же операции, что и над множествами [9]:

1. Объединение $\rho_1 \cup \rho_2$: $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \rho_1$ или $(x, y) \in \rho_2\}$.
2. Пересечение $\rho_1 \cap \rho_2$: $\rho_1 \cap \rho_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \rho_1$ или $(x, y) \in \rho_2\}$.
3. Разность $\rho_1 \setminus \rho_2$: $\rho_1 \setminus \rho_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \rho_1$ и $(x, y) \in \rho_2\}$.
4. Дополнение $\overline{\rho}$: $\overline{\rho} = U \setminus \rho$, где $U = M_1 \times M_2$ (или $U = M^2$).
5. Обратное отношение ρ^{-1}: $x\rho^{1}y$ тогда и только тогда, когда $y\rho x$, $\rho^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \rho\}$.

Пример 13. Если ρ – «быть моложе», то ρ^{-1} – «быть старше».

6. Составное отношение (композиция) $\rho_1 \cdot \rho_2$. Пусть заданы множества M_1, M_2 и M_3 и отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ и $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Составное отношение действует из M_1 в M_2 посредством R_1, а затем из M_2 в M_3 посредством R_2, т.е. $(a, b) \in R_1 \bullet R_2$, если существует такое $c \in M_2$, что $(a, c) \in R_1$ и $(a, c) \in R_2$.
7. Транзитивное замыкание ρ°. Оно состоит из таких и только таких пар элементов **a** и **b** из **M**, т.е. $(a, b) \in \rho^\circ$, для которых в **M** существует цепочка из $(k + 2)$ элементов **M**, $k \geq 0$ $(a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b)$, между соседними элементами которой выполняется ρ. Другими словами, $a\rho c_1, c_1\rho c_2, \ldots, c_k\rho b$.

Пример 14. Для отношения «быть сыном» транзитивным замыканием является отношение «быть прямым потомком по мужской линии».

1.7. Алгебраические операции

Пусть дано множество **M**.

Определение 33. Утверждают, что на **M** определена бинарная алгебраическая операция, если всякой упорядоченной паре элементов множества *M* по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенный элемент этого же множества.

Примерами бинарных операций на множестве целых чисел являются сложение и умножение. Однако нашему определению не удовлетворяют, например, множество отрицательных чисел относительно умножения и множество действительных чисел относительно деления из-за невозможности деления на ноль.

Среди известных бинарных операций, производимых не над числами, можно отметить векторное умножение векторов пространства, умножение квадратных матриц порядка **n**, композицию отображений множества **X** в себя, теоретико-множественное объединение и пересечение множеств.

Фактическое задание алгебраической операции на множестве может быть произведено различными методами. Возможно также непосредственное перечисление всех результатов операций для конечных множеств. Его удобно описать с помощью таблицы Кэли:

Операция	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$
$\mathbf{x_1}$	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{x_2}$	x_2	x_3	x_1	x_1
$\mathbf{x_3}$	x_2	x_3	x_1	x_2
$\mathbf{x_4}$	x_4	x_2	x_1	x_3

В первом столбце и первой строке таблицы выписывают все элементы множества. На пересечении строки, соответствующей элементу **a**, и столбца, соответствующего элементу **b**, записывают результат операции над **a** и **b**.

Будем использовать конкретную терминологию и символику. Операцию станем называть умножением, а результат применения операции к элементам **a** и **b** – произведением **ab**.

Определение 34. Если для любых элементов **a** и **b** множества **M** справедливо равенство **ab = ba**, то операцию называют коммутативной.

Определение 35. Если для любых элементов **a**, **b**, **c** множества **M** справедливо равенство **a(bc) = (ab)c**, то операцию называют ассоциативной.

В ряде случаев множество **M**, на котором определена алгебраическая операция, обладает единичным элементом, т.е. таким элементом **e**, что **ae = ea = a** для всех **a** из **M**. Единичный элемент единственен.

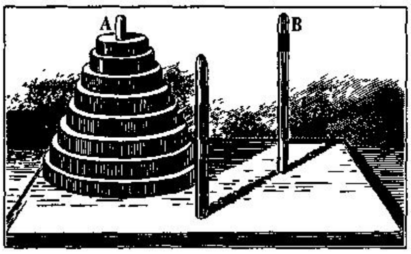
Теорема. Если операция, определенная на **M**, ассоциативна, то результат ее последовательного применения к **n** элементам множества не зависит от расстановки скобок.

2. Возвратные задачи [1]

В данном разделе рассматриваются три задачи, по которым можно будет судить о том, что нас ожидает в дальнейшем. Эти задачи имеют две общие черты: к ним неоднократно обращались математики и решение каждой из них основано на идее *возвратности* (или *рекурентности*), согласно которой решение всей задачи зависит от решений той же самой задачи меньших размеров.

2.1. Задача о ханойской башне

Рассмотрим маленькую изящную головоломку под названием «*ханойская башня*», которую придумал французский математик Эдуард Люка в 1883 г. (рисунок).



Ханойская башня

Башня представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков.

Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

Люка связывал свою головоломку с мифической легендой о башне Брамы, которая, как утверждается, состоит из шестидесяти четырех дисков чистого золота, а колышки представляют собой три алмазных шпиля. При сотворении мира Всевышний поместил диски на первый шпиль и повелел, чтобы жрецы переместили их на третий в соответствии с предписанными правилами. По легенде, жрецы трудятся над этой задачей днем и ночью. Как только они закончат, башня рассыпится и наступит конец света.

Не сразу очевидно, что данная головоломка разрешима, но после краткого размышления можно убедиться, что это так. Возникают вопросы: какой способ самый оптимальный и какое количество перемещений дисков является необходимым и достаточным для решения поставленной задачи?

Наилучший способ разрешить вопрос – несколько обобщить его. Башня Брамы состоит из 64 дисков, а ханойская башня – из 8; посмотрим, что будет в случае n дисков.

Одно из преимуществ такого рода обобщения состоит в том, что можно уменьшить масштабы задачи. Полезно вначале рассмотреть крайние случаи. Совершенно ясно, как перемещать башню, состоящую только из одного или двух дисков, а после нескольких попыток становится понятно, как перемещать башню из трех дисков.

Следующий шаг в решении – выбор подходящего обозначения. Будем говорить, что $\mathbf{T_n}$ есть минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения $\mathbf{n}$ дисков с одного колышка на другой по правилам Люка. Тогда $\mathbf{T_1}$, очевидно, равно 1, а $\mathbf{T_2}$ равно 3.

Можно получить дополнительную информацию, если рассмотреть самый крайний случай: ясно, что $T_0 = 0$, поскольку для перемещения башни из $n = 0$ дисков вообще не требуется ни одного перекладывания. Когда получается разобраться в частных случаях (даже в совсем тривиальных), легче постичь общие закономерности.

Теперь изменим точку зрения и подумаем, как переместить высокую башню. Эксперименты с тремя дисками показывают, что решающая идея состоит в переносе двух верхних дисков на средний колышек; затем переносится третий диск и на него помещаются два других. Это дает ключ к общему правилу перемещения n дисков: сначала перемещаем $n - 1$ меньших дисков на любой из колышков (что требует T_{n-1} перекладываний), затем перекладываем самый большой диск (одно перекладывание) и, наконец, помещаем $n - 1$ меньших дисков обратно на самый большой диск (еще T_{n-1} перекладываний). Таким образом, n дисков (при $n > 0$) можно переместить самое большее за $2T_{n-1} + 1$ перекладываний: $T_n \le 2 \cdot T_{n-1} + 1$ при $n > 0$.

В указанной формуле фигурирует знак $\le$ вместо $=$, поскольку построение показывает только то, что достаточно $2T_{n-1} + 1$ перекладываний; требуется доказать, что необходимо $2T_{n-1} + 1$ перекладываний.

Можно сказать, что более короткого решения не существует. На некотором этапе необходимо переместить самый большой диск. Когда это делаем, $n - 1$ меньших дисков должны находиться на одном колышке, а чтобы собрать их вместе, потребуется по меньшей мере T_{n-1} перекладываний. Самый большой диск можно перекладывать и более одного раза, однако после его перемещения в последний раз необходимо поместить $n - 1$ меньших дисков (которые опять должны находиться на одном колышке) обратно на наибольший диск, что также требует T_{n-1} перекладываний.

Следовательно, $T_n \ge 2T_{n-1} + 1$ при $n > 0$.

Указанные неравенства вместе с тривиальным решением при $n = 0$ дают:

$$T_0 = 0; \quad T_n = 2T_{n-1} + 1 \text{ при } n > 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что уже известные нам значения $T_1 = 1$ и $T_2 = 3$ согласуются с этими формулами. Особое внимание к крайним случаям не только способствовало выводу общей формулы, но и дало удобный способ проверки.

Совокупность равенств типа (2.1) называется *рекуррентностью* (говорят также о возвратном соотношении или рекурсивной зависимости). Она задается начальным значением и зависимостью общего члена от предыдущих. Будем называть рекуррентностью только выражение для общего члена, хотя формально для полного задания рекуррентности необходимо еще начальное значение.

Рекуррентность позволяет вычислять $\mathbf{T_n}$ для любого $\mathbf{n}$. Однако в действительности никто не станет пользоваться для вычисления рекуррентностью, когда $\mathbf{n}$ велико, так как это займет слишком много времени. Рекуррентность дает только косвенную, локальную информацию. Решение *рекуррентного соотношения* – вот что необходимо. Необходимо получить $\mathbf{T_n}$ в простой, компактной, «замкнутой» форме, что позволило бы вычислить $\mathbf{T_n}$ быстро даже при большом $\mathbf{n}$. Располагая решением в замкнутой форме, можно понять, что на самом деле представляет собой $\mathbf{T_n}$.

Как решить рекуррентное соотношение? Один из способов состоит в угадывании правильного решения с последующим доказательством, что догадка верна, что применимо для случая небольших величин $\mathbf{n}$. Таким образом, последовательно вычисляем $\mathbf{T_3 = 2 * 3 + 1 = 7}$; $\mathbf{T_4 = 2 * 7 + 1 = 15}$; $\mathbf{T_5 = 2 * 15 + 1 = 31}$; $\mathbf{T_6 = 2 * 31 + 1 = 63}$. Это определенно выглядит так, как если бы

$$\mathbf{T_n = 2^n - 1} \text{ при } \mathbf{n \geq 0}. \tag{2.2}$$

По крайней мере, эта формула «работает» при $\mathbf{n \leq 6}$.

Математическая индукция – это общий способ доказательства того, что некоторое утверждение о целом числе n справедливо при любом $\mathbf{n \geq n_0}$. Сначала данное утверждение доказывается, когда $\mathbf{n}$ принимает свое наименьшее значение – $\mathbf{n_0}$. Это называется базой (или основанием). Затем данное утверждение доказывается для $\mathbf{n \geq n_0}$ в предположении, что оно уже доказано для всех $\mathbf{n}$ между $\mathbf{n_0}$ и $\mathbf{n - 1}$ включительно. Это называется *индукцией* (или индуктивным *переходом*). Такого рода доказательство позволяет получить бесконечное число результатов при конечном объеме работы.

Рекуррентность идеально подходит для математической индукции. Например, в нашем случае выражение (2.2) легко следует из (2.1): база индукции тривиальна, поскольку $\mathbf{T_0 = 2^0 - 1 = 0}$, а индуктивный переход выполняется для $\mathbf{n > 0}$, если предположить справедливость выражения (2.2), когда $\mathbf{n}$ заменяется на $\mathbf{n - 1}$:

$$\mathbf{T_n = 2T_{n-1} + 1 = 22^{n-1} - 1 = 2^n - 1}.$$

Следовательно, (2.2) справедливо с равным успехом при любом $\mathbf{n}$.

Тем не менее задача браминов не завершена. Поскольку для $\mathbf{n = 64}$ при перекладывании дисков потребуется $\mathbf{2^{64} - 1}$ (примерно 18 с восемнадцатью нулями) перекладываний. Даже при фантастической скорости в одно перекладывание в микросекунду, потребуется свыше 5 000 веков для перемещения башни Брамы. Головоломка Люка несколько практичнее. Она требует $\mathbf{2^8 - 1 = 255}$ перекладываний, которые можно выполнить приблизительно за четыре минуты.

Рекуррентность, связанная с ханойской башней, типична для множества задач, которые возникают в различного рода приложениях. В процессе поиска выражения в замкнутой форме для некоторой интересующей нас величины, подобной $\mathbf{T_n}$, нужно пройти три стадии.

1. Рассмотрение крайних случаев. Это позволяет вникнуть в задачу и помогает на стадиях 2 и 3.
2. Нахождение и доказательство математического выражения для интересующей нас величины. В случае ханойской башни это рекуррентность (2.1), которая позволяет при заданной высоте башни вычислить $\mathbf{T_n}$ для любого $\mathbf{n}$.
3. Нахождение и доказательство замкнутой формы для нашего математического выражения. В случае ханойской башни это решение рекуррентности (2.2).

Третьей стадии нужно уделить особое внимание. Иногда потребуется пропустить стадии 1 и 2, поскольку математическое выражение будет задано в качестве исходного. Но даже тогда будут появляться подзадачи, необходимость решения которых основана на прохождении всех трех стадий.

Анализ задачи о ханойской башне привел к правильному ответу, но он требовал «индуктивного скачка». Цель состоит в том, чтобы объяснить, как можно решать рекуррентности. Например, рекуррентность (2.1) может быть упрощена прибавлением 1 к обеим частям соотношений: $\mathbf{T_0 + 1 = 1}$, $\mathbf{T_n + 1 = 2 \cdot T_{n-1} + 2}$ при $\mathbf{n > 0}$.

Теперь, если положить $\mathbf{U_n = T_n + 1}$, то получим:

$$\mathbf{U_0 = 1;}$$

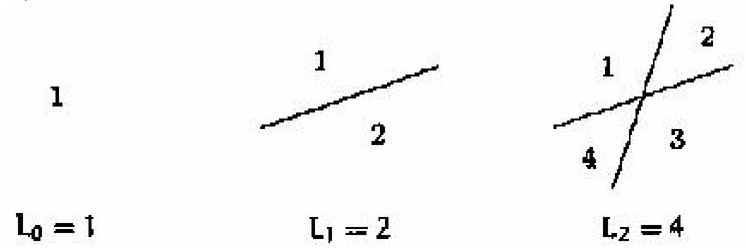
$$\mathbf{U_n = 2 \cdot U_{n-1}} \text{ при } \mathbf{n > 0}.$$

Решение *этой* рекурсии есть $\mathbf{U_n = 2^n}$. Следовательно, $\mathbf{T_n = 2^n - 1}$.

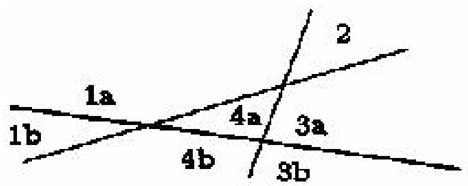
2.2. Задача о разрезании пиццы

Разберем задачу, в которой ставится следующий вопрос: сколько кусков пиццы можно получить, делая $\mathbf{n}$ прямолинейных разрезов ножом? Иными словами, каково максимальное число $\mathbf{L_n}$ областей, на которые плоскость делится $\mathbf{n}$ прямыми? Впервые эта задача была решена в 1826 г. швейцарским математиком Якобом Штейнером.

Начнем с рассмотрения крайних случаев. Плоскость без прямых – это одна область, с одной прямой – две области, а с двумя прямыми – четыре области (каждая прямая неограниченно продолжается в обоих направлениях):



Можно предположить, что $L_n = 2_n$, а добавление новой прямой попросту удваивает число областей. Однако это неверно. Достигнуть удвоения можно было бы, если бы новая **n**-я прямая рассекала каждую старую область на две части; разумеется, она может рассекать старую область в лучшем случае на две части, поскольку каждая из старых областей выпукла. (Прямой линией можно рассечь выпуклую область на две новые части (самое большее), которые также будут выпуклы.) Однако когда добавляется третья прямая, она может рассекать три старые области (самое большее) вне зависимости от того, как расположены первые две прямые:



Таким образом, $L_3 = 4 + 3 = 7$ – самое большее, что можно сделать.

Обобщим данные. Новая **n**-я прямая (при $n > 0$) увеличивает число областей на **k** тогда и только тогда, когда рассекает **k** старых областей, а рассекает она **k** старых областей тогда и только тогда, когда пересекает прежние прямые в $k - 1$ различных местах. Две прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Таким образом, новая прямая может пересекать $n - 1$ старых прямых не более чем в $n - 1$ различных точках, при этом нужно иметь $k \leq n$.

Нами установлена верхняя граница $L_n \leq L_{n-1} + n$ при $n > 0$. При помощи индукции легко показать, что в этой формуле можно прийти к равенству. Просто проводим **n**-ю прямую так, чтобы она не была параллельна никакой другой (следовательно, она пересекает каждую из них), и так, чтобы она не проходила ни через одну из имеющихся точек пересечения (следовательно, она пересекает каждую из прямых н различных местах). Таким образом, искомое рекуррентное соотношение имеет вид $L_0 = 1$, $L_n = L_{n-1} + n$ при $n > 0$.

Уже известные значения L_1, L_2 и L_3 превосходно согласуются с этим соотношением. Теперь нужно найти решение в аналитическом виде («замкнутой форме»). Запись «1, 2, 4, 7, 11, 16, ... » не вызывает никаких ассоциаций, поэтому попробуем применить другой подход.

Зачастую можно разобраться в рекуррентности, «развертывая» или «разматывая» ее всю до конца следующим образом:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n = \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n = \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \\ &= L_0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \\ &= 1 + S_n, \end{aligned}$$

где $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n.$

Другими словами, L_n на единицу больше суммы S_n первых n положительных целых чисел.

Так как величина S_n в дальнейшем будет встречаться неоднократно, необходимо составить таблицу нескольких первых значений для более легкого распознавания:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

Приведенные числа называются также треугольными, поскольку S_n представляет собой число кеглей, расставленных треугольником в n рядов. Например, обычная четырехрядная расстановка состоит из $S_4 = 10$ кеглей.

Для вычисления S_n можно воспользоваться уловкой, придуманной К.Ф. Гауссом в 1786 г.:

$S_n = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n$;

$S_n = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$;

$2 \cdot S_n = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1)$.

Необходимо просто сложить S_n с самой собой, записанной в обратном порядке, так что сумма в каждой из n колонок справа равна $n + 1$.

После упрощения имеем $S_n = (n(n + 1))/2$ при $n \geq 0$.

Получили требуемое решение:

$$L_n = (n(n + 1))/2 + 1 \text{ при } n \geq 0. \qquad (2.3)$$

Можно удовлетвориться этим выводом и рассматривать его в качестве доказательства. Тем не менее необходимо уметь действовать в соответствии с более строгими стандартами. Построим строгое доказательство методом индукции. Ключевой шаг индукции:

$$L_n = L_{n-1} + n = (1/2(n - 1)n + 1) + n = 1/2n(n + 1) + 1.$$

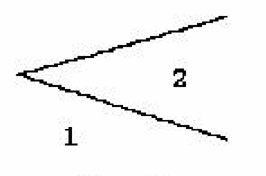
Теперь можно не сомневаться в справедливости решения в замкнутой форме (2.3).

Можно дать грубое определение «замкнутых форм» вроде следующего: выражение для величины $f(n)$ представлено в замкнутой форме, если ее можно вычислить с помощью некоторого фиксированного числа «известных» стандартных операций, независимого от n. Например, выражение $2^n - 1$ и $n(n + 1)/2$ представлены в замкнутой форме, поскольку они включают в себя только сложение, умножение, деление и возведение в степень в явном виде.

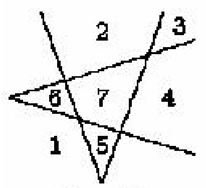
Общее число простых замкнутых форм ограничено, так что существуют рекуррентности, которые нельзя представить в простых замкнутых формах. Если такие рекуррентности возникают постоянно, то можно пополнить множество стандартных операций новыми; это может существенно расширить диапазон задач, решаемых в «простой» замкнутой форме. К примеру, произведение первых n натуральных чисел (n

факториал) оказалось настолько важным, что теперь необходимо рассматривать его как основную операцию. Поэтому формула **n!** записана в замкнутой форме, хотя эквивалентное ей выражение $\mathbf{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n}$ – нет.

Представим небольшую вариацию на тему прямых на плоскости. Предположим, что вместо прямых линий используем ломаные, каждая из которых представлена одним «зигом». Каково максимальное число $\mathbf{Z_n}$ областей, на которые плоскость делится **n** такими ломаными линиями? Можно ожидать, что **Z** будет примерно вдвое или, возможно, втрое больше, чем $\mathbf{L_n}$. Посчитаем:

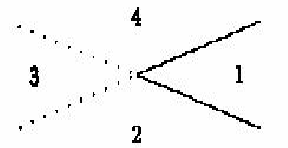


$Z_1 = 2$



$Z_2 = 7$

Из этих частных случаев заключаем, что ломаная линия подобна двум прямым с тем лишь отличием, что там, куда после пересечения не продолжаются «две» прямые, области сливаются:



Области 2, 3 и 4, которые были бы разделены при наличии двух прямых, превращаются в единую область в случае одной ломаной линии, т.е. теряются две области. И если привести все в надлежащий порядок (точка излома должна лежать по ту сторону пересечений с другими линиями), то окажется, что теряются только две области на одну линию. Таким образом,

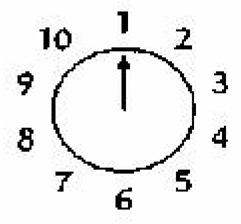
$$\mathbf{Z_n = L_{2n} - 2n = 2n(2n + 1)/2 + 1 - 2n =}$$
$$\mathbf{= 2n^2 - n + 1} \text{ при } \mathbf{n \geq 0}. \qquad (2.4)$$

Сравнивая решения в замкнутой форме (2.3) и (2.4), приходим к выводу, что при больших $\mathbf{n}$ $\mathbf{L_n \sim \frac{1}{2} n^2}$, $\mathbf{Z_n \sim 2 n^2}$, так что ломаные линии дают примерно в четыре раза больше областей, чем прямые.

2.3. Задача Иосифа Флавия

Рассмотрим один из вариантов античной задачи, носящей имя Иосифа Флавия – известного историка первого века н. э. Существует легенда, что Иосиф выжил и стал известным благодаря математической одаренности. В ходе иудейской войны он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочтя самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего до тех пор, пока не останется ни одного человека. Однако Иосиф, наряду с одним из своих единомышленников, счел подобный конец бессмысленным и быстро вычислил спасительные места в порочном круге, на которые поставил себя и своего товарища.

В нашем варианте начнем с того, что выстроим в круг **n** человек, пронумерованных числами от **1** до **n**, и будем исключать каждого второго из оставшихся до тех пор, пока не уцелеет только один. Вот, к примеру, исходное расположение при **n = 10**:

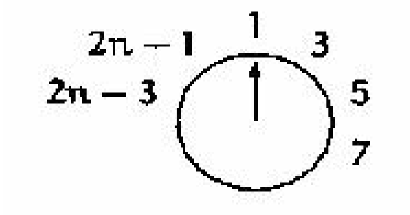


Порядок исключения – 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Задача: определить номер уцелевшего – **J(n)**. При **n = 10** имеем **J(10) = = 5**. Можно предположить, что **J(n) = n/2** при четном **n**, тем более что случай **n = 2** подтверждает наше предположение: **J(2) = 1**. Однако в некоторых других частных случаях предположение нарушается при **n = 4** и **n = 6:**

n	1 2 3 4 5 6
J(n)	1 1 3 1 3 5

Согласно этим значениям **J(n)** попробуем сделать другое предположение. Похоже, **J(n)** всегда будет нечетно, и для этого имеется веское основание: первый обход по кругу исключает все четные номера. К тому же, если само **n** четно, приходим к ситуации, подобной той, с которой начали, за исключением того, что остается вдвое меньше людей и их номера меняются.

Допустим, что первоначально имеется **2n** людей. После первого



прохода по кругу остаемся с номерами:

Следующий проход будет начинаться с номера 3. Это то же самое, как если бы начинали с **n** людей, за исключением того, что номер каждого уцелевшего удваивается и уменьшается на 1. Тем самым **J(2n) = 2J(n) – 1** при $\mathbf{n \geq 1}$.

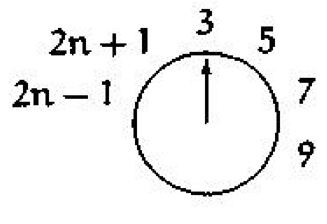
Теперь можно быстро продвигаться к большим **n**. Например, нам известно, что **J(10) = 5**, поэтому

$$\mathbf{J(20) = 2J(10) - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9}.$$

Аналогично **J(40) = 17**, и можно вывести, что $\mathbf{J(5 \cdot 2^m) = 2^{m+1} + 1}$.

Рассмотрим нечетные значения. Получается, что в случае $\mathbf{2n + 1}$ людей жертва с номером 1 уничтожается сразу после жертвы с номером $\mathbf{2n}$.

Остаемся с номерами:



Вновь получили почти первоначальную ситуацию с $\mathbf{n}$ людьми, но на этот раз номера уцелевших удваиваются и увеличиваются на 1. Таким образом,

$$\mathbf{J(2n + 1) = 2J(n) + 1} \text{ при } \mathbf{n \geq 1}.$$

Объединение этих уравнений с $\mathbf{J(1) = 1}$ дает рекуррентное соотношение, которое определяет $\mathbf{J}$ во всех случаях:

$$\mathbf{J(1) = 1};$$
$$\mathbf{J(2 \cdot n) = 2J(n) - 1} \text{ при } \mathbf{n \geq 1}; \qquad (2.5)$$
$$\mathbf{J(2 \cdot n + 1) = 2J(n) + 1} \text{ при } \mathbf{n \geq 2}.$$

Вместо получения $\mathbf{J(n)}$ из $\mathbf{J(n - 1)}$ это рекуррентное соотношение действует куда более эффективно, поскольку оно каждый раз уменьшает величину $\mathbf{n}$ вдвое и более. Скажем, можно вычислить $\mathbf{J(1000000)}$, применяя выражение (2.5) только 19 раз. Необходимо найти выражение для $\mathbf{J(n)}$ в замкнутой форме, поскольку оно будет более информативным и позволит вычислять решение еще быстрее.

Наше рекуррентное соотношение дает возможность очень быстро составить таблицу первых значений $\mathbf{J(n)}$. Возможно, оно поможет нам так же быстро заметить закономерность и угадать ответ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Если сгруппировать значения $\mathbf{n}$ по степеням 2 (в таблице эти группы отделены вертикальными линиями), то в каждой группе $\mathbf{J(n)}$ всегда будет начинаться с 1, а затем увеличиваться на 2. Итак, если записать $\mathbf{n}$ в виде $\mathbf{n = 2^m + l}$, где $\mathbf{2^m}$ – наибольшая степень 2, не превосходящая $\mathbf{n}$, а $\mathbf{l}$ – то, что остается, то решение нашего рекуррентного соотношения, по-видимому, должно быть таким:

$$\mathbf{J(2^m + 1) = 2l + 1} \text{ при } \mathbf{m \geq 0} \text{ и } \mathbf{0 \leq l \leq 2^m}. \qquad (2.6)$$

Заметим, что если $\mathbf{2^m \leq n < 2^{m+1}}$, то остаток $\mathbf{l = n - 2^m}$ удовлетворяет неравенству $\mathbf{0 \leq l \leq 2^{m+1} - 2^m = 2^m}$.

Теперь надо доказать выражение (2.6). Как и прежде, будем использовать индукцию, но на этот раз индукцию по $\mathbf{m}$. При $\mathbf{m = 0}$ имеем $\mathbf{l = 0}$; таким образом, база для выражения (2.6) сводится к равенству

$\mathbf{J(1) = 1}$, которое не вызывает сомнений. Индуктивный шаг состоит из двух частей в зависимости от того, четно или нечетно $\mathbf{l}$.

Если $\mathbf{m > 0}$ и $\mathbf{2^m + l = 2n}$, то $\mathbf{l}$ четно и

$$\mathbf{J(2^m + l) = 2J(2^{m-1} + l/2) - 1 = 2(2l/2 + l) - l = 2l + 1}$$

на основании выражения (2.5) и индуктивного предположения. Это как раз то, что нам надо. Аналогичное доказательство проходит и в нечетном случае, когда $\mathbf{2^m + l = 2n + 1}$. Можно было бы также заметить, что из выражения (2.5) следует соотношение

$$\mathbf{J(2n + 1) - J(2n) = 2}.$$

В любом случае индукция выполнена и справедливость выражения (2.6) установлена.

Для иллюстрации решения (2.6) вычислим $\mathbf{J(100)}$. В этом случае $\mathbf{100 = 2^6 + 36}$, так что $\mathbf{J(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73}$.

Сделаем вывод: решение всякой задачи может быть обобщено так, что его можно применить к более широкому кругу задач. При освоении некой техники лучше присмотреться к ней внимательнее и установить, что еще можно получить с ее помощью. Поэтому в оставшейся части данного раздела изучим решение (2.6) и исследуем некоторые обобщения рекуррентного соотношения (2.5). Эти исследования помогут выявить определенную структуру, которая лежит в основе всех подобных задач.

Степени 2 играли важную роль в нашем поиске решения, так что естественно обратиться к двоичным представлениям величин $\mathbf{n}$ и $\mathbf{J(n)}$. Допустим, что двоичные разложения величин **n's** имеют вид

$$\mathbf{n = (b_m b_{m-1} ... b_1 b_0)_2},$$

$$\text{т.е. } \mathbf{n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + ... + b_1 2 + b_0},$$

где каждое $\mathbf{b}$ равно 0 или 1, причем старший бит $\mathbf{b_m}$ равен 1. Вспоминая, что $\mathbf{n = 2^m + l}$, последовательно получаем:

$$\mathbf{n = (1b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2;}$$
$$\mathbf{l = (0b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2;}$$
$$\mathbf{2l = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0 0)_2;}$$
$$\mathbf{2l + 1 = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0 1)_2;}$$
$$\mathbf{J(n) = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0b_m)_2.}$$

Последний шаг следует из того, что

$$\mathbf{J(n) = 2l + 1} \text{ и } \mathbf{b_m = 1}.$$

Доказано, что

$$\mathbf{J((b_m b_{m-1}\ldots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1}\ldots b_1 b_0 b_m)_2},$$

т.е., говоря языком компьютерного программирования, $\mathbf{J(n)}$ получается путем циклического сдвига двоичного представления $\mathbf{n}$ влево на один бит. Например, если $\mathbf{n = 100 = (1100100)_2}$, то $\mathbf{J(n) = J((1100100)_2) = (1001001)_2}$, что равно $\mathbf{64 + 8 + 1 = 73}$. Если бы мы имели дело с двоичной записью с самого начала, то, вероятно, сразу бы обратили внимание на эту закономерность.

Если начинаем с **n** и итерируем **J**-функцию **m + 1** раз, то будет выполнено **m + 1** однобитовых циклических сдвигов. Поскольку **n** является **(m + 1)**-битовым числом, мы могли бы рассчитывать в итоге снова получить число **n**. Но это не совсем так. К примеру, если **n = 13**, то $\mathbf{J((1101)_2) = (1011)_2}$, но затем $\mathbf{J((1011)_2) = (111)_2}$ и процесс обрывается: когда 0 становится старшим битом, он пропадает и более не рассматривается. В действительности **J(n)** всегда должно быть $\leq$ **n** по определению, так как **J(n)** есть номер уцелевшего человека; следовательно, если **J(n) < n**, мы никогда не вернемся к n в последующих итерациях.

Многократное применение **J** порождает последовательность убывающих значений, достигающих в результате «неподвижной точки» **n**, такой, что **J(n) = n**. Свойство циклического сдвига позволяет легко установить, что это будет за точка: итерирование функции **m** и более раз всегда будет порождать набор из одних единиц со значением $\mathbf{2^{\nu(n)} - 1}$, где **ν(n)** – число равных битов 1 в двоичном представлении **n**. Поскольку **ν(13) = 3**, имеем

$$\overbrace{\mathbf{J(J(\ldots J}}^{2}\mathbf{(13)\ldots)) = 2^3 - 1 = 7}.$$

Аналогично

$$\overbrace{\mathbf{J(J(\ldots J}}^{8}\mathbf{((101101101101011)_2)\ldots)) = 2^{10} - 1 = 1023.}$$

Вернемся к первоначальному предположению: при четном **n J(n) = n/2**, что неверно, но теперь можно установить, когда это предположение *верно:*

$$\mathbf{J(n) = n/2;}$$
$$\mathbf{2l + 1 = (2^m + l)/2;}$$
$$\mathbf{l = 1/3\ (2^m - 2)}.$$

Если число $\mathbf{l = 1/3(2^m - 2)}$ целое, то $\mathbf{n = 2^m + l}$ будет решением, поскольку **l** меньше, чем $\mathbf{2^m}$. Нетрудно убедиться, что $\mathbf{2^m - 2}$ делится на **3**, когда **m** нечетно, и не делится, когда **m** четно (такие решения рассмотрены в разделе 4). Поэтому имеется бесконечно много решений уравнения **J(n) = = n/2**, начиная со следующих:

m	**l**	$\mathbf{n = 2^m + l}$	**J(n) = 2l + 1 = n/2**	**n** (двоичное)
1	0	2	1	10
3	2	10	5	1010
5	10	42	21	101010
7	42	170	85	10101010

Следует обратить внимание на крайний правый столбец. Это двоичные числа, циклический сдвиг которых на одну позицию влево дает тот же самый результат, что и обычный сдвиг на одну позицию вправо (деление пополам).

Следующий этап – обобщение функции **J**. Что бы произошло, если бы в задаче возникла рекуррентность, схожая с выражением (2.5), но с другими константами? Исследуем эти случаи, введя константы α, β, γ, и попытаемся найти решение в замкнутой форме для более общего рекуррентного соотношения:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f(1) = \alpha;} \\ &\mathbf{f(2n) = 2f(n) + \beta} \text{ при } \mathbf{n \geq 1}; \\ &\mathbf{f(2n + 1) = 2f(n) + \gamma} \text{ при } \mathbf{n \geq 1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

(В первоначальном рекуррентном соотношении было $\alpha = 1$, $\beta = -1$ и $\gamma = 1$.)

Начиная с **f(l)** $= \alpha$ и прибегая к ранее опробованному способу, можно составить следующую сводную таблицу для малых значений **n**:

n	f(n)
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 3\beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + 2\beta + 2\gamma$
7	$4\alpha + 3\gamma$
8	$8\alpha + 7\beta$
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$

(2.8)

Похоже, что коэффициенты при α равны наибольшим степеням 2, не превосходящим **n**. Кроме того, между последовательными степенями 2 коэффициенты при β уменьшаются на 1 вплоть до 0, а при γ увеличиваются на 1, начиная с 0. Поэтому, если выразить (**n**) в виде

$$\mathbf{f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma}, \tag{2.9}$$

разделяя зависимость от α, β, γ, то, по-видимому,

$$\begin{aligned} &\mathbf{A(n) = 2^m}; \\ &\mathbf{B(n) = 2^m - 1 - l}; \\ &\mathbf{C(n) = l}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\mathbf{n = 2^m + l}$ и $\mathbf{0 \leq l < 2^m}$ при $\mathbf{n \geq 1}$. Нельзя сказать, что очень трудно доказать выражения (2.9) и (2.10) по индукции, но подобные действия нерациональны. Существует лучший способ, при котором можно выбрать отдельные значения и затем скомбинировать их. Продемонстрируем его на примере частного случая $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, когда функция **f(n)** предполагается равной **A(n)**. Тогда формулы (2.7) сводятся к рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A(1) = 1}; \\ &\mathbf{A(2n) = 2A(n)} \text{ при } \mathbf{n \geq 1;} \\ &\mathbf{A(2n + 1) = 2A(n)} \text{ при } \mathbf{n \geq 1.} \end{aligned}$$

Достаточно понятно (доказывается индукцией по $\mathbf{m}$), что $\mathbf{A(2^m + l) =}$ $\mathbf{= 2^m}$. Воспользуемся рекуррентным соотношением (2.7) и решением (2.9) в *обратном* порядке, начав с простой функции $\mathbf{f(n)}$ и определив, нет ли каких-нибудь определяющих ее констант (α , β , γ). Подстановка постоянной функции $\mathbf{f(n) = 1}$ в выражения (2.7) показывает, что

$$
\begin{gathered}
\mathbf{1 = \alpha;}\\
\mathbf{1 = 2 \cdot 1 + \beta;}\\
\mathbf{1 = 2 \cdot 1 + \gamma,}
\end{gathered}
$$

следовательно, значения $(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{(1, -1, -1)}$, удовлетворяющие этим уравнениям, дадут $\mathbf{A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1}$. Подобным образом можно подставить $\mathbf{f(n) = n}$:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{1 = \alpha;}\\
\mathbf{2\,n = 2n + \beta;}\\
\mathbf{2n + 1 = 2n + \gamma.}
\end{gathered}
$$

Данные уравнения справедливы при всех $\mathbf{n}$, когда $\alpha = \mathbf{1}$, $\beta = \mathbf{0}$ и $\gamma = \mathbf{1}$, так что нет нужды доказывать по индукции, что при этих параметрах $\mathbf{f(n) =}$ $\mathbf{= n}$. Уже известно, что в таком случае $\mathbf{f(n) = n}$ будет решением, поскольку рекуррентное соотношение (2.7) однозначно определяет $\mathbf{f(n)}$ при каждом $\mathbf{n}$.

Доказали, что функции $\mathbf{A(n)}$, $\mathbf{B(n)}$ и $\mathbf{C(n)}$ из выражения (2.9), которые определяют решение (2.7) в общем случае, удовлетворяют уравнениям:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A(n) = 2^m}, \text{ где } \mathbf{n = 2^m + l \text{ и } 0 \le l < 2^m;}\\
\mathbf{A(n) - B(n) - C(n) = 1;}\\
\mathbf{A(n) + C(n) = n.}
\end{gathered}
$$

Предположения, сделанные в выражении (2.10), подтверждаются, поскольку можно решить эти уравнения, получая

$$\mathbf{C(n) = n - A(n) = l} \text{ и } \mathbf{B(n) = A(n) - 1 - C(n) = 2^m - 1 - l}.$$

Изложенный подход показывает исключительно полезный *репертуарный метод* решения рекуррентных уравнений. Сначала подбираем величины общих параметров, для которых знаем решение. Это дает репертуар разрешимых частных решений. Затем, комбинируя частные решения, получаем общее решение. При этом необходимо столько независимых частных решений, сколько имеется независимых параметров (в нашем случае их было три – для α, β, γ).

Первоначальная рекуррентность имеет решение в двоичной записи:

$$\mathbf{J((b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} \ldots b_1 b_0 b_m)_2}, \text{ где } \mathbf{b_m = 1}.$$

Допускает ли такое решение обобщенная рекуррентность Иосифа? Обобщенную рекуррентность (2.7) можно переписать как

$$
\begin{gathered}
\mathbf{f(1) = \alpha;}\\
\mathbf{f(2n + j) = 2f(n) + \beta_j} \quad \text{при } \mathbf{j = 0{,}1} \text{ и } \mathbf{n \ge 1,}
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

если положить $\beta_0 = \beta$ и $\beta_1 = \gamma$. Эта рекуррентность развертывается бит за битом:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2)} &= \mathbf{2f((b_m b_{m-1} \dots b_1)_2) + \beta_{b_0}} \\
&= \mathbf{4f((b_m b_{m-1} \dots b_2)_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0}} \\
&\dots \\
&= \mathbf{2^m f((b_m)_2) + 2^{m-1}\beta_{m-1} + \dots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0}} \\
&= \mathbf{2^m \alpha + 2^{m-1}\beta_{m-1} + \dots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0}}.
\end{aligned}
$$

Предположим, что теперь расширили систему счисления с основанием 2 и в ней допустимы произвольные цифры, а не только 0 и 1. Предыдущий вывод означает, что

$$\mathbf{f((b_m\ b_{m-1} \dots b_1\ b_0)_2) = (\alpha\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \dots \beta_{b_1}\ \beta_{b_0})_2}. \tag{2.12}$$

Можно было бы отметить данное обстоятельство раньше, если бы выражение (2.8) составили в ином виде:

n	**f(n)**
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 2\beta + \beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + 2\gamma + \beta$
7	$4\alpha + 2\gamma + \gamma$

Свойство циклического сдвига сохраняется, поскольку каждый набор двоичных цифр $\mathbf{(10 \dots 00)_2}$ в данном представлении **n** преобразуется в

$$\mathbf{(1{-}1 \dots {-}1{-}1)_2 = (00 \dots 01)_2}.$$

Итак, изменение системы счисления приводит к компактному решению (2.12) обобщенной рекуррентности (2.11). Можно обобщить ее еще больше. Рекуррентность

$$\mathbf{f(j) = \alpha} \qquad \text{при } \mathbf{1 \le j < d};$$

$$\mathbf{f(dn + j) = cf(n) + \beta_j} \qquad \text{при } \mathbf{0 \le j < d} \text{ и } \mathbf{n \ge 1}$$

совпадает с предыдущей за одним исключением; начинаем с чисел по основанию **d**, а получаем значения по основанию **c**. Таким образом, эта рекуррентность имеет решение с переменным основанием

$$\mathbf{f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_d) = (\alpha_{b_m}\beta_{b_m}, \beta_{b_{m-2}} \dots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_c};$$

$$\mathbf{f(1) = 34};$$

$$\mathbf{f(2) = 5};$$

$$\mathbf{f(3n) = 10f(n) + 76} \text{ при } \mathbf{n \ge 1};$$

$$\mathbf{f(3n + 1) = 10f(n) - 2} \text{ при } \mathbf{n \ge 1};$$

$$\mathbf{f(3n + 2) = 10f(n) + 8} \text{ при } \mathbf{n \ge 1}.$$

Допустим, требуется вычислить **f(19)**. Здесь **d = 3** и **c = 10**. Тогда $\mathbf{19 = (201)_3}$ и решение по переменному основанию позволяет осуществить переход от основания 3 к основанию 10 цифра за цифрой. Так, старшая цифра 2 становится цифрой 5, а 0 и 1 – цифрами 76 и −2, образуя ответ: $\mathbf{f(19) = f((201)_3) = (5\ 76\ -2)_{10} = 1258}$.

2.4. Упражнения

Разминочные упражнения

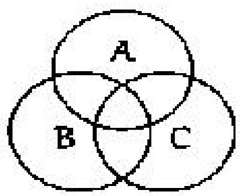
1. Прочитайте рассуждения и ответьте на вопрос. Все лошади – одной масти. Это утверждение можно доказать индукцией по числу лошадей в данном множестве: если существует только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции тривиальна. Для индуктивного перехода предположим, что существует **n** лошадей (с номерами от 1 до **n**). По индуктивному предположению, лошади с номерами от 1 до **n – 1** одинаковой масти и (аналогично) лошади с номерами от 2 до **n** имеют одинаковую масть. Однако лошади посередине с номерами от 2 до **n – 1** не могут изменять масть в зависимости от того, как они сгруппированы. Таким образом, в силу транзитивности лошади с номерами от 1 до **n** также должны быть одинаковой масти. Таким образом, все **n** лошадей одинаковой масти, что и требовалось доказать. Есть ли ошибка в приведенных рассуждениях, а если есть, то какая именно?

2. Найдите кратчайшую последовательность перекладываний, перемещающих башню из **n** дисков с колышка **A** на колышек **B**, если прямой обмен дисками между **A** и **B** запрещен. (Каждое перекладывание должно производиться через средний колышек. Как обычно, больший диск нельзя располагать на меньший.)

3. Покажите, что в процессе перемещения башни при ограничениях из предыдущего упражнения вам встретятся все допустимые варианты размещения **n** дисков на трех колышках.

4. Ответьте на вопрос. Имеются ли какие-нибудь начальная и конечная конфигурации из **n** дисков на трех колышках, которые требуют более чем $\mathbf{2^n - 1}$ перекладывания, чтобы получить одну из другой по исходным правилам Люка?

5. Прочитайте условия и ответьте на вопрос. Так называемая диаграмма Венна с тремя пересекающимися окружностями часто приводится для иллюстрации восьми возможных подмножеств, связанных с тремя заданными множествами.



Можно ли показать четырьмя пересекающимися окружностями шестнадцать возможностей, которые возникают при наличии четырех заданных множеств?

6. Прочитайте условия и ответьте на вопрос. Некоторые из областей, очерчиваемых $\mathbf{n}$ прямыми на плоскости, бесконечны, в то время как другие конечны. Каково максимально возможное число конечных областей?

7. Прочитайте рассуждения и ответьте на вопрос. Пусть $\mathbf{H(n) = J(n + 1) - J(n)}$. В силу уравнения (2.5) $\mathbf{H(2n) = 2}$, а $\mathbf{H(2n + l) = J(2n + 2) - J(2n + 1) = (2J(n + 1) - 1) - (2J(n) + 1) = 2H(n) - 2}$ при всех $\mathbf{n \geq 1}$. В связи с этим представляется возможным доказать индукцией по $\mathbf{n}$, что $\mathbf{H(n) = 2}$ при всех $\mathbf{n}$. Что здесь неверно?

Домашнее задание

1. Решите рекуррентное соотношение:

$$\mathbf{Q_0 = \alpha,\ Q_1 = \beta;}$$

$$\mathbf{Q_n = (1 + Q_{n-1}) / Q_{n-2}} \quad \text{при } \mathbf{n > 1}.$$

Примите, что $\mathbf{Q_n \neq 0}$ при всех $\mathbf{n \geq 0}$. Указание*:* $\mathbf{Q_4 = (1 + \alpha) / \beta}$.

2. Прочитайте утверждение и выполните задания. В некоторых случаях возможно использование обратной индукции, т.е. доказательства от $\mathbf{n}$ к $\mathbf{n - 1}$, а не наоборот. К примеру, рассмотрим утверждение

$$\mathbf{P(n):\ x_1 \dots x_n \leq ((x_1 + x_n)/n)^n}, \text{ если } \mathbf{x_1, \dots, x_n \geq 0}.$$

Оно справедливо для $\mathbf{n = 2}$, так как $\mathbf{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0}$.

А. Полагая $\mathbf{x_n = (x_1 + \dots + x_{n-1})/(n - 1)}$, докажите, что из $\mathbf{P(n)}$ вытекает $\mathbf{P(n - 1)}$ при всяком $\mathbf{n > 1}$.

Б. Покажите, что из $\mathbf{P(n)}$ и $\mathbf{P(2)}$ следует $\mathbf{P(2n)}$.

В. Объясните, почему отсюда следует справедливость $\mathbf{P(n)}$ при всех $\mathbf{n}$.

3. Прочитайте условия задачи и приведите доказательства. Пусть $\mathbf{Q_n}$ – минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения башни из $\mathbf{n}$ дисков с колышка **A** на колышек **B**, если все перекладывания осуществляются по часовой *стрелке*, т.е. с **A** на **B**, или с **B** на другой колышек, или с другого колышка на **A**. Кроме того, пусть $\mathbf{R_n}$ – минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения башни с **B** обратно на **A** при том же ограничении. Докажите, что

$$\mathbf{Q_n} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \textbf{если } \mathbf{n = 0}; \\ \mathbf{2R_{n-1} + 1}, & \textbf{если } \mathbf{n > 0}. \end{cases}$$

$$\mathbf{R_n} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \textbf{если } \mathbf{n = 0}; \\ \mathbf{Q_n + Q_{n-1} + 1}, & \textbf{если } \mathbf{n > 0}. \end{cases}$$

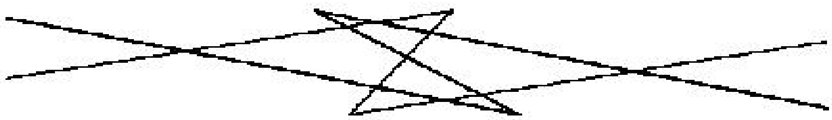
4. Прочитайте условия и выполните задания. Двойная ханойская башня состоит из $\mathbf{2n}$ дисков $\mathbf{n}$ различных размеров – по два диска каждого размера. Как и в случае обычной башни, за один раз разрешается перекладывать только один диск и нельзя класть больший диск на меньший.

А. Ответьте на вопрос: сколько перекладываний необходимо для перемещения двойной башни с одного колышка на другой, если диски одинаковых размеров неотличимы друг от друга?

Б. Воспроизведите исходный порядок дисков в башне. Указание: решение трудное, данная задача конкурсная.

5. Прочитайте условие задачи и выполните задание. Имеется $\mathbf{n}$ различных размеров дисков и ровно $\mathbf{m_k}$ дисков размера $\mathbf{k}$. Определите наименьшее число $\mathbf{A(m_1, ..., m_n)}$ перекладываний дисков, необходимых для перемещения такой башни, если считать диски одинаковых размеров неразличимыми.

6. Ответьте, на какое максимально возможное число областей плоскость делится $\mathbf{n}$ зигзагообразными линиями, каждая из которых состоит из двух параллельных полубесконечных прямых, соединенных прямолинейным отрезком:



$ZZ_2 = 12$

7. Скажите, на сколько частей можно разделить головку сыра с помощью пяти плоских разрезов. (Головка сыра должна оставаться в исходном положении, пока вы ее режете, а каждому разрезу должна соответствовать некоторая плоскость в трехмерном пространстве.) Найдите рекуррентное соотношение для $\mathbf{P_n}$ – максимального числа трехмерных областей, на которое может быть разбито пространство $\mathbf{n}$ произвольно расположенными плоскостями.

8. Решите задачу. У Иосифа был друг, которого он спас, поставив на предпоследнее спасительное место. Чему равен $\mathbf{I(n)}$ – номер предпоследнего выжившего, если экзекуции подлежит каждый второй?

9. Примените репертуарный метод для решения обобщенного рекуррентного соотношения с четырьмя параметрами:

$\mathbf{g(1) = \alpha;}$

$\mathbf{g(2n + j) = 3g(n) + \gamma n + \beta_j}$ при $\mathbf{j = 0, 1}$ и $\mathbf{n \geq 1}$.

Указание: испытайте функцию $\mathbf{g(n) = n}$.

Контрольные работы

1. Прочитайте условие и выполните задание. Пусть $\mathbf{W_n}$ – наименьшее число перекладываний, необходимых для перемещения башки из $\mathbf{n}$ дисков с одного колышка на другой, когда имеется не три, а четыре колышка.

Покажите, что $\mathbf{W_{n(n+1)/2} \leq 2W_{n(n-2)/2} + T_n}$ при $\mathbf{n > 0}$.

Здесь $\mathbf{T_n = 2^n - 1}$ – число перекладываний в обычном случае трех колышков. Воспользуйтесь этим для нахождения выражения $\mathbf{f(n)}$, такого, что $\mathbf{W_{n(n+1)/2} \leq f(n)}$ при всех $\mathbf{n \geq 0}$.

2. Покажите, что следующая совокупность **n** ломаных линий делит плоскость на Z_n областей, где Z_n определено в выражении (2.4). Каждая **j**-я ломаная при $1 \le j \le n$ имеет излом в точке $(n^{2j}, 0)$ и проходит через точки $(n^{2j} - n^j, 1)$ и $(n^{2j} - n^j - n^{-n}, 1)$.

3. Ответьте на вопрос, могут ли **n** ломаных линий разделить плоскость на Z_n областей, когда угол каждого излома составляет 30°?

4. Примените репертуарный метод решения обобщенной рекуррентности с пятью параметрами:

$h(1) = \alpha$;

$h(2n + j) = 4h(n) + \gamma_j n + \beta_j$ при $j = 0,1$ и $n \ge 1$.

Указание: попробуйте применить функции $h(n) = n$ и $h(n) = n^2$.

5. Решите задачу. В круг поставлено **2n** человек, первые **n** из которых – славные ребята, а последние **n** – гадкие парни. Покажите, что всегда найдется целое **m** (зависящее от **n**), такое, что, если, двигаясь по кругу, наказываем каждого **m**-го, то первыми будут наказаны все гадкие парни. (К примеру, при $n = 3$ можно взять $m = 5$, а при $n = 4$ можно взять $m = 30$.)

Конкурсные задачи

1. Покажите, что, используя **n** выпуклых многоугольников, которые конгруэнтны друг другу и повернуты относительно общего центра, можно построить диаграмму Венна для **2n** всевозможных подмножеств **n** заданных множеств.

2. Решите задачу. Иосиф занимает конкретное **j**-е место, но при этом имеет возможность назвать роковой параметр **q**, после чего уничтожается каждый **q**-й человек. Всегда ли он сможет спастись?

Исследовательские проблемы

1. Найдите все рекуррентные соотношения вида

$$x_n = (a_0 + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k}) / (b_1 x_{n-1} + \ldots + b_k x_{n-k}),$$

решения которых периодичны.

2. Решите задачу о ханойской башне с четырьмя колышками и в бесконечном числе случаев (см. пункт «контрольные вопросы», упр. 1).

3. Прочитайте условия и ответьте на вопросы. Обобщая упр. 2 (см. пункт «конкурсные задачи»), будем называть *иосифовым подмножеством* множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое множество из **k** номеров, что при некотором **q** первыми будут уничтожены люди с остальными $n - k$ номерами. (На этих **k** местах находятся «славные ребята», которых хочет спасти Иосиф.) Оказывается, что при $n = 9$ три из 2^9 возможных подмножеств являются неиосифовыми: подмножества $\{1, 2, 5, 8, 9\}$, $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ и $\{2, 5, 6, 7, 8\}$. Когда $n = 12$, то 13 подмножеств являются неиосифовыми, а при любом другом $n \le 12$ нет ни одного неиосифова. Редки ли неиосифовы подмножества при больших **n**?

3. Линейные рекуррентные соотношения [5]

3.1. Понятие возвратной последовательности

Возвратная последовательность является широким обобщением понятия арифметической (или геометрической) прогрессии. Она охватывает также последовательности квадратов или кубов натуральных чисел, последовательности цифр десятичного разложения рационального числа (и в целом любые периодические последовательности), последовательности коэффициентов частного от деления двух многочленов, расположенных по возрастающим степеням x, и т.д. Таким образом, в курсе математики средней школы возвратные последовательности встречаются часто. Теория возвратных последовательностей в математической дисциплине составляет особую главу, называемую *исчислением конечных разностей.* Изложим данную теорию.

3.2. Формализованное представление возвратных последовательностей

Будем записывать последовательности в виде

$$\mathbf{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots,} \qquad (3.1)$$

или (в более коротком виде) $\{\mathbf{u_n}\}$. Если существуют натуральное число $\mathbf{k}$ и числа $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ (действительные или мнимые, причем $\mathbf{a_k <> 0}$), такие, что, начиная с некоторого номера m и для всех следующих номеров,

$$\mathbf{u_{n+k} = a_1\, u_{n+k-1} + a_2\, u_{n+k-2}, \ldots, a_k\, u_n\ (n \geq m \geq 1)}, \qquad (3.2)$$

то последовательность (3.1) называется возвратной последовательностью порядка $\mathbf{k}$, а соотношение (3.2) – возвратным уравнением порядка $\mathbf{k}$.

Таким образом, возвратная последовательность характеризуется тем, что каждый ее член выражается через одно и то же количество $\mathbf{k}$ непосредственно предшествующих ему членов по формуле (3.2). Само название «возвратная» (а также рекуррентная, от франц. recurrent – возвращающаяся к началу) употребляется именно в связи с тем, что для вычисления последующего члена возвращаются к предшествующим. Приведем несколько примеров возвратных последовательностей.

Примеры алгоритмических записей возвратных последовательностей

Пример 1. Геометрическая прогрессия.

Имеем геометрическую прогрессию

$$\mathbf{u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \ldots, u_n = aq^{n-1}, \ldots}; \qquad (3.3)$$

для выражения (3.3) уравнение (3.2) принимает вид

$$\mathbf{u_{n+1} = qu_n}, \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{k = 1}$ и $\mathbf{a_1 = q}$.

Уравнение (3.4) является уравнением вида (3.2). Таким образом, геометрическая прогрессия – возвратная последовательность первого порядка.

Пример 2. Арифметическая прогрессия.

В случае арифметической прогрессии $\mathbf{u_1 = a, u_2 = a + d, u_3 = a + 2d, \dots, u_n = a + (n - 1)d, \dots}$; имеем $\mathbf{u_{n+1} = u_n + d}$ – соотношение, не имеющее вида уравнения (3.2). Для последнего характерно то, что в его правую часть входят одни только члены последовательности с постоянными коэффициентами при них. Однако если рассмотреть два соотношения, написанные для двух соседних значений $\mathbf{n}$: $\mathbf{u_{n+2} = u_{n+1} + d}$ и $\mathbf{u_{n+1} = u_n + d}$,

то получим из них путем почленного вычитания $\mathbf{u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n}$, или

$$\mathbf{u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{k = 2}$, $\mathbf{a_1 = 2}$, $\mathbf{a_2 = -1}$.

Уравнение (3.5) является уравнением вида (3.2). Следовательно, арифметическая прогрессия – возвратная последовательность второго порядка.

Пример 3. Рассмотрим старинную задачу Фибоначчи [8] о кроликах.

Требуется определить число пар зрелых кроликов, образовавшихся от одной пары в течение года, если известно, что каждая зрелая пара ежемесячно рождает новую, причем новорожденные достигают полной зрелости в течение месяца. В этой задаче интересен совсем не результат, получить который очень легко, а последовательность, члены которой выражают общее число зрелых пар кроликов в начальный момент ($\mathbf{u_1}$), через месяц ($\mathbf{u_2}$), через два месяца ($\mathbf{u_3}$) и через $\mathbf{n}$ месяцев ($\mathbf{u_{n+1}}$). Очевидно, что $\mathbf{u_1 = 1}$. Через месяц прибавится пара новорожденных, но число зрелых пар будет прежнее: $\mathbf{u_2 = 1}$. Через два месяца крольчата достигнут зрелости и общее число зрелых пар будет равно двум: $\mathbf{u_3 = 2}$. Пусть мы уже вычислили количество зрелых пар через $\mathbf{n - 1}$ месяцев ($\mathbf{u_n}$) и через $\mathbf{n}$ месяцев их $\mathbf{u_n + 1}$. Так как к этому времени $\mathbf{u_n}$ ранее имевшихся зрелых пар дадут еще $\mathbf{u_n}$ пар приплода, то через $\mathbf{n + 1}$ месяцев общее число зрелых пар будет

$$\mathbf{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n}. \tag{3.6}$$

Отсюда

$$\mathbf{u_4 = u_3 + u_2 = 3;\ u_5 = u_4 + u_3 = 5;\ u_6 = u_5 + u_4 = 8;}$$
$$\mathbf{u_7 = u_6 + u_5 = 13;\ \dots}\ .$$

Таким образом, получили последовательность

$$\left.\begin{matrix}\mathbf{u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3} \\ \mathbf{u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, \dots}\end{matrix}\right\}, \tag{3.7}$$

в которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. Данная последовательность (3.7) называется последовательностью Фибоначчи, а члены ее – числами Фибоначчи. Уравнение (3.6) показывает, что последовательность Фибоначчи есть возвратная последовательность второго порядка.

Пример 4. В качестве следующего примера рассмотрим последовательность квадратов натуральных чисел:

$$\mathbf{u_1 = 1^2,\ u_2 = 2^2,\ u_3 = 3^2,\ \ldots,\ u_n = n^2,\ \ldots} \quad (3.8)$$

Здесь $\mathbf{u_{n+1} = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1}$ и, следовательно,

$$\mathbf{u_{n+1} = u_n + 2n + 1}. \quad (3.9)$$

Увеличивая $\mathbf{n}$ на единицу, получим

$$\mathbf{u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3}. \quad (3.10)$$

Таким образом (вычитая почленно выражение (3.9) из уравнения (3.10)),

$$\mathbf{u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2,}$$

или

$$\mathbf{u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2}. \quad (3.11)$$

Увеличивая в равенстве (3.11) $\mathbf{n}$ на единицу, будем иметь

$$\mathbf{u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2}, \quad (3.12)$$

откуда (вычитая почленно (3.11) из (3.12))

$$\mathbf{u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n},$$

или в итоге имеем

$$\mathbf{u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n}. \quad (3.13)$$

Получили возвратное уравнение третьего порядка (3.13). Следовательно, последовательность (3.8) есть возвратная последовательность третьего порядка. Подобным же образом можно убедиться в том, что последовательность кубов натуральных чисел (3.14)

$$\mathbf{1^3, 2^3, 3^3, \ldots, n^3, \ldots} \quad (3.14)$$

есть возвратная последовательность четвертого порядка. Члены ее удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n}. \quad (3.15)$$

Предлагаем вывести уравнение (3.15).

Пример 5. К возвратным относятся все периодические последовательности. Рассмотрим, например, последовательность цифр десятичного разложения числа $\mathbf{761/1332 = 0{,}57132132132\ldots}$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3;} \\ &\mathbf{u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = 3, \ldots\ .} \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{u_{n+3} = u_n} \quad (\mathbf{n \geq 3}). \quad (3.17)$$

Чтобы представить уравнение (3.17) в виде (3.2), перепишем его следующим образом: $\mathbf{u_{n+3} = 0u_{n+2} + 0u_{n+1} + 1u_n}$. Видно, что это возвратное уравнение третьего порядка ($\mathbf{k = 3}$, $\mathbf{a_1 = 0}$, $\mathbf{a_2 = 0}$, $\mathbf{a_3 = 1}$).

Итак, последовательность (3.16) есть возвратная последовательность третьего порядка.

Пример 6. Рассмотрим последовательность коэффициентов частного от деления двух многочленов, расположенных по возрастающим степеням $\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{P(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_lx^l}$ и $\mathbf{Q(x) = B_0 + B_1x + \ldots + B_kx^k}$ $(\mathbf{B_0 \neq 0})$.

Будем делить $\mathbf{P(x)}$ на $\mathbf{Q(x)}$; если $\mathbf{P(x)}$ не делится на $\mathbf{Q(x)}$ без остатка, то деление можно продолжать неограниченно. В частном один за другим будут получаться члены $\mathbf{D_0 + D_1x + D_2x^2 + \ldots + D_nx^n + \ldots}$.

Рассмотрим последовательность

$$\mathbf{u_1 = D_0,\ u_2 = D_1,\ \ldots,\ u_n = D_{n-1},\ \ldots} \tag{3.18}$$

и докажем, что она является возвратной порядка $\mathbf{k}$ (напомним, что $\mathbf{k}$ есть степень делителя). Для этой цели зафиксируем произвольное натуральное число $\mathbf{n}$, удовлетворяющее единственному условию $\mathbf{n \geq l - k + 1}$, и остановимся в процессе деления на члене частного, содержащем $\mathbf{x^{n+k}}$. Тогда в остатке получится некоторый многочлен $\mathbf{R\{x\}}$, содержащий x в степенях, которые выше, чем $\mathbf{n + k}$. Записывая соотношение между делимым, делителем, частным и остатком, получим тождество

$$\mathbf{A_0 + \ldots + A_l\,x^l = (B_0 + \ldots + B_kx^k)(D_0 + \ldots + D_{n+k}x^{n+k}) + R(x)}.$$

Найдем коэффициенты при $\mathbf{x^{n+k}}$ в левой и правой частях этого тождества и приравняем их между собой. Так как $\mathbf{n + k \geq l + 1}$, то коэффициент при $\mathbf{x^{n+k}}$ в левой части равен нулю. Поэтому должен равняться нулю и коэффициент при $\mathbf{x^{n+k}}$ в правой части. Однако члены с $\mathbf{x^{n+k}}$ содержатся здесь только в произведении

$$\mathbf{(B_0 + \ldots + B_k\,x^k)(D_0 + \ldots + D_{n+k}\,x^{n+k})}$$

(остаток $\mathbf{R(x)}$ содержит $\mathbf{x}$ в более высоких степенях). Искомый коэффициент имеет вид

$$\mathbf{D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \ldots D_nB_k} \tag{3.19}$$

и равен нулю:

$$\mathbf{D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \ldots D_nB_k = 0},$$

откуда $(\mathbf{B \neq 0})$.

$$\mathbf{D_{n+k} = -B_1/B_0D_{n+k-1} - \ldots - B_k/B_0D_n} \qquad \mathbf{(n \geq l - k + 1)}. \tag{3.20}$$

Выражение (3.20) – возвратное уравнение порядка $\mathbf{k}$, из которого вытекает, что последовательность (3.18) есть возвратная последовательность порядка $\mathbf{k}$.

3.3. Вывод обобщенной формулы произвольной возвратной последовательности порядка k для некоторого полиномиального многочлена P(x)

Из всех рассмотренных выше примеров наиболее общий характер имеет пример 6. Покажем, что произвольная возвратная последовательность (3.21) порядка $\mathbf{k}$

$$\mathbf{u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots,} \tag{3.21}$$

удовлетворяющая уравнению вида

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \ldots + a_ku_n \quad (n \geq m \geq 1), \tag{3.22}$$

совпадает с последовательностью коэффициентов частного, полученного от деления некоторого многочлена $P(x)$ на многочлен

$$Q(x) = 1 - a_1x - \ldots - a_kx^k. \tag{3.23}$$

Пусть n – произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию $n > k + m - 2$; умножим многочлен $Q(x)$ на $u_1 + u_2x + u_3x^2 + \ldots + u_{n+1}x^n$. Получим

$$\begin{gathered}(1 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_kx^k)(u_1 + u_2x + \ldots + \\ + u_{k+m-1}x^{k+m-2} + \ldots + u_{n+1}x^n) = \\ = [u_1 + (u_2 - a_1u_1)x + \ldots + \\ + (u_{k+m-1} - a_1u_{k+m-2}) - a_ku_{m-1})x^{k+m-2})] + \\ + [(u_{k+m} - a_1u_{k+m-1} - \ldots - a_ku_m)x^{k+m-1} + \\ + \ldots + (u_{n+1} - a_1u_n - \ldots - a_ku_{n-k+1})x^n] - \\ - [(a_1u_{n+1} + \ldots + a_ku_{n-k+2})x^{n+1} + \ldots + a_ku_{n+1}x^{n+k}].\end{gathered} \tag{3.24}$$

В первой квадратной скобке находится многочлен степени не выше $l = k + m - 2$, коэффициенты которого не зависят от взятого нами числа n. Обозначим его через $P(x)$:

$$\begin{gathered}P(x) = u_1 + (u_2 - a_1u_1)x + \ldots + \\ + (u_{k+m-1} - a_1u_{k+m-2} - \ldots - a_ku_{m-1})x^{k+m-2}.\end{gathered} \tag{3.25}$$

В следующей квадратной скобке находится многочлен, все коэффициенты которого равны нулю в силу равенства (3.22). Наконец, в последней квадратной скобке заключается многочлен, коэффициенты которого зависят от n; он не содержит членов степени ниже $n + 1$. Обозначая его через $R_n(x)$, перепишем тождество (3.24) в виде (3.26):

$$\begin{gathered}P(x) = (1 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_kx^k)(u_1 + u_2x + \\ + \ldots + u_{n+1}x^n) + R_n(x).\end{gathered} \tag{3.26}$$

Видно, что $u_1 + u_2x + \ldots + u_{n+1}x^n$ представляет собой частное, а $Q(x) = 1 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_kx^k$ – остаток от деления $P(x)$ на $R_n(x)$, т.е. $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ действительно является последовательностью коэффициентов частного, получаемого от деления многочлена (3.25) на (3.23).

Для примера рассмотрим последовательность Фибоначчи

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, \ldots .$$

Так как ее члены удовлетворяют уравнению

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 1),$$

то здесь $m = 1, k = 2, a_1 = 1, a_2 = 1$ и $Q(x) = 1 - x - x^2$.

Многочлен $P(x)$ должен иметь степень не выше $k + m - 2 = 1$. По формуле (3.25) получаем $P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1)x = 1$.

Итак, числа Фибоначчи совпадают с последовательностью коэффициентов частного от деления 1 на $1 - x - x^2$.

3.4. Сумма n членов арифметической и геометрической прогрессий

Один из вопросов, который приходится решать в курсе средней школы относительно арифметической и геометрической прогрессий, а также последовательности квадратов натуральных чисел, заключается в отыскании суммы **n** членов каждой из этих последовательностей. Пусть

$$\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots} - \qquad (3.27)$$

возвратная последовательность порядка **k**, члены которой удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n \quad (n \ge m).} \qquad (3.28)$$

Рассмотрим новую последовательность, образованную суммами $\mathbf{S}_n$ чисел (3.27):

$$\mathbf{s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\ \ldots}, \qquad (3.29)$$

и покажем, что последовательность сумм (3.29) является также возвратной, порядка **k + 1,** причем ее члены удовлетворяют уравнению

$$\begin{gathered}\mathbf{s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} +}\\ \mathbf{+ (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \ldots + (a_k - a_{k-1})s_{n+1} - a_ks_n.}\end{gathered} \qquad (3.30)$$

Для доказательства заметим, что

$$\left.\begin{gathered}\mathbf{u_1 = s_1, u_2 = s_2 - s_1, \ldots}\\ \mathbf{\ldots, u_n = s_n - (u_1 + \ldots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}, \ldots}\,.\end{gathered}\right\} \qquad (3.31)$$

Полагая $\mathbf{s_0 = 0}$, так, что $\mathbf{u_1 = s_1 - s_0}$, и подставляя в уравнение (3.28) вместо $\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots}$ их выражения через $\mathbf{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots}$ (3.31), получим

$$\begin{gathered}\mathbf{s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1(s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) +}\\ \mathbf{+ a_2(s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \ldots + a_k(s_n - s_{n-1}).}\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\mathbf{s_{n+k} = (1 + a_1)s_{n+k-1} + (a_2 - a_1)s_{n+k-2} + \ldots +}\\ \mathbf{+ (a_k - a_{k-1})s_n - a_ks_{n-1} \quad (n \ge m),}\end{gathered}$$

или, заменяя **n** на **n + 1**,

$$\begin{gathered}\mathbf{s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \ldots +}\\ \mathbf{+ (a_k - a_{k-1})s_{n+1} - a_ks_n \quad (n \ge m - 1).}\end{gathered}$$

Это возвратное уравнение порядка **k + 1**.

Приведем несколько примеров.

А. Геометрическая прогрессия. Здесь

$$\mathbf{u_n = aq^{n-1}} \text{ и } \mathbf{s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}}.$$

Так как члены $\mathbf{\{u_n\}}$удовлетворяют уравнению вида

$$\mathbf{u_{n+1} = qu_n,}$$

то члены $\mathbf{\{S_n\}}$ должны удовлетворять уравнению

$$\mathbf{s_{n+2} = (1 + q)s_{n+1} - qs_n.} \qquad (3.32)$$

Б. Последовательность квадратов натуральных чисел. Здесь

$$\mathbf{u_n = n^2} \text{ и } \mathbf{s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}.$$

Так как члены $\mathbf{\{u_n\}}$ удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n}$$

(см. стр. 37), то члены $\mathbf{\{S_n\}}$ удовлетворяют уравнению вида

$$\mathbf{s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n.}$$

В. Числа Фибоначчи. Так как они удовлетворяют уравнению

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

то суммы их S_n должны удовлетворять уравнению

$$s_{n+3} = 2s_{n+2} - s_n.$$

3.5. Формулы вычисления любого члена возвратной последовательности

В случае простейших возвратных последовательностей, например арифметической и геометрической прогрессий, последовательности квадратов или кубов натуральных чисел, а также в случае периодической последовательности можем находить любой член последовательности, не прибегая к вычислению предшествующих. В случае последовательности чисел Фибоначчи или общей последовательности коэффициентов частного от деления двух многочленов это, на первый взгляд, невозможно, и, чтобы вычислить тринадцатое число Фибоначчи u_n, нужно найти предварительно, один за другим, все предшествующие члены (пользуясь уравнением $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$):

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, u_9 = 34,$$
$$u_{10} = 55, u_{11} = 89, u_{12} = 144, u_{13} = 233.$$

Займемся детальным исследованием структуры членов возвратной последовательности. В результате получим формулы, позволяющие вычислять в самом общем случае любой член возвратной последовательности, не прибегая к вычислению предшествующих членов. Данные формулы можно будет рассматривать как далеко идущие обобщения формул для общего члена арифметической или геометрической прогрессий. Пусть

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n - \qquad (3.33)$$

это возвратное уравнение порядка k. Если оно выполняется для всех натуральных значений то, положив $n = 1$, получим $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Итак, зная $u_1, u_2, \ldots, u_k$, можно вычислить u_{k+1}:

$$u_{k+1} = a_1u_k + a_2u_{k-1} + \ldots + a_ku_1.$$

Полагая в уравнении (3.33) $n = 2$, найдем

$$u_{k+2} = a_1u_{k+1} + a_2u_k + \ldots + a_ku_2.$$

Следовательно, теперь нам известно и значение u_{k+2}.

Вообще, если m – какое-либо натуральное число и уже вычислены члены последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{m+k-1}$, то, полагая в уравнении (3.33) $n = m$, можно найти из него следующий член u_{m+k}.

Итак, члены возвратной последовательности порядка k, удовлетворяющей уравнению (3.33), определяются единственным образом с помощью этого уравнения, если известны первые k членов последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Выбирая их разными способами (этот выбор не связан никакими ограничениями), можем получить бесконечное множество различных последовательностей, удовлетворяющих уравнению (3.33). Их различие между собой будет проявляться уже в первых **k** членах (по крайней мере, в одном из них) и обнаруживаться также и в дальнейших членах.

Так, например, уравнению первого порядка $\mathbf{u_{n+1} = qu_n}$ удовлетворяют всевозможные геометрические прогрессии со знаменателем **q** (они отличаются друг от друга значениями первого члена $\mathbf{u_1}$); уравнению второго порядка

$$\mathbf{u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n} \text{ (или } \mathbf{u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n}\text{)}$$

удовлетворяют всевозможные арифметические прогрессии, отличающиеся друг от друга хотя бы одним из членов $\mathbf{u_1 = a}$ и $\mathbf{u_1 = a + d}$ и, следовательно, различающиеся либо значением первого члена (**a**), либо значением разности (**d**), либо и тем и другим.

Рассмотрим уравнение второго порядка $\mathbf{u_{n+2} = u_{n+1} - u_n}$. Ему, кроме последовательности Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... , характеризующейся тем, что здесь $\mathbf{u_1 = u_2 = 1}$, удовлетворяет еще бесконечное множество других последовательностей, получающихся при различном выборе значений $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$. Так, например, при $\mathbf{u_1 = -3}$ и $\mathbf{u_2 = 1}$ получаем последовательность –3, 1, –2, –1, –3, –4, –7, –11, –18, –29, … .

Пусть имеем некоторое количество последовательностей, удовлетворяющих одному и тому же уравнению (3.33):

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,} \\ \mathbf{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,} \\ \ldots \\ \mathbf{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots.} \end{array}\right\} \qquad (3.34)$$

Тогда выполняются уравнения:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \ldots + a_kx_n,} \\ \mathbf{y_{n+k} = a_1y_{n+k-1} + a_2y_{n+k-2} + \ldots + a_ky_n,} \\ \ldots \\ \mathbf{z_{n+k} = a_1z_{n+k-1} + a_2z_{n+k-2} + \ldots + a_kz_n.} \end{array}\right\} \qquad (3.35)$$

Возьмем произвольные числа **A**, **B**, …, **C** (по количеству последовательностей (3.34)), умножим все члены первого из уравнений (3.35) на **A**, второго – на **B**, **…** , последнего – на **C** и сложим. Тогда получим равенство

$$\begin{array}{c} \mathbf{Ax_{n+k} + By_{n+k} + \ldots + Cz_{n+k} =} \\ \mathbf{= a_1(Ax_{n+k-1} + By_{n+k-1} + Cz_{n+k-1}) +} \\ \mathbf{+ a_2(Ax_{n+k-2} + By_{n+k-2} + Cz_{n+k-2}) + \ldots +} \\ \mathbf{+ a_k(Ax_n + By_n + Cz_n).} \end{array} \qquad (3.36)$$

Из равенства (3.36) следует, что последовательность

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{t_1 = Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1} \\ \mathbf{t_2 = Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2} \\ \ldots \\ \mathbf{t_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n} \end{array}\right\}, \qquad (3.37)$$

получающаяся из последовательностей (3.34) путем умножения всех членов первой из них на **A**, второй на **B**, **...**, последней на **C** и затем почленного сложения последовательностей (первых членов с первыми, вторых со вторыми и т.д.), удовлетворяет данному уравнению (3.33). Изменяя **A**, **B**, **...**, **C**, можно получать различные значения членов $\mathbf{t_1, t_2, t_3}$, … . Пусть теперь

$$\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots} - \qquad (3.38)$$

какая-либо последовательность, удовлетворяющая уравнению (3.33). Возникает вопрос: нельзя ли придать числам **A**, **B**, **...**, **C** такие значения, чтобы первые **k** члены последовательности (3.37) совпали с первыми **k** членами последовательности (3.38)? Если это удастся, то совпадут и все члены последовательностей (3.37) и (3.38), т.е. будем иметь при любом натуральном **n**

$$\mathbf{u_n = Ax_n + By_n + Cz_n}. \qquad (3.39)$$

Таким образом, открывается возможность (пока гипотетическая) представить любую из бесконечного множества последовательностей, удовлетворяющих одному и тому же возвратному уравнению порядка **k**, через некоторые из формул (3.34) по формуле (3.39). Реализация зависит от того, можно ли или нельзя подобрать числа **A, B, ..., C** таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1 = u_1} \\ \mathbf{Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2 = u_2} \\ \ldots \\ \mathbf{Ax_k + By_k + \ldots + Cz_k = u_k} \end{array}\right\} \qquad (3.40)$$

с произвольно заданными значениями правых частей $\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_k}$.

Так как неизвестными являются числа **A**, **B**, **...**, **C**, а число уравнений равно порядку **k** возвратного уравнения, отсюда следует, что и количество неизвестных **A**, **B**, **...**, **C** (а оно совпадает с количеством последовательностей (3.34)) целесообразно взять также равным **k**.

Известно, что наличие решений у системы **k** алгебраических уравнений (3.40) с **k** неизвестными, **B**, **...**, **C** зависит от того, каковы коэффициенты этой системы: $\mathbf{x_1, y_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, y_k, \ldots, z_k}$, т.е. от того, каковы начальные члены последовательностей (3.34). Решение, возможно, будет существовать при произвольных правых частях $\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_k}$, если положим, например, что

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x_1 = 1,\ y_1 = 0, \ldots,\ z_1 = 0,} \\ \mathbf{x_2 = 0,\ y_2 = 1, \ldots,\ z_2 = 0,} \\ \ldots \\ \mathbf{x_k = 0, y_k = 0, \ldots, z_k = 1.} \end{array}\right\} \qquad (3.41)$$

В данном случае система (3.40) принимает простейший вид, сразу обнаруживающий решение системы

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{A = u_1,} \\ \mathbf{B = u_2,} \\ \ldots \\ \mathbf{C = u_k.} \end{array}\right\}$$

Конечно, возможен и иной выбор чисел $\mathbf{x_1, \dots, z_1, \dots, x_k, \dots, z_k}$, при котором система (3.40) имеет решение, каковы бы ни были правые части уравнений. Например, положим

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{x_1 = 1,\ y_1 = 1, \dots,\ z_1 = 1,} \\ \mathbf{x_2 = 0,\ y_2 = 1, \dots,\ z_2 = 1,} \\ \dots \\ \mathbf{x_k = 0, y_k = 0, \dots, z_k = 1.}\end{array}\right\}. \qquad (3.42)$$

Тогда система примет вид:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A + B + \dots + C = u_1} \\ \mathbf{B + \dots + C = u_2} \\ \dots \\ \mathbf{C = u_k}\end{array}\right\},$$

откуда последовательно получаем $\mathbf{C = u_k, \dots, B = u_2 - u_3, A = u_1 - u_2}$.

Обращаясь к общему случаю, сформулируем теорему:

Для того чтобы система $\mathbf{k}$ линейных алгебраических уравнений (3.40) с $\mathbf{k}$ неизвестными имела решение $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\dots$, $\mathbf{C}$, причем единственное, при любых значениях правых частей $\mathbf{u_1, u_2, \dots, u_k}$ достаточно, чтобы соответствующая ей однородная система

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{Ax_1 + By_1 + \dots + Cz_1 = 0} \\ \mathbf{Ax_2 + By_2 + \dots + Cz_2 = 0} \\ \dots \\ \mathbf{Ax_k + By_k + \dots + Cz_k = 0}\end{array}\right\}$$

имела одно только нулевое решение. $\mathbf{A = B = \dots = C = 0}$.

Примечание. Указанное предложение удобно тем, что для его применения не требуется изучать теорию определителей. Для существования решения системы (3.40) при любых значениях правых частей этих уравнений необходимо и достаточно, чтобы определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix}\mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \dots & \mathbf{z_1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \dots & \mathbf{z_2} \\ & & \dots & \\ \mathbf{x_k} & \mathbf{y_k} & \dots & \mathbf{z_k}\end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Это же условие необходимо и достаточно для того, чтобы решение системы (3.40) являлось единственным при каких-либо фиксированных правых частях (например, равных нулю). Таким образом, для системы линейных уравнений с $\mathbf{k}$ неизвестными условия существования решения при любых правых частях совпадают с условиями единственности решения при нулевых правых частях.

Легко проверить, что условие теоремы выполняется в частных случаях (3.41) и (3.42). В дальнейшем будут случаи, в которых высказанное предложение окажется полезным. Пока же следует просто опираться на тот факт (установленный независимо от последней теоремы), что всегда существуют числа $\mathbf{x_1, \dots, z_1, \dots, x_k, \dots, z_k}$ (начальные члены последовательностей (3.34)) такие, что система уравнений (3.40) имеет решения при любых $\mathbf{u_1, u_2, \dots, u_k}$. Если числа такого рода выбраны в качестве начальных членов последовательностей (3.34), то любая последовательность, удовлетворяющая возвратному уравнению (3.33), выразится по формуле (3.39), где числа **A**, **B**, **...**, **C** определяются из уравнений (3.40). Система **k** последовательностей (3.34), через которые члены любой последовательности, удовлетворяющей данному уравнению (3.33), выражаются по формулам (3.39) (т.е. путем умножения на некоторые числа **A**, **B**, **...**, **C** и сложения), называется базисом возвратного уравнения. Из изложенного следует, что каждое уравнение обладает базисом, который можно выбирать по-разному. Например, системы с начальными членами

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} \mathbf{1, 0, \ldots, 0} \\ \mathbf{0, 1, \ldots, 0} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{0, 0, \ldots, 1} \end{matrix}\right\}}_{(\mathbf{k})} \quad \text{или} \quad \underbrace{\left.\begin{matrix} \mathbf{1, 1, \ldots, 1} \\ \mathbf{0, 1, \ldots, 1} \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{0, 0, \ldots, 1} \end{matrix}\right\}}_{(\mathbf{k})}$$

образуют базис произвольного возвратного уравнения порядка **k**.

Для каждого возвратного уравнения порядка **k** существует бесконечное множество различных удовлетворяющих ему последовательностей. Любую из них можно составить из **k** последовательностей, удовлетворяющих этому уравнению и образующих его базис, путем умножения каждой из **k** последовательностей на некоторые числа **A, B, …, C**, а также почленного сложения.

Таким образом, для полного решения возвратного уравнения порядка **k** достаточно найти лишь конечное число **k** удовлетворяющих ему последовательностей, образующих базис этого уравнения.

Поясним сказанное примерами.

Пример 7. Пусть дано возвратное уравнение второго порядка

$$\mathbf{u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n}.$$

Его базис должен состоять из двух последовательностей:

$$\mathbf{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots};$$

$$\mathbf{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots} \;.$$

Выберем их, положив $\mathbf{x_1 = 1, x_2 = 1}$ и $\mathbf{y_1 = 0, y_2 = 1}$.

Так как возвратное уравнение, переписанное в виде

$$\mathbf{u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n},$$

показывает, что разность соседних членов последовательности является постоянной, т.е. последовательность, удовлетворяющая данному уравнению, является арифметической прогрессией, то в случае последовательности $\mathbf{\{x_n\}}$ с начальными членами $\mathbf{x_1 = 1}$ и $\mathbf{x_2 = 1}$ получим арифметическую прогрессию с разностью нуль, т.е. $\mathbf{1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\ (x_n = 1)}$, а в случае последовательности $\mathbf{\{y_n\}}$ с начальными членами $\mathbf{y_1 = 0}$ и $\mathbf{y_2 = 1}$ – арифметическую прогрессию с разностью, равной единице, т.е. $\mathbf{0, 1, 2, \ldots, n - 1, \ldots\ (y_n = n - 1)}$.

По формуле (3.39) член любой возвратной последовательности, удовлетворяющей данному уравнению, может быть представлен в виде

$$u_n = Ax_n + B\,y_n = A + B(n - 1),$$

где **A** и **B** должны быть определены из уравнений:

$$u_1 = A + B(1 - 1),$$
$$u_2 = A + B(2 - 1),$$

т.е.

$$u_1 = A;$$
$$u_2 = A + B.$$

Отсюда $A = u_1$, $B = u_2 - u_1$ и, следовательно, $u_n = u_1 + (n - 1)(u_2 - u_1)$. Это и есть общая формула для члена любой последовательности, удовлетворяющей уравнению $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Полагая $u_1 = a$, $u_2 - u_1 = d$, представим общую формулу в виде $u_n = a + (n - 1)d$. Это известная формула для общего члена арифметической прогрессии.

Пример 8. Рассмотрим другое возвратное уравнение второго порядка: $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Полагая $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, получим уже знакомую последовательность Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, … .

В качестве второй последовательности, входящей в состав базиса, возьмем последовательность $\{y_n\}$, для которой $y_1 = 0$ и $y_2 = 1$. Будем иметь:

$$y_3 = y_2 + y_1 = 1; \quad y_4 = y_3 + y_2 = 2; \quad y_5 = y_4 + y_3 = 3, \quad \ldots$$

Здесь $y_2 = x_1$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_3$, $y_5 = x_4$, … и $y_n = x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

В самом деле, если уже установили эти равенства для всех значений $n \le m + 1$ так, что, в частности, $y_{m+1} = x_m$, $y_m = x_{m-1}$, то для y_{m+2} получим

$$y_{m+2} = y_{m+1} + y_m = x_m + x_{m-1} = x_{m+1},$$

т.е. предполагаемые равенства справедливы и для $n = m + 2$.

Итак, $y_n = x_{n-1}$ $\quad (n = 2, 3, \ldots)$.

Таким образом, для любой последовательности, удовлетворяющей уравнению $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, находим по предыдущей формуле (3.39)

$$u_n = Ax_n + By_n,$$

где **A** и **B** определяются из уравнений:

$$u_1 = Ax_1 + By_1 = A;$$
$$u_2 = Ax_2 + By_2 = A + B.$$

Отсюда $A = u_1$, $B = u_2 - u_1$ и $u_n = u_1\,x_n + (u_2 - u_1)y_n$.

При $n \ge 2$ $\;y_n$ можно заменить на x_{n-1}, откуда

$$u_n = u_1x_n + (u_2 - u_1)x_{n-1} \quad (n \ge 2),$$

или

$$u_n = u_1(x_n - x_{n-1}) + u_2x_{n-1}.$$

При $n \ge 3$

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$

т.е. $x_n - x_{n-1} = x_{n-2}$, следовательно,

$$u_n = u_1x_{n-2} + u_2x_{n-1} \qquad (n \ge 3).$$

Итак, члены любой последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,$$

выражаются через числа Фибоначчи по найденной формуле. В частности, если $\mathbf{u_1 = -3}$, $\mathbf{u_2 = 1}$ (см. стр. 42), то

$$\mathbf{u_n = -3x_{n-2} + x_{n-1} \ (n \geq 3)}.$$

3.6. Нахождение базиса возвратного уравнения, состоящего из k геометрических прогрессий с различными знаменателями

Покажем, что при некоторых общих условиях можно найти базис возвратного уравнения (3.33):

$$\mathbf{u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n},$$

состоящий из $\mathbf{k}$ геометрических прогрессий с различными знаменателями. С этой целью выясним, при каких условиях некоторая геометрическая прогрессия $\mathbf{x_1 = 1, x_2 = q, \ldots, x_n = q^{n-1}, \ldots \ (q \neq 0)}$ удовлетворяет уравнению (3.33). Замечая, что $\mathbf{x_{n+k} = q^{n+k-1}}$, $\mathbf{x_{n+k-1} = q^{n+k-2}, \ldots, x_n = q^{n-1}}$, и подставляя эти величины в уравнение (3.33) (вместо $\mathbf{u_{n+k}, u_{n+k-1}, \ldots, u_n}$), получим $\mathbf{q^{n+k-1} = a_1q^{n+k-2} + a_2q^{n+k-3} + \ldots + a_kq^{n-1}}$. Отсюда

$$\mathbf{q^k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \ldots + a_k}. \qquad (3.43)$$

Итак, геометрическая прогрессия только тогда может удовлетворять возвратному уравнению (3.33) порядка $\mathbf{k}$, когда знаменатель прогрессии $\mathbf{q}$ удовлетворяет алгебраическому уравнению (3.43) степени $\mathbf{k}$ с теми же коэффициентами, что и в уравнении (3.33).

Уравнение (3.43) называется характеристическим для возвратного уравнения (3.33). Если $\mathbf{q = a}$ – какой-либо корень характеристического уравнения (действительный или мнимый), то, положив

$$\mathbf{x_n = a^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)}, \qquad (3.44)$$

получим геометрическую прогрессию с первым членом $\mathbf{x_1 = 1}$ и знаменателем α, которая удовлетворяет уравнению (3.33). В самом деле, по условию, α есть корень уравнения (3.43), т.е.

$$\boldsymbol{\alpha^k = a_1\alpha^{k-1} + a_2\alpha^{k-2} + \ldots + a_k}.$$

Умножая обе части на $\boldsymbol{\alpha^{n-1}}$, где $\mathbf{n}$ – произвольное натуральное число, получаем $\boldsymbol{\alpha^{n+k-1} = a_1\alpha^{n+k-2} + a_2\alpha^{n+k-3} + \ldots + a_k\alpha^{n-1}}$, т.е. последовательность (3.44) удовлетворяет уравнению (3.33).

Итак, каждому корню $\boldsymbol{q = \alpha}$ характеристического уравнения (3.43) соответствует геометрическая прогрессия (3.44) со знаменателем α, удовлетворяющая возвратному уравнению (3.33).

Чтобы составить базис из одних лишь геометрических прогрессий с различными знаменателями, нужно иметь их в достаточном количестве, равном $\mathbf{k}$, а для этого нужно иметь $\mathbf{k}$ различных корней характеристического уравнения.

Допустим, что все корни характеристического уравнения различны:

$$\boldsymbol{q_1 = \alpha, q_2 = \beta, q_k = \gamma}.$$

Тогда получим $\mathbf{k}$ геометрических прогрессий, удовлетворяющих уравнению (3.33):

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{1}, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \ldots, \\ \mathbf{1}, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{1}, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}, \ldots. \end{array}\right\} \qquad (3.45)$$

Покажем, что система последовательностей (3.45) составляет базис уравнения (3.33), т.е. что для всякой последовательности $\{\mathbf{u_n}\}$, удовлетворяющей уравнению (3.33), можно подобрать такие числа **A, B, ..., C**, что будем иметь при любом $\mathbf{n}$

$$\mathbf{u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1}}. \qquad (3.46)$$

Для доказательства достаточно проверить, что система уравнений (3.47), получаемых из (3.45), при $\mathbf{n = 1, 2, ..., k}$:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A + B + \ \ldots\ + C = u_1} \\ \mathbf{A\alpha + B\beta + \ \ldots\ + C\gamma = u_2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} + \ \ldots\ + C\gamma^{k-1} = u_k} \end{array}\right\}, \qquad (3.47)$$

имеет решение относительно неизвестных **A, B, …, C** при любых значениях правых частей этих уравнений, а для этого достаточно (см. стр. 44), чтобы соответствующая однородная система

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A + B + \ \ldots\ + C = 0} \\ \mathbf{A\alpha + B\beta + \ \ldots\ + C\gamma = 0} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} + \ \ldots\ + C\gamma^{k-1} = 0} \end{array}\right\} \qquad (3.48)$$

допускала одно только нулевое решение.

В самом деле, допустим, что существует ненулевое решение (3.48), т.е. что существуют числа **A, B, ..., C**, из которых хотя бы одно, например **A**, отлично от нуля, удовлетворяло системе (3.48). Чтобы вывести отсюда противоречие, построим сначала многочлен $\mathbf{M(x)}$ степени $\mathbf{k - 1}$, обращающийся в нуль при $\mathbf{x = \beta, \ldots, x = \gamma}$ и в единицу при $\mathbf{x = \alpha}$. Так как многочлен этой степени $\mathbf{k - 1}$ обращается в нуль при $\mathbf{k - 1}$ различных значениях $\mathbf{x}$: $\mathbf{\beta, \ldots, \gamma}$, то он должен иметь вид

$$\mathbf{M(x) = \mu(x - \beta)\ldots(x - \gamma)},$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – какое-либо число. Полагая $\mathbf{x = \alpha}$, нужно получить $\mathbf{M(\alpha) = 1}$, откуда

$$\mathbf{1 = \mu(\alpha - \beta)\ldots(\alpha - \gamma)}$$

и

$$\mathbf{\mu = 1/((\alpha - \beta)\ldots(\alpha - \gamma))}.$$

Итак, $\mathbf{M(x) = ((x - \beta)\ldots(x - \gamma))/((\alpha - \beta)\ldots(\alpha - \gamma))}$. Очевидно, что многочлен действительно удовлетворяет поставленным условиям. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, представим его в виде

$$\mathbf{M(x) = m_0 + m_1x + \ldots + m_{k-1}x^{k-1}}.$$

Если теперь умножить уравнения (3.48) на $\mathbf{m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}}$ и сложить почленно, то получим

$$\mathbf{A(m_0 + m_1\alpha + \ldots + m_{k-1}\alpha^{k-1}) +}$$
$$\mathbf{+ B(m_0 + m_1\beta + \ldots + m_{k-1}\beta^{k-1}) + \ldots +}$$
$$\mathbf{+ C(m_0 + m_1\gamma + \ldots + m_{k-1}\gamma^{k-1}) = 0,}$$

или

$$\mathbf{AM(\alpha) + BM(\beta) + \ldots + CM(\gamma) = 0}.$$

Однако $\mathbf{M(\alpha) = 1, M(\beta) = 0, M(\gamma) = 0}$ и, следовательно, $\mathbf{A = 0}$, что противоречит предположению.

Итак, система (3.48) имеет одно только нулевое решение и, следовательно, система (3.47) имеет решение (единственное) при любых $\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_k}$, а это, в свою очередь, означает, что система (3.45) образует базис уравнения (3.33). Таким образом, для всякого возвратного уравнения $\mathbf{u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \ldots + a_ku_n}$, для которого соответствующее характеристическое уравнение $\mathbf{q^k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \ldots + a_k}$ имеет различные корни: $\mathbf{q = \alpha, q = \beta, \ldots, q = \gamma}$, существует базис, образованный $\mathbf{k}$ геометрическими прогрессиями со знаменателями α, β, …, γ. Иными словами, для членов любой последовательности $\mathbf{\{u_n\}}$, удовлетворяющей уравнению (3.33), существует $\mathbf{k}$ чисел: **A, B, ..., C** (они находятся из уравнений (3.47)), таких, что

$$\mathbf{u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}.$$

Возвратному уравнению порядка $\mathbf{k}$ соответствует алгебраическое уравнение степени $\mathbf{k}$ с теми же коэффициентами − его характеристическое уравнение. Каждый из корней характеристического уравнения представляет собой знаменатель геометрической прогрессии, удовлетворяющей данному возвратному уравнению. Если все корни характеристического уравнения различны, получаются $\mathbf{k}$ различных геометрических прогрессий, образующих базис возвратного уравнения. Следовательно, в этом случае члены любой последовательности, удовлетворяющей возвратному уравнению, можно получить путем почленного сложения некоторых геометрических прогрессий (в количестве $\mathbf{k}$).

3.7. Применение полученных результатов для чисел Фибоначчи

Применим найденные результаты. Начнем с последовательности Фибоначчи. Здесь возвратное уравнение таково: $\mathbf{u_{n+2} = u_{n+1} - u_n}$, следовательно, характеристическое уравнение (3.43) имеет вид $\mathbf{q^2 = q + 1}$. Решая его, получим два различных действительных корня:

$$\mathbf{\alpha = 1/2 + 1/2\sqrt{5}} \text{ и } \mathbf{\beta = 1/2 - 1/2\sqrt{5}}.$$

Общий член последовательности Фибоначчи можно записать так: $\mathbf{u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}}$.

Чтобы найти неизвестные коэффициенты **A** и **B**, положим $\mathbf{n = 1}$ и $\mathbf{n = 2}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u_1 = 1 = A + B;} \\ &\mathbf{u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A - B).} \end{aligned}\right\}$$

Решая последнюю систему, найдем

$$\mathbf{A = (\sqrt{5} + 1)/(2\sqrt{5}),\ B = (\sqrt{5} - 1)/(2\sqrt{5}),}$$

следовательно,

$$\mathbf{u_n = (\sqrt{5} + 1)/(2\sqrt{5})((1 + \sqrt{5})/2)^{n-1} + (\sqrt{5} - 1)/(2\sqrt{5})((1 - \sqrt{5})/2)^{n-1},}$$

или

$$\mathbf{u_n = 1/\sqrt{5}[((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n].} \qquad (3.49)$$

Это и есть общее выражение для чисел Фибоначчи. На первый взгляд, выведенная формула представляется громоздкой и не слишком удобной для вычислений. Однако с ее помощью можно получить ряд любопытных результатов. Покажем, например, что сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи есть также некоторое число Фибоначчи.

В самом деле:

$$\mathbf{u_n^2 = 1/5[((1 + \sqrt{5})/2)^{2n} + ((1 - \sqrt{5})/2)^{2n} - 2(-1)^n],}$$

$$\mathbf{u_{n+1}^2 = 1/5[((1 + \sqrt{5})/2)^{2n+2} + ((1 - \sqrt{5})/2)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1}],}$$

следовательно,

$$\mathbf{u_{n+1}^2 + u_n^2 = 1/5[((1 + \sqrt{5})/2)^{2n} \cdot (5 + \sqrt{5})/2 + ((1 - \sqrt{5})/2)^{2n} \cdot (5 - \sqrt{5})/2 =}$$

$$\mathbf{= 1/\sqrt{5}[((1 + \sqrt{5})/2)^{2n+1} - ((1 - \sqrt{5})/2)^{2n+1}] = u_{2n+1}.}$$

Итак,

$$\mathbf{u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}.} \qquad (3.50)$$

Например, $\mathbf{u_{13} = u_7^2 + u_6^2 = 13^2 + 8^2 = 233.}$

Это и есть ответ на задачу Фибоначчи. Для чисел Фибоначчи можно доказать более общее соотношение, чем (3.50):

$$\mathbf{u_n u_m + u_{n+1} u_{m+1} = u_{n+m+1}.} \qquad (3.51)$$

Возможно другое применение формулы (3.49). Докажем следующую теорему.

Пусть **a** и **b** – два натуральных числа, причем **a** < **b**, тогда число операций последовательного деления в алгоритме Евклида, необходимых для отыскания наибольшего общего делителя (сокращенно: н. о. д.) **a** и **b**, не превосходит упятеренного числа цифр числа **a**, записанного в десятичной системе счисления. Применяя к отысканию н. о. д. чисел **b** к **a** алгоритм Евклида, получаем цель равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{1)}\quad \mathbf{b = ax' + y';} \\ &\mathbf{2)}\quad \mathbf{a = y'x^n + y^n;} \\ &\mathbf{3)}\quad \mathbf{y' = y^n x^m + y^m;} \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots \\ &\mathbf{k)}\quad \mathbf{y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)},} \\ &\mathbf{k+1)}\quad \mathbf{y^{(k-1)} = y^{(k)}x^{(k+1)}.} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.52)$$

Здесь последовательные остатки удовлетворяют неравенствам

$$\mathbf{a > y' > y'' > y''' > \ldots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geq 1.}$$

В последнем из равенств (3.52) остаток равен нулю. Следовательно, предыдущий остаток $\mathbf{y^{(k)}}$ и есть н.о.д. чисел **b** и **a**. Поэтому **k** обозначает число операций, необходимых для отыскания н. о. д. Наша задача заключается в оценке числа **k**. С этой целью будем сравнивать числа $\mathbf{y^{(k)}, y^{(k-1)}, \ldots, y'}$ с числами Фибоначчи $\mathbf{u_1, u_2, u_3, \ldots}$ Заметим, что $\mathbf{y^{(k)} \geq 1 = u_2}$, но предыдущий остаток $\mathbf{y^{(k-1)}}$ больше $\mathbf{y^{(k)}}$ и, следовательно, $\mathbf{y^{(k-1)} \geq 2 = u_3}$. Поэтому из равенства **k** заключаем, что

$$\mathbf{y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \geq y^{(k-1)}1 + y^{(k)} \geq u_3 + u_2 = u_4}.$$

Итак,

$$\mathbf{y^{(k)} \geq u_2,\ y^{(k-1)} \geq u_3,\ y^{(k-2)} \geq u_4}.$$

Допустим, что уже доказали справедливость неравенств

$$\mathbf{y^{(k)} \geq u_2,\ \ldots,\ y^{(m)} \geq u_{k-m+2},\ \ y^{(m-1)} \geq u_{k-m+3}\ \ (m-1 \geq 2)}$$

Тогда из равенства $\mathbf{y^{(m-2)} = y^{(m-1)}\, x^{(m)} + y^{(m)}}$ заключаем:

$$\mathbf{y^{(m-2)} \geq y^{(m-1)}1 + y^{(m)} \geq u_{k-m+3} + u_{k-m+2} = u_{k-m+4}}.$$

Итак, продолжая рассуждения, дойдем до неравенств

$$\mathbf{y'' \geq u_k,\quad y' \geq u_{k+1}}$$

и далее выведем, что

$$\mathbf{a = y'x^n + y'' \geq y'1 + y'' \geq u_{k+1} + u_k = u_{k+2}}.$$

Но $\mathbf{u_{k+2}}$ по формуле (3.49) имеет следующий вид:

$$\mathbf{u_{k+2} = 1/\sqrt{5}\ [((1 + \sqrt{5})/2)^{k+2} - ((1 - \sqrt{5})/2)^{k+2}]}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a \geq 1/\sqrt{5}\ [((1 + \sqrt{5})/2)^{k+2} - ((1 - \sqrt{5})/2)^{k+2}] >}$$
$$\mathbf{> 1/\sqrt{5}\ [((1 + \sqrt{5})/2)^{k+2} - 1],} \qquad (3.53)$$

так как

$$\mathbf{|(1 - \sqrt{5})/2| < 1,}$$

следовательно,

$$\mathbf{(1 - \sqrt{5})/2|^{k+2} < 1).}$$

Из выражения (3.53) получаем, что

$$\mathbf{((1 + \sqrt{5})/2)^{k+2} < a\sqrt{5} + 1 < \sqrt{5}(a + 1) < ((1 + \sqrt{5})/2)^2\ (a + 1);}$$
$$\mathbf{(\sqrt{5} < ((1 + \sqrt{5})/2)^2 = (3 + \sqrt{5})/2,\ \text{так как}\ \sqrt{5} < 3\ ).}$$

Поэтому имеем неравенство

$$\mathbf{((1 + \sqrt{5})/2)^k < (a + 1)}. \qquad (3.54)$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{u_5 = 5 = 1/\sqrt{5}\ [((1 + \sqrt{5})/2)^5 - ((1 - \sqrt{5})/2)^5] < 1/\sqrt{5}\ [((1 + \sqrt{5})/2)^5 + 1]}.$$

Отсюда

$$\mathbf{((1 + \sqrt{5})/2)^5 \geq 5\sqrt{5} - 1 > 10}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{10^k < ((1 + \sqrt{5})/2)^{5k} < (a + 1)^5}. \qquad (3.55)$$

Если число **a** в десятичной системе счисления записывается с помощью **n** цифр (**a – n**-значное число), то очевидно, что

$$\mathbf{10^{n-1} \leq a < 10^n},$$

откуда

$$\mathbf{a + 1 \le 10^n},$$
следовательно, в силу неравенства (3.55) имеем
$$\mathbf{10^k < (a + 1)^5 \le 10^{5n}},$$

или неравенство
$$\mathbf{k < 5n}. \qquad (3.56)$$
Неравенство (3.56) и есть нужный результат; количество **k** последовательных делений в алгоритме Евклида меньше, чем упятеренное число цифр наименьшего из чисел **b** и **a**, записанного в десятичной системе счисления. Из приведенного здесь доказательства можно усмотреть, что наиболее невыгодный случай применения алгоритма Евклида (в смысле значительного количества операций, близкого к установленному в теореме пределу) будет тогда, когда **b** и **a** являются соседними числами Фибоначчи. Для подтверждения этого возьмем, например, $\mathbf{b = u_{20} = 6765}$ и $\mathbf{a = u_{19} = 4181}$. Здесь **a** – четырехзначное число, следовательно, по доказанной теореме количество операций в алгоритме Евклида должно быть меньше $\mathbf{5 \cdot 4 = 20}$. В действительности получаем $\mathbf{k = 17}$ операций.

В самом деле:

1) $\mathbf{6765 = 4181 \cdot 1 + 2584}$;	10) $\mathbf{89 = 55 \cdot 1 + 34}$;
2) $\mathbf{4181 = 2584 \cdot 1 + 1597}$;	11) $\mathbf{55 = 34 \cdot 1 + 21}$;
3) $\mathbf{2584 = 1597 \cdot 1 + 987}$;	12) $\mathbf{34 = 21 \cdot 1 + 13}$;
4) $\mathbf{1597 = 987 \cdot 1 + 610}$;	13) $\mathbf{21 = 13 \cdot 1 + 8}$;
5) $\mathbf{987 = 610 \cdot 1 + 377}$;	14) $\mathbf{13 = 8 \cdot 1 + 5}$;
6) $\mathbf{610 = 377 \cdot 1 + 233}$;	15) $\mathbf{8 = 5 \cdot 1 + 3}$;
7) $\mathbf{377 = 233 \cdot 1 + 144}$;	16) $\mathbf{5 = 3 \cdot 1 + 2}$;
8) $\mathbf{233 = 144 \cdot 1 + 89}$;	17) $\mathbf{3 = 2 \cdot 1 + 1}$;
9) $\mathbf{144 = 89 \cdot 1 + 55}$;	18) $\mathbf{2 = 1 \cdot 1 + 0}$.

В качестве остатков здесь получаются одно за другим в убывающем порядке числа Фибоначчи. Все частные (кроме последнего) равны единице, чем и объясняется наличие большого числа операций. Наибольший общий делитель оказался равным единице (равенство (3.17)), что для соседних чисел Фибоначчи можно было предвидеть с самого начала. Действительно, из того, что $\mathbf{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n}$ вытекает, что н. о. д. чисел $\mathbf{u_{n+2}}$ и $\mathbf{u_{n+1}}$ совпадает с н. о. д. $\mathbf{u_{n+1}}$ и $\mathbf{u_n}$. Поэтому для каждой пары соседних чисел Фибоначчи н. о. д. один и тот же. Чтобы найти его, достаточно рассмотреть пару $\mathbf{u_2 = u_1 = 1}$, откуда и следует, что н. о. д. равен единице [7].

3.8. Пример периодической последовательности

В качестве примера рассмотрим периодическую последовательность (3.16):
$$\mathbf{u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = 3, \ldots} .$$

Здесь возвратное уравнение имеет вид $u_{n+3} = u_n$ $(n \geq 3)$, следовательно, характеристическое уравнение таково: $q^3 = 1$.

Данное уравнение имеет следующие корни:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \text{ и } \gamma = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$

Общий член последовательности следует искать в виде (см. формулу (3.46)):

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} =$$
$$= A + B(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^{n-1} + C(-1/2 - i\sqrt{3}/2)^{n-1}.$$

Можно требовать, чтобы эта формула выполнялась для всех значений n, для которых выполняется и возвратное уравнение:

$$n = 3, 4, 5, \ldots .$$

Заметим, что

$$-1/2 + i\sqrt{3}/2 = -(\cos(\pi/3) - i(\sin(\pi/3)));$$
$$-1/2 - i\sqrt{3}/2 = -(\cos(\pi/3) + i(\sin(\pi/3))),$$

поэтому по формуле Муавра

$$u_n = A + B(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^{n-1} + C(-1/2 - i\sqrt{3}/2)^{n-1} =$$
$$= A + (-1)^{n-1}B[\cos(\pi/3)(n-1) - i(\sin(\pi/3))(n-1)] +$$
$$+ (-1)^{n-1}C[\cos(\pi/3)(n-1) + i(\sin(\pi/3))(n-1)] =$$
$$= A + (B + C)(-1)^{n-1}\cos(\pi/3)(n-1) +$$
$$+ i(-B + C)(-1)^{n-1}\sin(\pi/3)(n-1).$$

Положим $B + C = A_1$ и $i(-B + C) = A_2$, тогда эта формула перепишется следующим образом:

$$u_n = A + A_1(-1)^{n-1}\cos(\pi/3)(n-1) + A\,(-1)^{n-1}\sin(\pi/3)(n-1) \quad (n \geq 3),$$

остается лишь определить неизвестные коэффициенты A, A_1 и A_2. Полагая $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$, получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$u_3 = 1 = A + A_1\cos(2\pi/3) + A_2\sin(2\pi/3) = A - 1/2A_1 + \sqrt{3}/2A_2;$$
$$u_4 = 3 = A - A_1\cos(3\pi/3) - A_2\sin(3\pi/3) = A + A_1;$$
$$u_5 = 2 = A - A_1\cos(4\pi/3) - A_2\sin(4\pi/3) = A - 1/2A_1 - \sqrt{3}/2A_2.$$

Отсюда находим

$$A = 2,\ A_1 = 1 \text{ и } A_2 = -1/\sqrt{3}\,.$$

Итак,

$$u_n = 2 + (-1)^{n-1}[\cos(n-1)(\pi/3) - 1/\sqrt{3}\sin(n-1)(\pi/3)] =$$
$$= 2 + (-1)^n\, 2/\sqrt{3}\sin(n-2)(\pi/3) \quad (n \geq 3).$$

Видно, что общий член последовательности выражается в этом примере через тригонометрические функции, что вполне согласуется с периодичностью последовательности.

Приведем, наконец, пример, непосредственно относящийся к делению многочленов.

Пусть нам даны два многочлена:

$$P(x) = 3 + x^2 - x^5 \text{ и } Q(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3;$$

задача заключается в определении структуры коэффициентов частного, получающихся от деления $P(x)$ на $Q(x)$. Последовательность коэффициентов частного $\mathbf{u_1 = D_0, u_2 = D_1, \ldots, u_n = D_{n-1}, \ldots}$, как видно из раздела 2, является возвратной последовательностью, члены которой удовлетворяют уравнению (3.20):

$$\mathbf{D_{n+k} = -B_1/B_0D_{n+k-1} - \ldots -B_k/B_0D_n \quad (n \geq l - k + 1)}.$$

Здесь $\mathbf{k}$ – степень $\mathbf{Q(x)}$; $\mathbf{B_0}$, $\mathbf{B_1}$, …, $\mathbf{B_k}$ – коэффициенты $\mathbf{Q(x)}$; $\mathbf{l}$ – степень $\mathbf{P(x)}$.

Следовательно,

$$\mathbf{k = 3, B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = -2, B_3 = 1, l = 5}:$$

$$\mathbf{D_{n+3} = 1/2D_{n+2} + 2/2D_{n+1} - 1/2D_n \qquad (n \geq 5 - 3 + 1 = 3)},$$

т.е.

$$\mathbf{D_{n+3} = 1/2D_{n+2} + D_{n+1} - 1/2D_n \qquad (n \geq 3)}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mathbf{q^3 = 1/2q^2 + q - 1/2},$$

или

$$\mathbf{q^3 - q - 1/2(q^2 - 1) = (q - 1/2)(q - 1)(q + 1) = 0}.$$

Имея корни $\boldsymbol{\alpha = 1/2, \beta = 1, \gamma = -1}$, для $\mathbf{D_n}$ получаем формулу

$$\mathbf{D_n = A(1/2)^n + B1^n + C(-1)^n \quad (n \geq 3)}.$$

Положим, $\mathbf{n = 3}$, $\mathbf{n = 4}$ и $\mathbf{n = 5}$, получим уравнения:

$$\mathbf{D_3 = 1/8A + B - C};$$

$$\mathbf{D_4 = 1/16A + B - C};$$

$$\mathbf{D_5 = 1/32A + B - C}.$$

Здесь неизвестны не только коэффициенты $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, но и числа $\mathbf{D_3}$, $\mathbf{D_4}$, $\mathbf{D_5}$. Чтобы определить их, произведем фактически деление $\mathbf{P(x)}$ на $\mathbf{Q(x)}$ таким образом, чтобы в частном получить члены до пятой степени включительно:

$$\begin{array}{l|l}
\mathbf{3 + x^2 - x^5} & \underline{\mathbf{2 - x - 2x^2 + x^3}} \\
\underline{\mathbf{3 - \frac{3}{2}x - 3x^2 + \frac{3}{2}x^3}} & \mathbf{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + 2\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{16}x^3 + 2\frac{19}{32}x^4} \\
\quad \mathbf{\frac{3}{2}x + 4x^2 - \frac{3}{2}x^3 - x^5} & \\
\quad \underline{\mathbf{\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4}} & \\
\qquad \mathbf{4\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^4 - x^5} & \\
\qquad \underline{\mathbf{4\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{3}{8}x^3 - 4\frac{3}{4}x^4 + 2\frac{3}{8}x^5}} & \\
\qquad\quad \mathbf{2\frac{3}{8}x^3 + 4x^4 - 3\frac{3}{8}x^5} & \\
\qquad\quad \underline{\mathbf{2\frac{3}{8}x^3 - 1\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{3}{8}x^5 + 1\frac{3}{16}x^6}} & \\
\qquad\qquad \mathbf{5\frac{3}{16}x^4 - x^5 - 1\frac{3}{16}x^6} & \\
\qquad\qquad \underline{\mathbf{5\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{19}{32}x^5 - 5\frac{3}{16}x^6 + 2\frac{19}{32}x^7}}\,. & \\
\qquad\qquad\quad \mathbf{1\frac{19}{32}x^5 + 4x^6 - 2\frac{19}{32}x^7} &
\end{array}$$

Отсюда

$$\mathbf{D_0 = \frac{3}{2},\ D_1 = \frac{3}{4},\ D_2 = 2\frac{3}{8},\ D_3 = 1\frac{3}{16},\ D_4 = 2\frac{19}{32},\ D_5 = \frac{51}{64}}.$$

Следовательно, полученная выше система уравнений имеет вид:

$$\mathbf{\frac{1}{8}A + B - C = 1\frac{3}{16}};$$

$$\mathbf{\frac{1}{16}A + B + C = 2\frac{19}{32}};$$

$$\mathbf{\frac{1}{32}A + B - C = \frac{51}{64}},$$

откуда находим:

$$\mathbf{A = 4\frac{1}{6},\ B = 3/2,\ C = 5/6}.$$

Итак,

$$\mathbf{D_n = 4\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2n} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}(-1)^n \quad (n \geq 3)}.$$

Задача решена. Из найденной формулы получаем:

$$\mathbf{D_6 = 2\frac{51}{128},\ D_7 = \frac{179}{256},\ D_8 = 2\frac{179}{512},\ \dots}$$

3.9. Решение для случая кратных корней характеристического уравнения

Во всех разобранных выше примерах характеристическое уравнение имело только простые корни. Рассмотрим пример последовательности сумм квадратов натуральных чисел. Для этой последовательности возвратное уравнение имеет вид $\mathbf{S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6S_{n+2} + 4S_{n+1} - S_n}$, следовательно, характеристическое уравнение таково:

$$\mathbf{q^4 = 4q^3 - 6q^2 + 4q - 1},$$

или

$$\mathbf{q^4 - 4q^3 +\ q^2 - 4q + 1 = (q - 1)^4 = 0}.$$

Уравнение обладает только одним четырехкратным корнем $\mathbf{q = 1}$, поэтому получаем здесь только одну геометрическую прогрессию со знаменателем 1, члены которой удовлетворяют данному возвратному уравнению.

В подобных случаях приходится искать другие простейшие возвратные последовательности, которые вместе с указанной геометрической прогрессией могут составить базис данного уравнения. В нашем примере такими последовательностями будут (как это легко можно проверить):

$$\mathbf{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1, \dots};$$

$$\mathbf{0, 1, 4, 9, \dots, (n - 1)^2, \dots};$$

$$\mathbf{0, 1, 8, 27, \dots, (n - 1)^3, \dots}\ .$$

Не разбирая самого общего случая, требующего довольно больших выкладок, остановимся на следующем типичном примере.

Пусть имеется возвратное уравнение

$$\mathbf{u_{n+k} = C_k^{k-1}\alpha\, u_{n+k-1} - C_k^{k-2}\,\alpha^2\, u_{n+k-2} + \dots + (-1)^{k-1}C_k^0\,\alpha^k\, u_n} \qquad (3.57)$$

,

где $\mathbf{C_k^{k-1}, C_k^{k-2}, \ldots, C_k^0}$ – биномиальные коэффициенты порядка **k**. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\mathbf{q^k = C_k^{k-1}\alpha q^{k-1} - C_k^{k-2}\,\alpha^2 q^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\,C_k^0\,\alpha^k}$$

может быть представлено в виде $\mathbf{(q-\alpha)^k = 0}$. Оно имеет **k**-кратный корень $\mathbf{q = \alpha}$; очевидно, что

$$\mathbf{(\alpha-\alpha)^k = \alpha^k - C_k^{k-1}\alpha^k + C_k^{k-2}\alpha^k - \ldots + (-1)^k\,C_k^0\,\alpha^k = 0}.$$

Рассмотрим в целом следующие тождества:

$$\mathbf{(\alpha-\alpha)^{k-m} = \alpha^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1}\alpha^{k-m} + C_{k-m}^{k-m-2}\alpha^{k-m} - \ldots + (-1)^{k-m}\,C_{k-m}^0\,\alpha^{k-m} = 0},$$

где $\mathbf{m = 0, 1, 2, \ldots, k-1}$, или

$$\mathbf{(1-1)^{k-m} = C_{k-m}^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} + C_{k-m}^{k-m-2} - \ldots + (-1)^{\mu}\,C_{k-m}^{k-m-\mu} + \ldots + (-1)^{k-m}\,C_{k-m}^0 = 0}. \qquad (3.58)$$

Равенство (3.58) соответствует значению $\mathbf{m = 0}$, имеет вид

$$\mathbf{C_k^k - C_k^{k-1} + C_k^{k-2} - \ldots + (-1)^{\mu}\,C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k\,C_k^0 = 0}. \qquad (3.59)$$

Замечая, что

$$\mathbf{C_k^{k-\mu} = \frac{k(k-1)\ldots(\mu+1)}{1\cdot 2 \qquad (k-\mu)} = \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)(k-\mu)}C_{k-m}^{k-m-\mu}}$$

$$\mathbf{(m = 1, 2, \ldots, k-1; \qquad 0 \le \mu \le k-m)},$$

или

$$\mathbf{k(k-1)\ldots(k-m+1)C_{k-m}^{k-m-\mu} = (k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)C_k^{k-\mu}}, \qquad (3.60)$$

помножим каждое из равенств (3.59) ($\mathbf{m = 1, 2, \ldots, k-1}$) на соответствующий множитель $\mathbf{k(k-1)\ldots(k-m+1)}$ и после этого, пользуясь выражением (3.60), перепишем их в виде

$$\mathbf{(k-m+1)\ldots k\,C_k^k - (k-m)\ldots(k-1)C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^{\mu}(k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)\,C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^{k-m}\cdot 1\cdot 2\ldots m\,C_k^0 = 0} \qquad (3.61)$$

$$\mathbf{(m = 1, 2, \ldots, k-1)}.$$

Докажем теперь, что при $\mathbf{m = 0, 1, 2, \ldots, k-1}$ справедливы равенства:

$$\mathbf{k^m\,C_k^k - (k-1)^m\,C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^{\mu}(k-\mu)^m\,C_k^{k-\mu} + \ldots + + (-1)^k\,0^m\,C_k^0 = 0}. \qquad (3.62)$$

В самом деле, равенство, соответствующее $\mathbf{k = 0}$, совпадает с выражением (3.59) и, следовательно, справедливо. Рассуждая по индукции, допустим, что равенства (3.62) уже доказаны для $\mathbf{m = 0, 1, \ldots, j}$ $\mathbf{(j \le k-2)}$, и докажем, что равенство, соответствующее $\mathbf{m = j+1}$, также справедливо. С этой целью введем многочлен степени $\mathbf{j+1}$:

$$\mathbf{f(x) = (x-j)(x-j+1)\ldots(x-1)x = x^{j+1} - \beta_j\,x^j - \ldots - \beta_j\,x}. \qquad (3.63)$$

Умножая равенства (3.62) при $\mathbf{m = 1, 2, \ldots, j}$ на числа $\mathbf{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j}$, получим:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\beta_1 k C_k^k - \beta_1(k-1)C_k^{k-1} + \ldots + \beta_1(-1)^\mu (k-\mu)C_k^{k-\mu} +}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\boldsymbol{+ \beta_1(-1)^k 0 C_k^0 = 0};\\&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\boldsymbol{\beta_j k^j C_k^k - \beta_1(k-1)^j C_k^{k-1} + \ldots + \beta_1(-1)^\mu (k-\mu)^j C_k^{k-\mu} +}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\boldsymbol{+ \beta_j(-1)^k 0 C_k^0 = 0}.\end{aligned}\right\}. \tag{3.64}$$

Кроме того, запишем равенство (3.61), соответствующее значению $\mathbf{m = j + l}$, в виде

$$\boldsymbol{f(k)\, C_k^k - f(k-1)C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu\, (k-\mu)\, C_k^{k-\mu} + \ldots +}$$
$$\boldsymbol{+ (-1)^k\, f(0)\, C_k^0 = 0} \tag{3.65}$$

(мы воспользовались здесь тем, что $\mathbf{(k - j) \ldots k = f(k), (k - j - 1), \ldots, (k - 1) =}$ $\mathbf{= f(k - 1), \ldots, (k - \mu - j), \ldots, (k - j) = f(k - j), \ldots}$).

Складывая (3.64) и (3.65) почленно, получим

$$\boldsymbol{[\beta_j\, k + \ldots + \beta_j\, k^j + f(k)]\, C_k^k - [\beta_j(k-1) + \ldots + \beta_j(k-1)^j +}$$
$$\boldsymbol{+ f(k-1)]\, C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu\, [\beta_j(k-\mu) + \ldots + \beta_j(k-\mu)^j +}$$
$$\boldsymbol{+ f(k-\mu)]\, C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k\, [\beta_j \cdot 0 + \ldots + \beta_j \cdot 0^j + f(0)]\, C_k^0 = 0}.$$

Однако в силу (3.63)

$$\boldsymbol{\beta_1\, x + \beta_2\, x^2 + \ldots + \beta_j\, x^j + f(x) = x^{j+1}}.$$

Таким образом, полученный результат принимает вид

$$\boldsymbol{k^{j+1}\, C_k^k - (k-1)^{j+1}\, C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu\, (k-\mu)^{j+1}\, C_k^{k-\mu} + \ldots +}$$
$$\boldsymbol{+ (-1)^k \cdot 0^{j+1} \cdot C_k^0 = 0}.$$

Это и есть равенство (3.62) для $\mathbf{m = j - l}$. Справедливость соотношений (3.62) доказана.

Рассмотрим произвольный многочлен степени не выше $\mathbf{k - 1}$:

$$\boldsymbol{P(x) = A_{k-1}\, x^{k-1} + A_{k-2}\, x^{k-2} + \ldots + A_0}.$$

Умножая равенства (3.62) при $\mathbf{m = 0, 1, 2, ..., k - 1}$ соответственно на $\mathbf{A_0, A_k, A_{k-1}}$, получим:

$$\boldsymbol{A_0\, C_k^k - A_0\, C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu\, A_0 C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k\, A_0\, C_k^0 = 0;}$$
$$\boldsymbol{A_1 k\, C_k^k - A_1(k-1)\, C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu\, A_1(k-\mu)\, C_k^{k-\mu} + \ldots +}$$
$$\boldsymbol{+ (-1)^k\, A_1 \cdot 0 \cdot C_k^0 = 0;}$$
$$\boldsymbol{\ldots\ \ldots\ \ldots}$$
$$\boldsymbol{A_{k-1}\, k^{k-1}\, C_k^k - A_{k-1}(k-1)^{k-1}\, C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu\, A_{k-1} \times}$$
$$\boldsymbol{\times (k-\mu)^{k-1}\, C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k\, A_{k-1} \cdot 0^{k-1} \cdot C_k^0 = 0.}$$

Складывая их почленно, получим

$$\boldsymbol{(A_0 + A_1 k + \ldots + A_{k-1}\, k^{k-1})\, C_k^k -}$$
$$\boldsymbol{- [A_0 + A_1(k-1) + \ldots + A_{k-1}(k-1)^{k-1}]\, C_k^{k-1} + \ldots +}$$
$$\boldsymbol{+ (-1)^\mu\, [A_0 + A_1(k-\mu) + \ldots + A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}]\, C_k^{k-\mu} + \ldots +}$$
$$\boldsymbol{+ (-1)^k [A_0 + A_1 \cdot 0 + \ldots + A_{k-1} \cdot (0)^{k-1}]\, C_k^0 = 0,}$$

или

$$\boldsymbol{P(k) \cdot C_k^k - P(k-1) \cdot C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^k \cdot P(0) \cdot C_k^0 = 0}. \tag{3.66}$$

Следовательно, произвольный многочлен $\mathbf{P(x)}$ степени не выше $\mathbf{k-1}$ удовлетворяет соотношению (3.66).

Положим, в частности, $\mathbf{P(x) = (x + n - 1)^m}$, где $\mathbf{n}$ – произвольное натуральное число, а $\mathbf{m}$ – целое, $\mathbf{0 \le m \le k}$. Тогда равенство (3.66) примет вид

$$\mathbf{(k + n - 1)^m C_k^k - (k + n - 2)^m C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^k (n - 1)^m \cdot C_k^0 = 0},$$

или, умножая на $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k+n-1}}$ и заменяя $\mathbf{C_k^k}$ на 1:

$$\begin{aligned}\mathbf{(k + n - 1)^m}\, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k+n-1}} &= \mathbf{C_k^{k-1}}\, \boldsymbol{\alpha}\mathbf{(k + n - 2)^m}\, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k+n-2}} - \\ &- \mathbf{C_k^{k-2}}\, \boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{(k + n - 3)^m}\, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k+n-3}} + \ldots + \\ &+ \mathbf{(-1)^{k-1} C_k^0}\, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}}\mathbf{(n - 1)^m}\, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}}. \qquad (3.67)\end{aligned}$$

Сравнивая выражение (3.67) с (3.57), заключаем, что возвратному уравнению (3.57) удовлетворяет каждая из $\mathbf{k}$ последовательностей:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}}, \ldots & (\mathbf{m = 0}); \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \mathbf{(n-1)}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}}, \ldots & (\mathbf{m = 1}); \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{2^2}\boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \mathbf{(n-1)^2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}}, \ldots & (\mathbf{m = 2}); \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{2^{k-1}}\boldsymbol{\alpha}^2, \ldots, \mathbf{(n-1)^{k-1}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}}, \ldots & (\mathbf{m = k - 1}).\end{array}\right\} \qquad (3.68)$$

Если установим, что они образуют базис, то отсюда будет следовать, что общий член произвольной последовательности, удовлетворяющий уравнению (3.57), имеет вид

$$\mathbf{u_т = [B_0 + B_1 (n - 1) + \ldots + B_{k-1} (n - 1)^{k-1}]}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}} = \mathbf{Q(n - 1)}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n-1}}, \qquad (3.69)$$

где $\mathbf{Q(x) = B_0 + B_1\, x + \ldots + B_{k-1}\, x^{k-1}}$ – многочлен степени не выше $\mathbf{k-1}$ с произвольными коэффициентами. Достаточно доказать, что система $\mathbf{k}$ линейных уравнений

$$\begin{aligned}&\mathbf{B_0 + B_1 \cdot 0 + \ldots + B_{k-1} \cdot 0^{k-1} = u_1},\\ &\mathbf{B_0 + B_1 \cdot 1 + \ldots + B_{k-1} \cdot 1^{k-1} = u_2},\\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\\ &\mathbf{B_0 + B_1 \cdot (k - 1) + \ldots + B_{k-1} \cdot (k - 1)^{k-1} = u_k}\end{aligned}$$

имеет решение относительно неизвестных $\mathbf{B_0}$, $\mathbf{B1_0}$, $\ldots$, $\mathbf{B_{k-1}}$ при любых $\mathbf{u_0}, \ldots, \mathbf{u_k}$, т.е. система

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{B_0 = 0}\\ \mathbf{B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1} = 0}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{B_0 + (k - 1)B_1 + \ldots + (k - 1)^{k-1}B_{k-1} = 0}\end{array}\right\}$$

имеет только нулевое решение. Однако уравнения последней системы обозначают, что

$$\mathbf{Q(0) = Q(1) = \ldots = Q(k - 1) = 0},$$

т.е. что уравнение

$$\mathbf{B_0 + B_1\, x + \ldots + B_{k-1}\, X^{k-1} = 0}$$

степени не выше $\mathbf{k-1}$ имеет по крайней мере $\mathbf{k}$ различных корней: $\mathbf{0, 1, 2, \ldots, k-1}$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{B_0 = B_1 = \ldots = B_{k-1} = 0},$$

На этом заканчивается доказательство того, что последовательности (3.68) образуют базис возвратных последовательностей, удовлетворяющих уравнению (3.57).

В случае произвольной возвратной последовательности, удовлетворяющей общему уравнению

$$\mathbf{u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n \quad (a_k \neq 0)}, \tag{3.70}$$

характеристическое уравнение

$$\mathbf{q^k = a_1q^{k-1} + \ldots + a_k} \tag{3.71}$$

может иметь некоторый корень $\boldsymbol{\alpha}$ кратности $\mathbf{a}$, корень $\boldsymbol{\beta}$ кратности $\mathbf{b}$, ..., корень $\boldsymbol{\gamma}$ кратности $\mathbf{c}$, а всего $\mathbf{a + b + \ldots + c = k}$ корней.

Для данного наиболее общего случая можно доказать, что базис состоит из следующих k последовательностей:

$\mathbf{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \ldots}$;

$\ldots\ldots\ldots$

$\mathbf{0, \alpha, 2^{a-1}\alpha^2, \ldots, (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1}, \ldots}$;

$\mathbf{1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}, \ldots}$;

$\ldots\ldots\ldots$

$\mathbf{0, \beta, 2^{b-1}\beta^2, \ldots, (n-1)^{b-1}\beta^{n-1}, \ldots}$;

$\ldots\ldots\ldots$

$\mathbf{1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}, \ldots}$;

$\ldots\ldots\ldots$

$\mathbf{0, \gamma, 2^{c-1}\gamma^2, \ldots, (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1}, \ldots}$,

поэтому

$$\mathbf{u_n = Q(n-1)\alpha^{n-1} + R(n-1)\beta^{n-1} + \ldots + S(n-1)\gamma^{n-1}}, \tag{3.72}$$

где $\mathbf{Q(x), R(x), \ldots, S(x)}$ − какие-либо фиксированные многочлены степеней не выше $\mathbf{a-1, b-1, \ldots, c-1}$ соответственно.

Итак, общий член $\mathbf{n}$ любой возвратной последовательности имеет вид суммы произведений многочленов относительно $\mathbf{n-1}$ (или, что сводится к тому же, относительно $\mathbf{n}$) на общие члены геометрических прогрессий, знаменатели которых равны корням характеристического уравнения (3.71).

Если все корни последнего уравнения – простые, указанные многочлены являются постоянными, а общий член возвратной последовательности представляется в виде суммы членов геометрических прогрессий.

Можно доказать также справедливость обратного предложения: любая последовательность $\{\mathbf{u_n}\}$, общий член которой выражается по формуле (3.72), является возвратной. Доказательство прямой и обратной теоремы, которое здесь опущено, можно найти в четвертой главе книги [6], где теория возвратных последовательностей изложена способом, отличным от принятого в настоящем материале. Соответствующее характеристическое уравнение (3.71) строится по корням $\boldsymbol{\alpha, \beta, \ldots, \gamma}$ и по их кратностям $\mathbf{a, b, \ldots, c}$ (представляющим собой степени многочленов $\mathbf{Q, R, S}$, увеличенные на единицу). Отсюда сразу находится и возвратное уравнение (3.70).

Рассмотрим в виде примера последовательность

$$\mathbf{u_n = (n - 1)^2\, 2^{n-1} + 3^{n-1}}.$$

Сравнивая с выражением (3.72), заключаем, что корни характеристического уравнения таковы: $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{= 2}$, $\boldsymbol{\beta} \mathbf{= 3}$, причем кратность $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{= 2 + 1 = 3}$. Таким образом, характеристическое уравнение должно иметь вид

$$\mathbf{(q - 2)^3\, (q - 3) = q^4 - 9\, q^3 + 30\, q^2 = 44\, q + 24 = 0},$$

а возвратное уравнение запишется так:

$$\mathbf{u_{n+4} = 9\, u_{n+3} - 30\, u_{n+2} + 44\, u_{n+1} - 24\, u_n}.$$

3.10. Примеры решений задач с кратными корнями

Проиллюстрируем результаты п. 3.9 несколькими примерами. Ранее, в п. 3.2, было доказано, что члены арифметической прогрессии удовлетворяют уравнению вида $\mathbf{u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n}$, квадраты натуральных чисел – уравнению $\mathbf{u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n}$, а кубы – уравнению $\mathbf{u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n}$.

Очевидно, что все названные уравнения содержатся как частные случаи в уравнении (3.57), рассмотренном в п. 3.9 (здесь $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{= 1}$):

$$\mathbf{u_{n+k} = C_k^{k-1}\, u_{n+k-1} - C_k^{k-2}\, u_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\, C_k^0\, u_n}. \qquad (3.73)$$

Общий член любой последовательности, удовлетворяющей уравнению (3.73), должен, согласно формуле (3.69), иметь вид

$$\mathbf{u_n = B_0 + B_1(n - 1) + \ldots + B_{k-1}(n - 1)^{k-1}}. \qquad (3.74)$$

Чтобы найти коэффициенты $\mathbf{B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}}$, достаточно решить систему $\mathbf{k}$ линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B_0} &= \mathbf{u_1}; \\ \mathbf{B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1}} &= \mathbf{u_2}; \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{B_0 + (k-1)\, B_1 + \ldots + (k-1)^{k-1} B_{k-1}} &= \mathbf{u_k}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.75)$$

В случае арифметической прогрессии $\mathbf{k = 2}$ формула (3.74) примет вид $\mathbf{u_n = B_0 + B_1(n - 1)}$, а система (3.75) – вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B_0} &= \mathbf{u_1}; \\ \mathbf{B_0 + B_1} &= \mathbf{u_2}. \end{aligned}\right\}$$

Видно, что $\mathbf{B_0 = u_1}$ есть первый член прогрессии, а $\mathbf{B_1 = u_2 - u_1 = d}$ – разность прогрессии. Следовательно,

$$\mathbf{u_n = u_1 + d(n - 1)}.$$

Таким образом, мы получили хорошо известную формулу.

Нет необходимости производить соответствующие выкладки для случая последовательности квадратов или кубов натуральных чисел, так как с самого начала известно, что $\mathbf{u_n = n^2}$ или $\mathbf{u_n = n^3}$. Однако представляет интерес применение соотношений (3.73) и (3.74) для вывода формулы суммы членов арифметической прогрессии, а также суммы квадратов или кубов натуральных чисел.

В п. 3.4 доказано, что если члены некоторой последовательности $\{u_n\}$ удовлетворяют уравнению вида

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \dots + a_ku_n,$$

то суммы $\{s_n\}$ членов этой последовательности

$$\{s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots\}$$

удовлетворяют уравнению вида

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + \dots + (a_k - a\alpha_{k-1})s_{n+1} - a_ks_n.$$

В случае уравнения (3.73) очевидно, что

$$a_1 = C_k^1,\ a_2 = -C_k^2,\ \dots,\ a_k = (-1)^{k-1}C_k^k.$$

Таким образом,

$$1 + a_1 = 1 + C_k^1 = C_{k+1}^1,$$
$$a_2 - a_1 = -\left(C_k^2 + C_k^1\right) = -C_{k+1}^2,$$
$$a_3 - a_2 = C_k^3 + C_k^2 = C_{k+1}^3,$$
$$a_k - a_{k-1} = (-1)^{k-1}(C_k^k + C_k^{k-1}) = (-1)^{k-1}C_{k+1}^k,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$-a_k = (-1)^kC_k^k = (-1)^{k-1}C_{k+1}^{k+1}$$

и уравнение для $\{s_n\}$ может быть представлено в виде

$$s_{n+k+1} = C_{k+1}^1s_{n+k} - C_{k+2}^2s_{n+k-1} + \dots + (-1)^kC_{k+1}^{k+1}s_n,$$

или

$$s_{n+k+1} - C_{k+1}^1s_{n+k} + C_{k+2}^2s_{n+k-1} + \dots + (-1)^kC_{k+1}^{k+1}s_n = 0.$$

Итак, если последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет уравнению вида (3.73) порядка k, то последовательность соответствующих сумм $\{s_n\}$ удовлетворяет уравнению того же вида, но порядка $k + 1$ (в частности, для арифметической прогрессии $k = 2$, для последовательности квадратов натуральных чисел $k = 3$ и для последовательности кубов $k = 4$). Следовательно, для последовательностей соответствующих сумм нужно в указанных выше равенствах (3.73), (3.74), (3.75) брать k на единицу большим: 3, 4 и 5.

А. Сумма членов арифметической прогрессии. На основании сделанных замечаний S_n выражается по формуле (3.74) (с заменой u_n на s_n) при $k = 3$. Следовательно,

$$S_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2.$$

Коэффициенты B_0, B_1, B_2 определяются из системы (3.75) (с той же заменой u_n на s_n и при $k = 3$):

$$B_0 = s_1 = u_1;$$
$$B_0 + B_1 + B_2 = s_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + d;$$
$$B_0 + 2B_1 + 2^2B_2 = s_3 = u_1 + u_2 + u_2 = 3u_1 + 3d.$$

Решая ее, получаем

$$B_0 = u_1,\ B_1 = u_1 + 1/2d,\ B_2 = 1/2d.$$

Следовательно,

$$s_n = u_1 + (u_1 + 1/2d)(n-1) + 1/2d(n-1)^2 =$$

$$= nu_1 + 1/2\, d(n-1)n = (n[2u_1 + (n-1)d])/2 =$$
$$= (n[u_1 + u_1 + (n-1)d])/2 = (n(u_1 + u_n))/ .$$

Б. Сумма квадратов натуральных чисел. Беря в формулах (3.74) и (3.75) $k = 4$ и заменяя u_n на s_n, получаем
$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2 + B_3(n-1)^3$$
и
$$B_0 = s_1 = 1;$$
$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = S_2 = 1 + 2^2 = 5;$$
$$B_0 + 2B_1 + 4B_2 + 8B_3 = S_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14;$$
$$B_0 + 3B_1 + 9B_2 + 27B_3 = S_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Из последней системы находим
$$B_0 = 1,\ B_1 = 2\tfrac{1}{6},\ B_2 = 1\tfrac{1}{2},\ B_3 = \tfrac{1}{3}.$$
$$s_n = 1 + 13/6(n-1) + 3/2(n-1)^2 + 1/3(n-1)^3 = 1/6n + 1/2n^2 + 1/3n^3 =$$
$$= (n(1 + 3\,n + 2\,n^2))/6 = (n(n+1)(2\,n+1))/6.$$

Получили уже знакомую формулу.

В. Сумма кубов натуральных чисел. Для нее имеем
$$s_n = (n^2(n+1)^2)/4.$$

В заключение рассмотрим еще пример последовательности:
$$\alpha,\ 2\alpha^2,\ 3\alpha^3,\ \ldots,\ n\alpha^n,\ \ldots\ (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1).$$

Здесь $u_n = n\alpha^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Легко видеть, что $u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n$.

В самом деле,
$$2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n = 2\alpha(n+1)\alpha^{n+1} - \alpha^2 n\alpha^n = (n+2)\alpha^{n+2} = u_{n+2}.$$

Так как $k = 2$, $a_1 = 2\alpha$ и $a_2 = -\alpha^2$, то последовательность сумм $\{S_n\}$ $(s_1 = \alpha,\ s_2 = \alpha + 2\alpha^2,\ s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3,\ \ldots)$ будет удовлетворять уравнению (3.30):
$$s_{n+3} = (\alpha_1 + 1)s_{n+2} + (\alpha_2 - \alpha_1)s_{n+1} - \alpha_2 s_n =$$
$$= (2\alpha + 1)s_{n+2} - (\alpha^2 + 2\alpha)s_{n+1} + \alpha^2 s_n.$$

Соответствующее характеристическое уравнение таково:
$$q^3 = (2\alpha + 1)q^2 - (\alpha^2 + 2\alpha)q + \alpha^2.$$

Можно увидеть, что уравнение удовлетворяется при $q = \alpha$. Деля многочлен $q^3 - (2\alpha + 1)\, q^2 - (\alpha^2 + 2\alpha)\, q + \alpha^2$ на $q - \alpha$, получаем в частном $q^2 - (\alpha + 1)q + \alpha$.

Следовательно, остальные два корня характеристического уравнения удовлетворяют уравнению $q^2 - (\alpha + 1)q + \alpha = 0$. Эти корни суть α и 1.

Итак, характеристическое уравнение имеет корень α кратности $a = 2$ и простой корень $\beta = 1$. Поэтому для s_n получаем (см. формулу (3.69), где вместо u_n следует писать s_n, $\alpha = \alpha$, $Q(x) = B_0 + B_1x$ – многочлен первой степени, $\beta = 1R(x) = C_0$ – постоянная):
$$u_т = [B_0 + B_1\,(n-1) + \ldots + B_{k-1}\,(n-1)^{k-1}]\alpha^{n-1} = Q(n-1)\alpha^{n-1}$$
$$S_n = [B_0 + B_1\,(n-1)]\alpha^{n-1} + C_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Коэффициенты $\mathbf{B_0}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_0}$ находятся из системы уравнений, соответствующих значениям $\mathbf{n = 1, 2}$ **и** $\mathbf{3}$:

$$\mathbf{B_0 + C_0 = s_1 = \alpha;}$$
$$\mathbf{(B_0 + B_1)\alpha + C_0 = s_2 = \alpha + 2\alpha^2;}$$
$$\mathbf{(B_0 + 2B_1)\alpha^2 + C_0 = s_3 = \alpha + 2\alpha_2 + 3\alpha^3.}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{B_0 = (\alpha^3 - 2\alpha^2)/(\alpha - 1)^2,\ B_1 = \alpha^2/(\alpha - 1)} \text{ и } \mathbf{C_0 = \alpha/(\alpha - 1)^2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{S_n = [B_0 + B_1(n - 1)]\alpha^{n-1} + C_0 = (n\alpha^{n+2} - (n + 1)\alpha^{n+1} + \alpha)/(\alpha - 1)^2 =}$$
$$\mathbf{= (u_n\alpha^2 - (u_{n+1} - u_1))/(\alpha - 1)^2}.$$

4. Исчисление сумм

4.1. Обозначения сумм

Часто приходится сталкиваться с суммой первых $\mathbf{n}$ натуральных чисел, которую старательно выписывали как $\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n}$. Многоточие в таких формулах указывает на то, что пропущенное нужно восполнить по аналогии с соседними членами суммы. Следует избегать сумм типа $1 + 7 + \ldots + 41{,}7$, которые без соответствующего контекста лишены всякого смысла. С другой стороны, включение членов $\mathbf{3n(n - 1)}$ излишне: достаточно написать $\mathbf{1 + 2 + \ldots + n}$. Иногда его можно даже сократить до $\mathbf{1 + \ldots + n}$. Будем иметь дело с суммами общего вида:

$$\mathbf{a_1 + a_2 + \ldots + a_n,} \tag{4.1}$$

где каждое $\mathbf{a_k}$ – определенное каким-то образом число. Такая запись обладает тем преимуществом, что при достаточном воображении мы можем «увидеть» всю сумму почти так, как если бы она была записана полностью. Каждый элемент a_k такой суммы называется ее членом. Зачастую эти члены определяются косвенно, в виде формул, следуя некоторому легко просматривающемуся правилу, а в ряде случаев приходится записывать суммы в развернутом виде, чтобы стал понятен их смысл. Например, если предполагается, что формула $\mathbf{1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}}$ должна обозначать сумму из $\mathbf{n}$, а не из $\mathbf{2^{n-1}}$ членов, то ее следует записать более аккуратно: $\mathbf{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}}$.

Хотя обозначение с использованием многоточия широко распространено, оно громоздко и может вызывать разночтения. Используются и другие способы записи суммы, особенно форма записи с явными пределами

$$\textstyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{k-1}}, \tag{4.2}$$

которая называется сигма-обозначением, поскольку здесь фигурирует греческая буква $\sum$ (прописная сигма). Оно говорит о том, что включать в сумму надо именно те члены $\mathbf{a_k}$, номер $\mathbf{k}$ которых является целым числом, лежащим между нижней и верхней границами 1 и $\mathbf{n}$ включительно. Произносится как «сумма по **k** от 1 до **n**». Это $\sum$-обозначение ввел Жозеф Фурье в 1820 г. Величина после знака $\sum$ (к данном случае $\mathbf{a_k}$) называется общим членом.

Говорят, что переменный индекс **k** связан знаком $\sum$ в формуле (4.2), поскольку **k** в $\mathbf{a_k}$ не имеет отношения к тем **k**, которые появляются за рамками сигма-обозначения. В частности, любая другая буква могла бы заменить **k** без изменения смысла выражения (4.2).

Оказывается, что более полезным, чем форма записи с явными пределами, является обобщенное сигма-обозначение: просто записывают одно или несколько условий под знаком $\sum$, задавая тем самым множество значений индекса, по которым следует проводить суммирование. Например, суммы (4.1) и (4.2) можно записать как

$$\sum_{\mathbf{1} \le \mathbf{k} \le \mathbf{n}} \mathbf{a_k}. \tag{4.3}$$

Хотя в данном отвлеченном примере не видно существенного различия между новым обозначением и обозначением (4.2), обобщенное обозначение позволяет брать суммы по множествам значений индекса, не ограниченным последовательными целыми числами. К примеру, сумму квадратов всех нечетных положительных чисел, меньших 100, можно выразить следующим образом:

$$\sum_{\substack{\mathbf{1} \le \mathbf{k} \le \mathbf{100} \\ \text{k нечетко}}} \mathbf{k^2}.$$

Аналог данной суммы с явными пределами $\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{49}} (\mathbf{2\,k+1})^{\mathbf{2}}$ более громоздок и менее нагляден. Аналогично сумма обратных значений всех простых чисел между 1 и **N** есть

$$\sum_{\substack{\mathbf{p} \le \mathbf{N} \\ \text{p простая}}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}},$$

в случае формы записи с явными пределами потребовалось бы написать

$$\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{p(N)}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p_k}},$$

где $\mathbf{p_k}$ означает **k**-е простое число, а $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{N})$ − количество простых чисел, не превосходящих **N**.

Указанная сумма дает приближенное среднее количество простых делителей «случайного» целого числа, близкого к **N**, поскольку около **1/p** этих целых чисел делятся на **p**. При большом **N** это значение приближенно равно $\mathbf{\ln\ \ln\ N + M}$, где $\mathbf{M} =$ $= \mathbf{0{,}2614972128476427837554263360869585905156 66}$ – константа Мертенса.

Самым большим преимуществом обобщенного сигма-обозначения является то, что обращаться с ним гораздо легче, чем с формой записи с явными пределами. Предположим, например, что необходимо заменить переменный индекс **k** на **k + 1**. В случае обобщенной формы записи имеем

$$\sum_{\mathbf{1} \le \mathbf{k} \le \mathbf{n}} \mathbf{a_k} = \sum_{\mathbf{1} \le \mathbf{k+1} \le \mathbf{n}} \mathbf{a_{k+1}}.$$

Далее просто выполняем подстановку. Но в случае явных пределов имеем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n_1} a_{k+1},$$

и в этом случае больше шансов совершить ошибку.

Тем не менее форма записи с явными пределами не является совершенно бесполезной. Она имеет привлекательный вид и немного короче. В связи с этим зачастую используют знак $\sum$ с верхним и нижним пределами при формулировке задачи или представлении результата, но лучше обратиться к указанным под знаком $\sum$ соотношениям при действиях с суммой, индексные переменные которой требуется изменять.

Формально

$$\sum_{p(k)} a_k \tag{4.4}$$

представляет собой сокращенную запись суммы всех членов a_k, таких, что целое k удовлетворяет заданному условию $P(k)$ (условие $P(k)$ – это некоторое утверждение относительно k, которое может быть либо истинным, либо ложным). Пока допустим, что $a_k \neq 0$ лишь для конечного количества целых значений k, удовлетворяющих условию $P(k)$; в противном случае будет складываться бесконечное число ненулевых членов и ситуация усложнится. Другая крайность: $P(k)$ ложно для всех целых k, тогда получаем «пустую» сумму. «Пустая» сумма по определению равна нулю.

Если знак суммы появляется в тексте, а не в выделенной формуле, то используется слегка измененная форма записи (4.4) и пишется $\sum_{p(k)} a_k$, придавая условию $P(k)$ вид нижнего индекса при $\sum$, чтобы формула не слишком выходила за пределы строки. Аналогично $\sum_{k=1}^{n} a_k$ представляет собой удобный вариант записи (4.3), если необходимо уместить данное обозначение в одну строку.

Зачастую хочется использовать запись $\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k)$ вместо $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k)$, поскольку при $k = 0, 1$ и n соответствующие члены этой суммы равны нулю. Разумнее сложить $n - 2$ члена вместо $n + 1$ членов. Однако эффективность вычислительная – это совсем не то же самое, что эффективность понимания. Обозначение типа $\sum_{k=2}^{n-1}$ может приводить к двусмысленности, поскольку не совсем ясен его смысл при $n = 0$ или $n = 1$. Вместе с тем нулевые члены часто избавляют от дополнительных трудностей. Более простые пределы суммирования обладают тем преимуществом, что существенно упрощают работу с суммами.

Рассмотренные выше обозначения являются общепринятыми. Ученый Кеннет Айверсон в своем языке программирования APL отступил от сложившейся традиции и внес идею, которая состоит в том, чтобы просто заключать истинное (или ложное) утверждение в квадратные скобки и считать при этом, что результат равен 1, если данное утверждение истинно, и 0, если данное утверждение ложно.

Например,

$$\{\mathbf{p\ простое}\} = \left\{\frac{\mathbf{1,\ если\ p\ простое\ число}}{\mathbf{0,\ если\ p\ не\ простое\ число}}\right\}.$$

Нотация Айверсона позволяет выражать суммы без каких бы то ни было ограничений на индекс суммирования, поскольку сумму (4.4) можно переписать в виде

$$\textstyle\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{a_k}[\mathbf{P}(\mathbf{k})]. \qquad (4.5)$$

Если $\mathbf{P(k)}$ ложно, то член $\mathbf{a_k[P(k)]}$ равен нулю и его можно включать в состав суммируемых членов, что упрощает манипулирование с индексом суммирования, так как отсутствуют граничные условия.

Необходимо отметить одну техническую деталь: иногда $\mathbf{a_k}$ бывает определено не для всех целых $\mathbf{k}$. Это затруднение можно обойти, допуская, что $\mathbf{[P(k)]}$ является «очень сильно нулевым». Когда $\mathbf{P(k)}$ ложно, оно настолько нулевое, что делает $\mathbf{a_k[P(k)]}$ равным нулю, даже когда $\mathbf{a_k}$ не определено. Например, если воспользоваться нотацией Айверсона для записи суммы чисел, обратных простым $\le \mathbf{N}$, в виде

$$\textstyle\sum_{\mathbf{p}} [\mathbf{p\ простое}][\mathbf{p} \le \mathbf{N}]/\mathbf{p},$$

то при $\mathbf{p}$, равном нулю, проблем с делением на нуль не возникает, потому что допущение позволяет считать, что **[0** простое **][0   N] / 0 = 0**.

Подытожим то, что обсуждалось до сих пор в отношении сумм. Имеются два способа записи суммы членов: в одном случае используется многоточие, в другом – $\sum$. Запись с многоточием часто подсказывает полезные преобразования (в частности, группировку смежных членов), поскольку, когда видна вся сумма, легче найти определенные упрощающие ее закономерности. Сигма-обозначение компактно и зачастую подсказывает преобразования, которые не столь очевидны в случае записи с многоточием. При работе с сигма-обозначением нулевые члены совсем не мешают, а, напротив, часто облегчают $\sum$-операцию.

4.2. Суммы и рекуррентности

Можно выражать суммы с помощью того или иного обозначения, но как надо действовать для нахождения значения той или иной суммы? Один из способов – заметить, что существует тесная связь между суммами и рекуррентностями. Сумма $\mathbf{S_n} = \sum^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k}$ эквивалентна рекуррентности:

$$\mathbf{S_0} = \mathbf{a_0};$$

$$\mathbf{S_n} = \mathbf{S_{n+1}} + \mathbf{a_n} \text{ при } \mathbf{n} > \mathbf{0}. \qquad (4.6)$$

Следовательно, можно вычислять суммы в замкнутой форме, используя для этого методы решения рекуррентных соотношений в замкнутой форме.

К примеру, если a_n есть некая постоянная плюс некое кратное n, то сигма-рекуррентности (4.6) приобретает следующий общий вид:

$$\mathbf{R_0 = \alpha;}$$
$$\mathbf{R_n = R_{n+1} + \beta + \gamma\, n} \text{ при } \mathbf{n > 0}. \qquad (4.7)$$

Прибегая к методам из раздела 2, находим, что $\mathbf{R_1 = \alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma}$ и т.д., а в целом искомое решение может быть записано в виде

$$\mathbf{R_n = A(n)\,\alpha + B(n)\,\beta + C(n)\,\gamma}, \qquad (4.8)$$

где $\mathbf{A(n)}$, $\mathbf{B(n)}$, $\mathbf{C(n)}$ – коэффициенты при основных параметрах.

Метод наборов предполагает подстановку вместо $\mathbf{R_n}$ простых функций от $\mathbf{n}$ с целью поиска постоянных параметров $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, при которых решение становится простым.

Подстановка $\mathbf{R_n = 1}$ даст $\mathbf{\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0}$, откуда $\mathbf{A(n) = 1}$.

Подстановка $\mathbf{R_n = n}$ даст $\mathbf{\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0}$, откуда $\mathbf{B(n) = n}$.

Подстановка $\mathbf{R_n = n^2}$ даст $\mathbf{\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 2}$, откуда $\mathbf{2\,C(n) - B(n) =}$ $\mathbf{= n^2}$ и $\mathbf{C(n) = (n^2 + n)/2}$.

Итак, если необходимо вычислить сумму

$$\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n0}} \mathbf{(a + bk)},$$

то сигма-рекуррентность (4.6) сводится к (4.7) с $\mathbf{\alpha = \beta = a}$ и $\mathbf{\gamma = b}$, а ответом будет $\mathbf{aA(n) + a\,B(n) + b\,C(n) = a\,(n + 1) + b\,(n + 1)\,n\,/\,2}$. И обратно, многие рекуррентности могут быть сведены к суммам. Подходящий пример – рекуррентность, связанная с задачей о ханойской башне:

$$\mathbf{T_0 = 0;}$$
$$\mathbf{T_n = 2T_{n-1} + 1} \quad \text{при } \mathbf{n > 0}.$$

Рекуррентность можно привести к частному случаю (4.6), если поделить обе части на $\mathbf{2^n}$: $\mathbf{T_n / 2^n = T_{n-1} / 2^{n-1} + 1 / 2^n}$ при $\mathbf{n > 0}$.

Теперь можно положить $\mathbf{S_n = T_{n-1} / 2^{n-1}}$, получая

$$\mathbf{S_0 = 0;}$$
$$\mathbf{S_n = S_{n-1} + 2^{-n}} \quad \text{при } \mathbf{n > 0}$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{S_n} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{2^{-k}}.$$

Следует обратить внимание, что член с $\mathbf{k = 0}$ не включен в эту сумму.

Сумма геометрической прогрессии

$$\mathbf{2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n} = (1/2)^2 + (1/2)^2 + \ldots + (1/2)^n}$$

будет выведена в данном разделе позднее. Она окажется равной $\mathbf{1 - (1/2)^n}$.

Следовательно, $\mathbf{T_n = 2^n \cdot S_n = 2^{n-1}}$.

В этом выводе мы перешли от $\mathbf{T_n}$ к $\mathbf{S_n}$, отметив, что исходное рекуррентное соотношение можно было поделить на $\mathbf{2^n}$. Эта уловка – частный случай общего метода, с помощью которого фактически любую рекуррентность вида

$$\mathbf{a_n\,T_n = b_n\,T_{n-1} + c_n} \qquad (4.9)$$

можно свести к сумме. Суть метода состоит в том, чтобы домножить обе части на суммирующий множитель $\mathbf{S_n}$:

$$\mathbf{S_n\,a_n\,T_n = S_n\,b_n\,T_{n-1} + S_n\,c_n.}$$

При этом множитель S_n подбирается так, чтобы сделать $S_n\ b_n$ равным $S_{n-1}\ a_{n-1}$. Теперь, если положить $S_n = S_n\ a_n\ T_n$, получим сигма-рекуррентность

$$S_n = S_{n-1} + S_n\ c_n.$$

Следовательно,

$$S_n = S_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k c_k = S_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k c_k$$

и решением исходной рекуррентности (4.9) является

$$T_n = \frac{1}{S_n\, a_n}\left(S_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k\, c_k\right). \qquad (4.10)$$

При $n = 1$, например, мы получаем

$$T_1 = (S_1\ b_1\ T_0 + S_1\ c_1)\ /\ (S_1\ a_1) = (b_1\ T_0 + c_1)\ /\ a_1.$$

Можно ли найти требуемое S_n? Достаточно развернуть соотношение $S_n = S_{n-1}\ a_{n-1}\ /\ b_n$, чтобы выяснить, что искомым суммирующим множителем является дробь

$$S_n = (a_{n-1}\ a_{n-2}\ a_1)/(b_n\ b_{n-1}\ b_2) \qquad (4.11)$$

или любое подходящее, которое кратно этой величине. В частности, для рекуррентности, связанной с задачей о ханойской башне, $a_n = 1$ и $b_n = 2$; для разработанного нами общего метода $S_n = 2^{-n}$ и является подходящим множителем, если мы хотим свести рекуррентность к сумме. При этом нужно избежать деления на нуль. Метод суммирующего множителя срабатывает всегда, когда все **a** и все **b** не равны нулю.

Применим эти соотношения к рекуррентности, которая возникает в связи с анализом «быстрой сортировки» – одного из наиболее популярных методов внутренней сортировки данных в компьютере. Среднее число выполняемых «быстрой сортировкой» шагов сравнения, когда она применяется к n элементам данных, расположенных в случайном порядке, удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$C_0 = 0;$$

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \text{при } n > 0. \qquad (4.12)$$

Выражение выглядит более сложным, чем встречавшиеся до сих пор рекуррентности; мало того, что оно включает сумму всех предыдущих значений, так эта сумма еще и делится n. Малые случаи дают некоторые данные: $C_1 = 2$, $C_2 = 5$, $C_3 = 26/3$.

Однако сложность соотношения (4.12) можно снижать постепенно, вначале избавившись от деления, а затем от знака $\sum$. Реализуя эту идею, домножим обе части рекуррентности на n, получив соотношение

$$n\,C_n = n^2 + n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k \qquad \text{при } n > 0,$$

а если заменим n на $n - 1$, то

$$(n-1)C_n = (n-1)^2 + (n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \qquad \text{при } n - 1 > 0.$$

Теперь можно вычесть второе равенство из первого, и знак $\sum$ пропадает:

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1} \qquad \text{при } n > 2.$$

Итак, исходное рекуррентное соотношение для $\mathbf{C_n}$ сводится к гораздо более простому:

$$\mathbf{nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2n} \quad \text{при } \mathbf{n > 2,\ \ C_0 = C_1 = 0,\ \ C_2 = 3}.$$

Теперь можно применить суммирующий множитель, поскольку данное рекуррентное соотношение имеет вид (4.9) с $\mathbf{a_n = n}$, $\mathbf{b_n = n + 1}$ и $\mathbf{c_n = 2n - 2}$ (при $\mathbf{n = 1}$) $\mathbf{+ 2}$ (при $\mathbf{n = 2}$).

Общий метод, изложенный на предыдущей странице, подсказывает, что надо умножить все рекуррентное соотношение на некоторое значение, кратное величине

$$\mathbf{S_n = (a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_1) / (b_n\, b_{n-1} \dots b_2) =}$$
$$\mathbf{= ((n - 1)\cdot(n - 2) \cdot\dots\cdot 1) / ((n + 1)\cdot n \cdot\dots 3) = 2 / ((n + 1) \cdot n)}.$$

Тогда, согласно выражению (4.10), решением является

$$\mathbf{C_n = 2(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}\,.$$

Оставшаяся сумма очень похожа на величину, которая часто встречается в приложениях. В действительности она возникает так часто, что для нее требуются специальное название и специальное обозначение:

$$\mathbf{H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ \dots\ + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}. \qquad (4.13)$$

Буква **H** берет начало от слова harmonic, так что $\mathbf{H_n}$ – это гармоническое число. Оно названо так потому, что **k**-я гармоника, извлекаемая из скрипичной струны, – это основной тон, производимый струной длиной **1/k** от длины исходной струны.

Исследование рекуррентности быстрой сортировки (4.12) можно завершить приведением $\mathbf{C_n}$ к замкнутому виду, если мы сможем выразить $\mathbf{C_n}$ через $\mathbf{H_n}$. Сумма в формуле для $\mathbf{C_n}$:

$$\mathbf{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k+1}}.$$

Эту сумму можно без особого труда связать с суммой $\mathbf{H_n}$, заменив **k** на **k – 1** и изменив граничные условия:

$$\mathbf{\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k+1} = \sum_{1\le k-1\le n} \frac{1}{k} = \sum_{2\le k\le n+1} \frac{1}{k} = \left(\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} =}$$
$$\mathbf{= H_n - \frac{n}{n+1}}.$$

Найдена сумма, необходимая для завершения решения (4.12): среднее число выполняемых «быстрой сортировкой» сравнений, когда она применяется к **n** случайно расположенным элементам данных:

$$\mathbf{C_n = 2\,(n + 1)\,H_n - 2\,n}. \qquad (4.14)$$

Убедимся в правильности первых значений:

$$\mathbf{C_0 = 0,\ \ C_1 = 2,\ C_2 = 4}.$$

4.3. Преобразование сумм

Основная задача при работе с суммами состоит в умении заменить одну сумму другой, более простой или более близкой к конечной цели. Выучив несколько основных правил преобразования и поупражнявшись в их применении, можно быстро оперировать суммами.

Пусть **К** – некоторое конечное множество целых чисел. Суммы по элементам из **К** можно преобразовывать на основе трех простых правил:

$$\sum_{k\in K} c\,a_k = c\sum_{k\in K} a_k \text{ (распределительный закон);} \quad (4.15)$$

$$\sum_{k\in K} (a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k \text{ (сочетательный закон);} \quad (4.16)$$

$$\sum_{k\in K} a_k = c\sum_{p(k)\in K} a_{p(k)} \text{ (переместительный закон).} \quad (4.17)$$

Распределительный закон разрешает вводить и выводить постоянные под знак и за знак суммы. Сочетательный закон позволяет разбивать одну сумму на две или объединять две суммы.

Переместительный закон гласит, что члены суммы можно переставлять в любом требуемом порядке; здесь $\mathbf{p(k)}$ – некоторая перестановка множества всех целых чисел. Например, если $\mathbf{K = (-1,0 + 1)}$ и если $\mathbf{p(k) = -k}$, то три этих закона утверждают:

$$c\,a_{-1} + c\,a_0 + c\,a_1 = c(a_{-1} + a_0 + a_1) \text{ (распределительный закон);}$$

$$(a_{-1} + b_{-1}) + (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) =$$
$$= (a_{-1} + a_0 + a_1) + (b_{-1} + b_0 + b_1) \text{ (сочетательный закон);}$$

$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_0 + a_{-1} \text{ (переместительный закон).}$$

Уловку Гаусса можно рассматривать как одно из применений этих трех основных законов. Предположим, что необходимо вычислить сумму арифметический прогрессии общего вида

$$S = \sum_{0\le k\le n} (a + bk).$$

Согласно переместительному закону, заменив $\mathbf{k}$ на $\mathbf{n - k}$, получим

$$S = \sum_{0\le n-k\le n} (a + b(n - k)) = \sum_{0\le k\le n} (a + bn - bk).$$

Два этих уравнения можно сложить, используя сочетательный закон:

$$2S = \sum_{0\le k\le n} ((a + bk) + (a + bn - b\,k)) = \sum_{0\le k\le n} (2a + bn).$$

Теперь следует применить распределительный закон и вычислить тривиальную сумму:

$$2S = (2a + bn)\sum_{0\le k\le n} 1 = (2a + bn)(n + 1).$$

Разделив на 2, имеем

$$\sum_{k=0}^{n} (a + bk) = (a + \tfrac{1}{2}bn)(n + 1). \quad (4.18)$$

Правую часть можно запомнить как среднее первого и последнего членов, а именно как $\mathbf{1/2\ (a + (a + bn)}$, помноженное на число членов, т.е. на $\mathbf{(n + 1)}$.

Важно иметь в виду, что функция $\mathbf{p(k)}$ в общей форме переместительного закона (4.17) считается перестановкой всех целых чисел. Другими словами, для каждого целого $\mathbf{n}$ должно существовать в точности одно целое $\mathbf{k}$, такое, что $\mathbf{p(k) = n}$. В противном случае переместительный закон может и не выполняться. Преобразования типа $\mathbf{p(k) = k + c}$ или $\mathbf{p(к) = c - к}$, где $\mathbf{c}$ – целая константа, всегда представляют собой перестановки, так что они всегда работоспособны.

Тем не менее можно слегка ослабить ограничение на перестановку. Достаточно, чтобы существовало в точности одно целое $\mathbf{k}$, такое, что

$\mathbf{p(k) = n}$, когда $\mathbf{n}$ – элемент индексного множества $\mathbf{K}$. Если $\mathbf{n} \in \mathbf{K}$ (т.е. если $\mathbf{n}$ не принадлежит $\mathbf{K}$), то совсем не существенно, как часто имеет место равенство $\mathbf{p(k) = n}$, поскольку подобное $\mathbf{k}$ не участвует в сумме. Так, к примеру, можно утверждать, что

$$\sum_{\substack{k \in K \\ k \text{ четное}}} a_k = \sum_{\substack{n \in K \\ n \text{ четное}}} a_n = \sum_{\substack{2k \in K \\ 2k \text{ четное}}} a_{2k} = \sum_{2k \in K} a_{2k}, \qquad (4.19)$$

так как в выражении (4.19) имеется ровно одно $\mathbf{k}$, такое, что $\mathbf{2k = n}$, когда $\mathbf{n} \in \mathbf{K}$ и $\mathbf{n}$ – четное.

Нотация Айверсона, позволяющая получать 0 или 1 в качестве значений логических выражений внутри некоторой формулы, может быть использована вкупе с распределительным, сочетательным и переместительным законами для выявления дополнительных свойств сумм. Вот, к примеру, важное правило объединения различных множеств индексов: если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K'}$ – некоторые множества целых чисел, то

$$\sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K'} a_k = \sum_{k \in K \cap K'} a_k = \sum_{k \in K \cup K'} a_k. \qquad (4.20)$$

Это следует из общих формул:

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_k a_k\,[k \in K]; \qquad (4.21)$$

$$[k \in K] + [k \in K'] = [k \in K \cap K'] + [k \in K \cup K']. \qquad (4.22)$$

Обычно используется правило (4.20) либо для объединения двух почти непересекающихся индексных множеств, как в случае

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{при } 1 \le m \le n,$$

либо для выделения отдельного члена суммы, как в случае

$$\sum_{0 \le k \le n} a_k = a_0 + \sum_{1 \le k \le n} a_k \quad \text{при } n \ge 0. \qquad (4.23)$$

Подобная операция выделения члена составляет основу метода приведения, позволяющего вычислить ту или иную сумму в замкнутой форме. Суть этого метода заключается в том, чтобы начать с подлежащей вычислению суммы и обозначить ее $\mathbf{S_n}$: $S_n = \sum_{0 \le k \le n} a_k$.

Затем следует переписать $\mathbf{S_{n+1}}$ двумя способами, выделяя как последний, так и первый члены:

$$\begin{aligned} S_n + a_{n+1} &= \sum_{0 \le k \le n+1} a_k = a_0 + \sum_{1 \le k \le n+1} a_k = \\ &= a_0 + \sum_{1 \le k+1 \le n+1} a_{k+1} = a_0 + \sum_{0 \le k \le n} a_{k+1}. \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Теперь можно заняться последней суммой и попытаться выразить ее через $\mathbf{S_n}$. Если это получится, образуется уравнение, решением которого и будет искомая сумма.

Следует воспользоваться, к примеру, данным подходом для нахождения суммы геометрической прогрессии общего вида:

$$S_n = \sum_{0 \le k \le n} a\,x^k.$$

В соответствии с общей схемой приведения (4.24) сумма $\mathbf{S_{n+1}}$ переписывается в виде

$$S_n + a\,x^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \le k \le n} a\,x^{k+1},$$

а сумма в правой части равняется $\mathbf{ax^0 + \sum_{0 \le k \le n} a\,x^{k+1} = x\,S_n}$ по распределительному закону. Таким образом, $\mathbf{S_n + a\;x^{n+1} = a + x\;S_n}$. Разрешая это уравнение относительно $\mathbf{S_n}$, получаем

$$\mathbf{\sum_{k=0}^{n} a\,x^k = \frac{a - a\,x^{n+1}}{1 - x}} \quad \text{при } \mathbf{x \ne 1}. \qquad (4.25)$$

При $\mathbf{x = 1}$ данная сумма, разумеется, равна просто $\mathbf{(n + 1)}$. Правую часть формулы можно запомнить как разность первого входящего и первого не входящего в сумму членов, деленную на разность $\mathbf{(1 - x)}$.

Теперь необходимо испытать метод приведения на более трудной сумме:

$$\mathbf{S_n = \sum_{0 \le k \le n} k\,2^k}.$$

В данном случае надо найти $\mathbf{S_0 = 0}$, $\mathbf{S_1 = 2}$, $\mathbf{S_2 = 10}$, $\mathbf{S_3 = 34}$, $\mathbf{S_4 = 98}$. В соответствии с выражением (4.24) получаем

$$\mathbf{S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0 \le k \le n} (k+1)2^{k+1}},$$

так что желательно выразить сумму в правой части через $\mathbf{S_n}$. Ее можно разбить на две суммы с помощью сочетательного закона

$$\mathbf{\sum_{0 \le k \le n} k\,2^{k+1} + \sum_{0 \le k \le n} 2^{k+1}}.$$

Первая из полученных сумм равна $\boldsymbol{2S_n}$. Вторая сумма – это сумма геометрической прогрессии, равная $\mathbf{(2 - 2^{n+2}) \;/\; (1 - 2) = 2^{n+2} - 2}$ по формуле (4.25). Следовательно, и после алгебраических преобразований получаем $\mathbf{\sum_{0 \le k \le n} k\,2^k = (n-1)2^{n+1} + 2}$.

Теперь становится понятно, почему $\mathbf{S_3 = 34}$ – это $\mathbf{32 + 2}$, а не $\mathbf{2*17}$.

Аналогичный вывод с $\mathbf{x}$ вместо 2 привел бы к уравнению $\mathbf{S_n + (n+1)k^{n+1} = xS_n + \frac{x - x^{n+2}}{1 - x}}$, откуда можно заключить, что

$$\mathbf{\sum_{k=0}^{n} k\,x^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n\,x^{n+2}}{(1-x)^2}} \quad \text{при } \mathbf{x \ne 1}. \qquad (4.26)$$

Эту замкнутую форму (4.26) можно было бы вывести совсем другим способом, используя элементарные приемы дифференциального исчисления. Если начать с равенства

$$\mathbf{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

и взять производную по $\mathbf{x}$ от обеих частей, то получим

$$\mathbf{\sum_{k=0}^{n} k\,x^{k-1} = \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + n\,x^{n+1}}{(1-x)^2}},$$

поскольку производная суммы равна сумме производных ее слагаемых.

4.4. Общие методы суммирования

Рассмотрев один и тот же пример с разных сторон, найдем замкнутое выражение для суммы первых $\mathbf{n}$ квадратов, которую будем обозначать через $_{\mathbf{n}}$:

$$_{\mathbf{n}} = \mathbf{\sum_{0 \le k \le n} k^2} \quad \text{при } \mathbf{n \ge 0}. \qquad (4.27)$$

Рассмотрим несколько различных способов решения задачи (4.27), а в ходе разбора научимся их применять к произвольным суммам. Но вначале рассмотрим некоторые крайние случаи:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{n^2}$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$_{\mathbf{n}}$	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650

Никакого замкнутого выражения для $_{\mathbf{n}}$ на первый взгляд не наблюдается, но когда мы его обнаружим, эти величины могут быть полезны для проверки точности попадания.

Метод 0: с помощью справочника. Задача наподобие суммы первых **n** квадратов уже решена, так что решение можно найти в любом справочнике. В стандартной математической таблице содержится такой ответ:

$$_{\mathbf{n}} = \mathbf{(n\ (n + 1)\ (2\ n + 1))\ /\ 6 \quad при\ n \geq 0}. \qquad (4.28)$$

Исключительно с целью проверки правильности прочтения убедимся в том, что эта формула верна: $_{\mathbf{n}}$ = **5 · 6 · 11 / 6 = 55**. В стандартной математической таблице содержится дальнейшая информация, о суммах третьих, …, десятых степеней.

Авторитетным собранием математических формул служит «Справочник по специальным функциям» под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган.

Если требуется использовать некоторую рекуррентность, которая уже была изучена, все, что нужно сделать, – это вычислить достаточное число членов для того, чтобы распознать рекуррентность среди других известных. В этом случае появится возможность найти указание на соответствующую литературу в справочниках.

Еще один способ – использование компьютерных программ (Macsyma, Axiom, Maple или Mathematica и др.), в которых имеются средства для символьных преобразований. Такие программы особенно ценны, когда приходится иметь дело с громоздкими формулами.

Метод 1: угадывание ответа с подтверждением по индукции.

Требуется подтвердить корректность метода.

Можно было бы, например, заметить, что значения $_{\mathbf{n}}$ раскладываются на маленькие простые множители, так что следует найти (4.28) как формулу, работающую для всех малых ***n***. Можно было бы также предположить эквивалентную (4.28) формулу

$$_{\mathbf{n}} = \mathbf{(n\ (n + 1/2)\ (n + 1))\ /\ 3 \quad при\ n \geq 0}, \qquad (4.29)$$

которая лучше в том смысле, что ее легче запомнить. Надо доказать предположения о правильности формулы (4.29) достоверным способом. Для этой цели и была придумана математическая индукция.

Итак, известно, что $_{\mathbf{n}}$ $\mathbf{= 0 = 0(0 + 1/2)\ (0 + 1)\ /\ 3}$, так что с базой индукции просто. Для индуктивного перехода предположим, что $\mathbf{n \geq 0}$, и допустим, что формула (4.29) остается в силе, когда **n** заменяется на **n – 1**. Поскольку

$$_{\mathbf{n}} = \ _{\mathbf{n-1}} + \mathbf{n^2},$$

то

$$\mathbf{3\ _n = (n-1)\ (n-1/2)\ n + 3\ n^2 = (n^3 - 3/2\ n^2 + 1/2\ n) + 3\ n^2 =}$$
$$\mathbf{= n^3 + 3/2\ n^2 + 1/2\ n = n\ (n + 1/2)\ (n + 1).}$$

Таким образом, формула (4.29) действительно справедлива при всех $\mathbf{n \geq 0}$.

Индукция здесь уместна и отчасти более оправдана, чем поиск ответа в справочнике. Однако все равно это не совсем то, что нужно. Со всеми другими суммами, которые до сих пор вычислялись в данном разделе, можно было справиться без всякой индукции. Того же правила следует придерживаться и при установлении суммы $_{\mathbf{n}}$.

Метод 2: метод приведения.

Необходимо вернуться к методу приведения, который хорошо использовать в случае геометрической прогрессии. Выделим первый и последний члены $_{\mathbf{n}}$, чтобы получить $_{\mathbf{n+1}}$:

уравнение относительно $_{\mathbf{n}}$:

$$_{\mathbf{n}} + (\mathbf{n+1})^2 = \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} (\mathbf{k+1})^2 = \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} (\mathbf{k^2 + 2k + 1}) =$$
$$= \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} \mathbf{k^2} + \mathbf{2} \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} \mathbf{k} + \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} \mathbf{1} =$$
$$= \ _{\mathbf{n}} + \mathbf{2} \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} \mathbf{k} + (\mathbf{n+1}).$$

Величины $_{\mathbf{n}}$ сокращаются. Метод приведения приводит к $_{\mathbf{n}} = \ _{\mathbf{n}}$, в результате ничего не добились. Тем не менее этот вывод не совсем бесполезен: он помогает выявлять способ вычисления суммы первых **n** целых чисел в замкнутой форме

$$\mathbf{2} \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} \mathbf{k} = (\mathbf{n+1})^2 - (\mathbf{n+1}),$$

хотя собирались найти сумму их квадратов. Не может получиться так, что, начав с суммы кубов целых чисел, которую можно обозначить через ❒$_{\mathbf{n}}$, мы получим выражения для суммы их квадратов?

$$❒_{\mathbf{n}} + (\mathbf{n+1})^3 = \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} (\mathbf{k+1})^3 = \sum_{\mathbf{0 \leq k \leq n}} (\mathbf{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}) =$$
$$= ❒_{\mathbf{n}} + \mathbf{3}\ _{\mathbf{n}} + \mathbf{3}\frac{(\mathbf{n+1})\mathbf{n}}{\mathbf{2}} + (\mathbf{n+1}).$$

Величины ❒$_{\mathbf{n}}$ уничтожаются. Можно определить ❒$_{\mathbf{n}}$, не полагаясь на индукцию:

$$\mathbf{3}❒_{\mathbf{n}} \mathbf{= (n+1)^3 - 3\ (n+1)\ n\ /\ 2 - (n+1) =}$$
$$\mathbf{= (n+1)(n^2 + 2\ n + 1 - 3/2\ n - 1) = (n+1)(n + 1/2\ n)\ n.}$$

Метод 3: подбор репертуара.

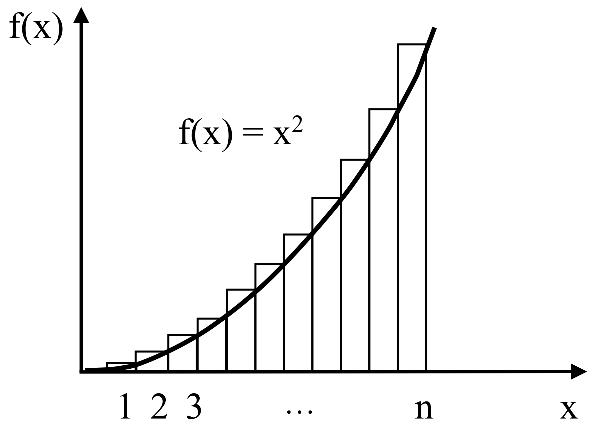
Для суммирования квадратов достаточно также намного обобщить рекуррентное соотношение (4.7). Решение рекуррентности

$$\mathbf{R_0 = \alpha},$$
$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma\, n + \delta\, n^2} \qquad \text{при } \mathbf{n > 0} \tag{4.30}$$
будет иметь вид
$$\mathbf{R_n = A(n)\, \alpha + B(n)\, \beta + C(n)\, \gamma + D(n)\, \sigma}, \tag{4.31}$$
и ранее определили **A(n), B(n)** и **C(n)**, поскольку выражение (4.30) – то же самое, что и (4.7), когда $\boldsymbol{\sigma = 0}$. Если теперь подставить $\mathbf{R_n = n^3}$, то получится, что $\mathbf{n^3}$ будет решением при $\boldsymbol{\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -3}$ и $\boldsymbol{\sigma = 3}$. Итак, $\mathbf{3D(n) + B(n) = n^3}$, откуда определяется **D(n)**.

Представляет интерес сумма $_{\mathbf{n}}$, которая равна $_{\mathbf{n+1}}$ + $\mathbf{n^2}$: если мы положим $\boldsymbol{\alpha = \beta = \gamma = 0}$ и $\boldsymbol{\sigma = 1}$ в выражение (4.31), то получим $\mathbf{D(n) = R_n}$. Следовательно, $_{\mathbf{n}}$ = **D(n)**. Не нужно прибегать к алгебре для вычисления **D(n)** по **B(n)** и **C(n)**, поскольку можно не сомневаться в том, каким будет ответ:
$$\mathbf{3\, D(n) = n^3 + 3\, C(n) - B(n) = n^3 + 3\, ((n + 1)\, n) / 2 - n = n\, (n + 1/2)\, (n + 1)}.$$
Метод 4: замена сумм интегралами.

Можно попытаться заменить сумму на $\int$. Одна из целей изучения дискретной математики заключается в том, чтобы сделать сумму настолько простой в обращении, что уже $\int$ будет казаться более сложным (по крайней мере, при точных вычислениях). Тем не менее имеет смысл проследить связь между суммой и интегралом, поскольку и суммирование, и интегрирование основаны на очень схожих идеях.

В математическом анализе интеграл рассматривается как площадь под некоторой кривой, и эту площадь можно вычислить приближенно, складывая площади вытянутых узких прямоугольников, которые соприкасаются с данной кривой:



Если совокупность вытянутых узких прямоугольников задана, то нужно пойти обратным путем: поскольку величина $_{\mathbf{n}}$ есть сумма площадей прямоугольников размером $\mathbf{1 \times 1}$, $\mathbf{1 \times 4, ..., 1 \times n^2}$, то она приближенно равна площади под кривой $\mathbf{f(x) = x^2}$ в интервале от 0 до **n**. Так как площадь под этой кривой есть $\boldsymbol{\int_0^n x^2 dx = n^3 / 3}$, получается, что величина $_{\mathbf{n}}$ приближенно равна $\mathbf{(1/3)n^3}$.

Один из способов извлечь пользу из данного факта – оценить погрешность полученной аппроксимации, $\mathbf{E_n = {}_n - (1/3)\ n^3}$. Поскольку ${}_n$ удовлетворяет рекуррентности $\mathbf{{}_n = {}_{n+1} + n^2}$, можно увидеть, что $\mathbf{E_n}$ удовлетворяет еще более простой рекуррентности:

$$\mathbf{E_n = {}_n - (1/3)\ n^3 = {}_{n-1} + n^2 - 1/3\ n^3 = E_{n-1} + 1/3\ (n-1)^3 + n^2 - 1/3\ n^3 =}$$
$$\mathbf{= E_{n-1} + n - 1/3}.$$

Другой способ применения интегрального подхода – нахождение формулы для E_n путем суммирования площадей клиновидных фигур, составляющих погрешность. В итоге имеем

$$\mathbf{{}_n - \int_0^n x^2 dx = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \int_{k-1}^k x^2 dx\right) = \sum_{k=1}^n \left(k^2 - \frac{k^3 - (k-1)^3}{3}\right) =}$$
$$\mathbf{= \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{3}\right)}.$$

В любом случае можно было бы найти $\mathbf{E_n}$, а затем ${}_n$.

Метод 5: усложнение и упрощение.

Еще один способ нахождения $О_п$ в замкнутой форме – замена исходной суммы более сложной (на первый взгляд) двойной суммой, которая в действительности может быть упрощена, если преобразовать ее так, как необходимо:

$$\mathbf{{}_n = \sum_{1 \le k \le n} k^2 = \sum_{1 \le j \le k \le n} k = \sum_{1 \le j \le n} k \sum_{1 \le k \le n} k =}$$
$$\mathbf{= \sum_{1 \le j \le n} \left(\frac{j+n}{2}\right)(n - j + 1) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le j \le n} (n(n+1) + j - j^2) =}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2} n^2 (n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2}\ {}_n = \frac{1}{2} n \left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1) - \frac{1}{2}\ {}_n}.$$

Переход от однократной суммы к двукратной может сначала показаться шагом назад, но на самом деле это шаг вперед, так как он дает суммы, с которыми легче работать. Не следует полагать, что любая задача решается только с помощью постоянного упрощения.

5. Целочисленные функции

Целые числа составляют костяк дискретной математики. Часто приходится округлять дробные или произвольные вещественные числа в целые.

5.1. Пол/потолок: определения

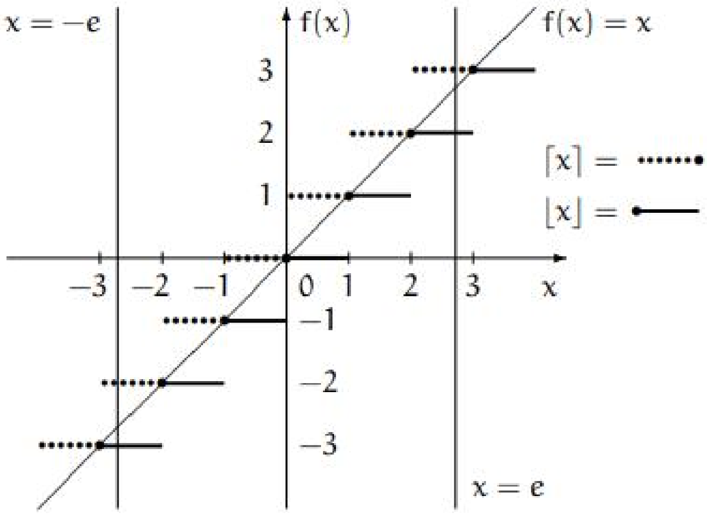
Начнем с настила пола и перекрытия потолка – определений для любого вещественного числа *x* функций наибольшего и наименьшего целого:

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \text{наибольшее целое, меньшее или равное x;} \\ \lceil x \rceil &= \text{наименьшее целое, большее или равное x.} \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Данные обозначения, как и названия «пол» и «потолок», были введены в обиход Кеннетом Ю. Айверсоном в начале 1960-х годов. Он обнаружил, что наборщики вполне могли бы обойтись имеющимися литерами **‘[’и ‘]’**, срезав их верхушки и основания. Предложенные ученым обозначения стали настолько популярными, что теперь скобки пола и потолка можно встретить в любой статье без какого-либо пояснения. До недавнего времени чаще всего использовалась запись **[*x*]** для наибольшего целого $\le x$, а для функции наименьшего целого подходящий эквивалент отсутствовал.

Некоторые авторы пытались писать **]x[**. Это была затея, обреченная на провал. Помимо многозначности в обозначениях, существует неоднозначность в существе этих функций. Так, в некоторых калькуляторах имеется функция INT, определяемая как $\lfloor x \rfloor$ при положительном **x** и как $\lceil x \rceil$ при отрицательном **x**. Вероятно, создатели таких калькуляторов хотели, чтобы их функция INT удовлетворяла соотношению **INT(–x) = –INT(x)**.

Один из подходящих способов получить представление о функциях «пол» и «потолок» – разобраться в их графиках, которые располагаются лесенкой выше и ниже линий «перил» **f(x) = x**:



К примеру, из данного графика видно, что

$$\lfloor \mathbf{e} \rfloor = \mathbf{2}, \qquad \lfloor \mathbf{e} \rfloor = \mathbf{-3},$$
$$\lceil \mathbf{e} \rceil = \mathbf{3}, \qquad \lceil \mathbf{e} \rceil = \mathbf{-2},$$

поскольку **e = 2,71828 …**

Глядя на графическую иллюстрацию, можно отметить ряд фактов относительно «полов» и «потолков». Прежде всего, поскольку функция пола лежит под диагональной линией **f(x) = x**, справедливо соотношение $\lfloor \mathbf{x} \rfloor \le \mathbf{x}$; аналогично $\lceil \mathbf{x} \rceil \ge \mathbf{x}$. В целых точках обе эти функции совпадают:

$$\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \text{ – целое} \Leftrightarrow \lceil x \rceil = x.$$

(Здесь символ $\Leftrightarrow$ подразумевает «тогда и только тогда».) Если функции не совпадают, то «потолок» ровно на 1 выше «пола» (5.2):

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = [x \text{ – не целое}]. \qquad (5.2)$$

Если сдвинуть диагональную линию вниз на единицу, то она целиком окажется под функцией «пол», так что $\mathbf{x - 1} < \lfloor \mathbf{x} \rfloor$, точно так же $\mathbf{x + 1} > \lceil \mathbf{x} \rceil$**.** Объединяя эти наблюдения, получаем, что данные

$$\mathbf{x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1} \qquad (5.3)$$

являются отражениями друг друга.

Наконец, данные функции являются отражениями друг друга относительно обеих осей (5.4):

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor. \qquad (5.4)$$

Таким образом, каждая функция легко выражается через другую. Это обстоятельство позволяет объяснить, почему функция «потолок» прежде не имела собственного обозначения. Поскольку «потолки» встречаются довольно часто, было введено специальное обозначение. У математиков есть синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс, максимум и минимум, а теперь есть «пол» и «потолок».

5.2. Свойства функций

Для того чтобы доказать свойства функций, особенно полезно использовать следующие четыре правила:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A.}\ \lfloor \mathbf{x} \rfloor = \mathbf{n} \iff \mathbf{n \le x < n + 1};\\ &\mathbf{B.}\ \lfloor \mathbf{x} \rfloor = \mathbf{n} \iff \mathbf{x - 1 < n \le x};\\ &\mathbf{C.}\ \lceil \mathbf{x} \rceil = \mathbf{n} \iff \mathbf{n - 1 < x \le n};\\ &\mathbf{D.}\ \lceil \mathbf{x} \rceil = \mathbf{n} \iff \mathbf{x \le n < x + 1}. \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Во всех четырех случаях считается, что **n** – целое, а **x** – вещественное число. Правила A и C следуют непосредственно из определения (5.1); правила B и D – те же самые с той разницей, что данные неравенства преобразованы так, что **n** называется в середине.

Целочисленное слагаемое можно вносить и выносить в/за скобки «пола» (или «потолка»):

$$\mathbf{\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n},\ \mathbf{n} - \text{целое}. \qquad (5.6)$$

Действительно, в правиле A утверждается, что это равенство эквивалентно неравенствам $\mathbf{\lfloor x \rfloor + n \le x + n < \lceil x \rceil + n + t}$.

Аналоги данной операции – вроде вынесения за скобки постоянного множителя – в общем случае недопустимы. Так, $\mathbf{\lfloor nx \rfloor \ne n\lfloor x \rfloor}$, когда $\mathbf{n = 2}$ и $\mathbf{x = 1/2}$. Это значит, что скобки «пола» и «потолка» недостаточно гибки, следует от них уйти или доказать какие-либо правила при их наличии. Имеется много случаев, когда, скобки «пола» и «потолка» излишни и их можно либо вставлять, либо удалять. Так, любое неравенство между вещественными и целыми числами равносильно неравенству с «полом» или «потолком» между целыми числами:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A.\ x < n} \iff \mathbf{\lfloor x \rfloor < n};\\ &\mathbf{B.\ n < x} \iff \mathbf{n < \lceil x \rceil};\\ &\mathbf{C.\ x \le n} \iff \mathbf{\lceil x \rceil \le n}; \end{aligned} \qquad (5.7)$$

$$\mathbf{D.}\ n \le x \iff n \le \lfloor x \rfloor.$$

Данные правила легко доказываются. Например, если $x < n$, то наверняка $\lfloor x \rfloor < n$, так как $\lfloor x \rfloor \le x$. И наоборот, если $\lfloor x \rfloor < n$, то непременно $x < n$, так как $x < \lfloor x \rfloor + 1$ и $\lfloor x \rfloor + 1 \le n$.

Все четыре правила (5.7) сложно доказать. Каждое неравенство без «пола» или «потолка» соответствует такому же неравенству с «полом» или «потолком», но нужно несколько раз подумать, прежде чем решить, которое из них подходит.

Разность между x и $\lfloor x \rfloor$ называется дробной частью x и в приложениях возникает так часто, что заслуживает собственного обозначения:

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor. \tag{5.8}$$

Иногда $\lfloor x \rfloor$ называется целой частью x, поскольку $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Если вещественное число x может быть записано в виде $x = n + \theta$, где n – целое число, а $0 \le \theta < 1$, то на основании A (см. формулу (5.5)) можно заключить, что $n = \lfloor x \rfloor$ и $\theta = \{x\}$.

Равенство (5.6) не выполняется, если n – вещественное число. Однако в целом для $\lfloor x + y \rfloor$ имеется всего лишь две возможности. Если x и y записать в виде $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ и $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, то получим

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor.$$

Поскольку $0 \le \{x\} + \{y\} < 2$, то оказывается, что в некоторых случаях $\lfloor x + y \rfloor$ – это $\lfloor x + y \rfloor$, а в остальных $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

6. Бином Ньютона

6.1. Понятие производящей функции

Пусть дана некоторая последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Образуем степенной ряд $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$.

Если указанный ряд сходится в какой-то области к функции $f(x)$, то эту функцию называют *производящей* для последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Например, из формулы $1 / (1 - x) = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$ вытекает, что функция $1/(1 - x)$ является производящей для последовательности чисел $1, 1, 1, \ldots, \ldots$. Для последовательности чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ производящей является функция $1/(1 - x)^2$.

Остановимся на производящих функциях для последовательностей $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, так или иначе связанных с комбинаторными задачами. С помощью этих функций удается получать самые разные свойства приведенных последовательностей. Кроме того, рассмотрим, как связаны производящие функции с решением рекуррентных соотношений.

6.2. Вывод формулы бинома Ньютона

Получим производящую функцию для конечной последовательности чисел $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$. Из начальной алгебры известно:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{x})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ax} + \mathbf{x}^2;$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{x})^3 = \mathbf{a}^3 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{x} + 3\mathbf{ax}^2 + \mathbf{x}^3.$$

Данные равенства являются частными случаями более общей формулы, дающей разложение для $(\mathbf{a} + \mathbf{x})^\mathbf{n}$.

Запишем в виде

$$(\mathbf{a} + \mathbf{x})^\mathbf{n} = \underbrace{(\mathbf{a} + \mathbf{x})(\mathbf{a} + \mathbf{x})\ldots(\mathbf{a} + \mathbf{x})}_{\mathbf{n}\ \text{раз}}. \qquad (6.1)$$

Раскроем скобки в правой части этого равенства, причем будем записывать все множители в том порядке, в котором они нам встретятся. Например, $(\mathbf{a} + \mathbf{x})^2$ запишем в виде

$$(\mathbf{a} + \mathbf{x})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{x})\,(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \mathbf{aa} + \mathbf{ax} + \mathbf{xa} + \mathbf{xx}, \qquad (6.2)$$

а $(\mathbf{a} + \mathbf{x})^3$ – в виде

$$\begin{gathered}(\mathbf{a} + \mathbf{x})^3 = (\mathbf{a} + \mathbf{x})(\mathbf{a} + \mathbf{x})(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \\ = \mathbf{aaa} + \mathbf{aax} + \mathbf{axa} + \mathbf{axx} + \mathbf{xaa} + \mathbf{xax} + \mathbf{xxa} + \mathbf{xxx}.\end{gathered} \qquad (6.3)$$

Видно, что в формулу (6.2) входят все размещения с повторениями из букв $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$ по две буквы в каждом размещении, а в формулу (6.3) – размещения с повторениями тех же букв, но состоящие из трех букв каждое. То же самое будет и в общем случае – после раскрытия скобок в формуле (6.1) получатся *всевозможные размещения с повторениями* букв $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$, состоящие из $\mathbf{n}$ элементов.

Теперь приведем подобные члены. Это члены, содержащие одинаковое количество букв $\mathbf{x}$ (в этом случае и букв $\mathbf{a}$ в них будет поровну). Найдем, сколько будет членов, в которые входит $\mathbf{k}$ букв $\mathbf{x}$ и, следовательно, $\mathbf{n} - \mathbf{k}$ букв $\mathbf{a}$. Эти члены являются перестановками с повторениями, составленными из $\mathbf{k}$ букв $\mathbf{x}$ и $\mathbf{n} - \mathbf{k}$ букв $\mathbf{a}$. По формуле перестановки с повторениями [2] их число равно

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \mathbf{n} - \mathbf{k}) = \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k} = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!(\mathbf{n} - \mathbf{k})!}.$$

Отсюда получается, что после приведения подобных членов выражение $\mathbf{x}^\mathbf{k}\,\mathbf{a}^{\mathbf{n} - \mathbf{k}}$ войдет в выражение с коэффициентом

$$\mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k} = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{k}!(\mathbf{n} - \mathbf{k})!}.$$

Таким образом, показано, что

$$(\mathbf{a} + \mathbf{x})^\mathbf{n} = \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{0}\,\mathbf{a}^\mathbf{n} + \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{1}\,\mathbf{a}^{\mathbf{n} - \mathbf{1}}\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k}\,\mathbf{a}^{\mathbf{n} - \mathbf{k}}\,\mathbf{x}^\mathbf{k} + \ldots + \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{n}\,\mathbf{x}^\mathbf{n}. \qquad (6.4)$$

Равенство (6.4) принято называть формулой бинома Ньютона. Если положить в этом равенстве $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, то получим

$$(\mathbf{1} + \mathbf{x})^\mathbf{n} = \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{0} + \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{1}\,\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k}\,\mathbf{x}^\mathbf{k} + \ldots + \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{n}\,\mathbf{x}^\mathbf{n}. \qquad (6.5)$$

Видно, что $(\mathbf{1} + \mathbf{x})^\mathbf{n}$ является производящей функцией для чисел $\mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k}, \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$. С помощью этой производящей функции можно сравнительно просто доказать многие свойства чисел $\mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k}$.

6.3. Свойства биномиальных коэффициентов

Докажем, что

$$\mathbf{C}_{\mathbf{n}+\mathbf{1}}^\mathbf{k} = \mathbf{C}_\mathbf{n}^\mathbf{k} + \mathbf{C}_\mathbf{n}^{\mathbf{k}-\mathbf{1}}. \qquad (6.6)$$

Для этого достаточно умножить обе части равенства (6.5) на $\mathbf{1 + \boldsymbol{x}}$. Получим, что

$$(1 + x)^{n+1} = (C_n^0 + C_n^1 x + \ \dots\ + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n)(1 + x).$$

Выражение в левой части данного равенства снова разложим по биному Ньютона. Придется только заменить в формуле бинома $\mathbf{n}$ на $\mathbf{n + 1}$. Таким образом, коэффициентом при x^k будет C_{n+1}^k. В правой части при раскрытии скобок член, содержащий x^k, появится дважды: при умножении C_{n+1}^k на 1 и при умножении $C_n^{k-\check{E}} x^{k-1}$ на $\mathbf{x}$. Поэтому коэффициент при x^k в правой части равенства имеет вид $C_n^k + C_n^{k-1}$.

Слева и справа должен стоять один и тот же многочлен, так что коэффициенты при x^k слева и справа должны быть одинаковыми. Это доказывает, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

С помощью формулы (6.5) получим выражение

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ \dots\ + C_n^k + \ \dots + C_n^n. \qquad (6.7)$$

Если положить в этом равенстве $\boldsymbol{x} = -1$, то получим, что

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ \dots\ + (-1)^k C_n^k + \ \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Иными словами, сумма значений C_n^k с четными $\mathbf{k}$ равна сумме значений с нечетными $\mathbf{k}$:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ \dots\ + C_n^{2m} + \ \dots = C_n^1 + C_n^3 + \ \dots\ + C_n^{2m+1} + \dots \qquad (6.8)$$

Обе суммы конечны и обрываются, когда $\mathbf{2m}$ и, соответственно, $\mathbf{2m + 1}$ становятся больше $\mathbf{n}$. Любопытный результат получится, если положить в равенстве (6.5) $\mathbf{x = i,\ n = 4m}$. Простой подсчет показывает, что $\mathbf{(1 + i)^4 = -4}$. Поэтому $\mathbf{(1 + i)^{4m} = (-4)^4}$. Получаем, таким образом, равенство

$$(-\ 4)^m = C_{4m}^0 + C_{4m}^1 i + C_{4m}^2 i^2 + C_{4m}^3 i^3 + \ C_{4m}^4 i^4 + \dots + C_{\%m}^{4m} i^{4m} =$$

$$= C_{4m}^0 + C_{4m}^1 i - C_{4m}^2 - C_{4m}^3 i + \ C_{4m}^4 + \dots + C_{4m}^{4m}.$$

Отделяя в данном равенстве действительную и мнимые части, приходим к тождествам:

$$C_{4m}^1 - C_{4m}^3 + \ C_{4m}^5 - \dots - C_{4m}^{4m-1} = 0; \qquad (6.9)$$

$$C_{4m}^0 - C_{4m}^2 + \ C_{4m}^4 + \dots + C_{4m}^{4m} = (-4)^m. \qquad (6.10)$$

Решите задачу о том, какие тождества получатся, если

$$n = 4m + 1,\ \ 4m + 2,\ \ 4m + 3.$$

Легко доказать с помощью производящей функции равенство

$$C_{n+m}^s = C_n^0 C_m^s + C_n^1 C_m^s + \ \dots + C_n^k C_m^{s-k} + \dots + C_n^n C_m^{s-n}. \qquad (6.11)$$

При $s - k < 0$ здесь положено $C_m^{s-k} = 0$, поэтому на самом деле $\mathbf{s}$ меняется от 0 до наименьшего из чисел $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Для доказательства надо взять разложения

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ \dots\ + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n$$

и

$$(1 + x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + \ \dots\ + C_m^s x^s + \dots + C_m^m x^m$$

и перемножить левые и правые части этих равенств. Получим, что

$$(1 + x)^{n+m} = [C_n^0 + C_n^1 x + \ \dots + C_n^k x^k + \ \dots\ + C_n^n x^n] \times$$

$$\times [C_m^0 + C_m^1 x + \ \dots + C_m^s x^s + \ \dots + C_m^m x^m].$$

Теперь применим к левой части формулу бинома Ньютона (для показателя $\mathbf{n + m}$), а в правой части раскроем скобки. Если сравнить коэффициенты при x^s слева и справа, то получим равенство (6.11). Его частным случаем является равенство

$$\mathbf{C_{2n}^{n} = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.} \qquad (6.12)$$

6.4. Полиномиальная формула

Применяя формулу бинома Ньютона, можно разложить и более сложные выражения:

$$\mathbf{(x+y+z)^4 = [(x+y)+z]^4 = (x+y)^4 + C_4^1(x+y)^3z +}$$
$$\mathbf{+ C_4^2(x+y)^2z^2 + C_4^3(x+y)z^3 + C_4^4z^4.}$$

Разложим теперь $\mathbf{(x + y)^4}$, $\mathbf{(x + y)^3}$, $\mathbf{(x + y)^2}$ снова по формуле бинома Ньютона. Получим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{(x + y + z)^4} &\mathbf{= x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4x^3z + 4xy^3 + 4y^3z + 4xz^3 +} \\ &\mathbf{+ 4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 +} \\ &\mathbf{+ 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2.}\end{aligned} \qquad (6.13)$$

Однако такой способ слишком сложен. С его помощью трудно сразу ответить на вопрос, с каким коэффициентом входит в разложение $\mathbf{(x + y + z)^9}$ член $\mathbf{x^2y^4z^5}$. Желательно вывести формулу, сразу дающую разложение для выражения

$$\mathbf{(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n.} \qquad (6.14)$$

При доказательстве формулы бинома Ньютона в разложении $\mathbf{(a + x)^n}$ член $\mathbf{x^ka^{n-k}}$ входит с коэффициентом $\mathbf{P(k, n - k)}$. Можно предположить, что в разложении $\mathbf{(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n}$ коэффициентом при $\mathbf{x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_m^{k_m}}$ будет $\mathbf{P(k_1, k_2, \ldots, k_m)}$. Перейдем к доказательству.

В самом деле, запишем $\mathbf{(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n}$ в виде произведения $\mathbf{n}$ сомножителей и раскроем скобки, выписывая все сомножители в порядке их появления. Очевидно, что при этом получатся всевозможные размещения с повторениями, составленные из букв $\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}$, такие, что в каждое размещение входит $\mathbf{n}$ букв. Однако некоторые из этих размещений дадут подобные члены. Так будет, если в первое размещение каждая буква входит столько же раз, сколько и во второе. Таким образом, чтобы найти коэффициент при $\mathbf{x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots x_m^{k_m}}$, надо сосчитать, сколько размещений с повторениями содержат $\mathbf{k_1}$ раз букву $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{k_2}$ раз букву $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{k_m}$ раз букву $\mathbf{x_m}$. Ясно, что каждое такое размещение является перестановкой с повторениями из $\mathbf{k_1}$ букв $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{k_2}$ букв $\mathbf{x_2}$ ..., $\mathbf{k_m}$ букв $\mathbf{x_m}$. Число таких перестановок мы обозначали $\mathbf{P(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)}$. Действительно, коэффициентом при $\mathbf{x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots x_m^{k_m}}$ в разложении выражения (6.14) служит $\mathbf{P(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)}$, где $\mathbf{k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n}$, так как в каждый член разложения входит по одному элементу из каждой скобки, а общее число перемножаемых скобок равно $\mathbf{n}$. Доказанную формулу можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \ldots + \mathbf{x_m})^{\mathbf{n}} = \sum \mathbf{P}(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_m})\, \mathbf{x_1^{k_1}}, \mathbf{x_2^{k_2}}, \ldots, \mathbf{x_m^{k_m}}, \qquad (6.15)$$

где сумма распространена на всевозможные разбиения $\mathbf{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}$ числа $\mathbf{n}$ на $\mathbf{m}$ целых неотрицательных слагаемых. Напомним, что

$$\mathbf{P(k_1 + k_2 + \ldots + k_m) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_m)! / (k_1!\, k_2! \ldots k_m!)}.$$

Ясно, что если числа $\mathbf{s_1, \ldots, s_m}$ получаются из чисел $\mathbf{k_1, \ldots, k_m}$ перестановкой, то $\mathbf{P(s_1, \ldots, s_m) = P(k_1, \ldots, k_m)}$. Поэтому, например, в разложении (6.13) коэффициенты при $\mathbf{x^2yz}$ и $\mathbf{xyz^2}$ одинаковы.

Указанное замечание облегчает выписывание членов разложения (6.14). Достаточно найти коэффициенты для таких разбиений $\mathbf{n = k_1, k_2, \ldots, k_m}$ что $\mathbf{k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m}$, а потом переставлять показатели всеми возможными способами.

Например, вычислим $\mathbf{(x + y + z)^5}$. Если не учитывать порядок слагаемых, то число 5 можно разбить на 3 слагаемых пятью способами:

$$5 = 5 + 0 + 0; \qquad 5 = 4 + 1 + 0; \qquad 5 = 3 + 2 + 0;$$
$$5 = 3 + 1 + 1; \qquad 5 = 2 + 2 + 1.$$

Однако $\mathbf{P(5, 0, 0) = 1}$, $\mathbf{P(4, 1, 0) = 5}$, $\mathbf{P(3, 2, 0) = 10}$, $\mathbf{P(3, 1, 1) = 20}$, $\mathbf{P(2, 2, 1) = 30}$. Поэтому

$$\begin{gathered}\mathbf{(x + y + z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5x^4y + 5xy^4 + 5x^4z + 5xz^4 + 5y^4z +}\\ \mathbf{+ 5yz^4 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 10x^3z^2 + 10x^2z^3 + 10y^3z^2 +}\\ \mathbf{+ 10y^2z^3 + 20x^3yz + 20xy^3z + 20xyz^3 + 30x^2y^2z +}\\ \mathbf{+ 30x^2yz^2 + 30xy^2z^2}.\end{gathered}$$

Формула (6.15) позволяет легко доказать некоторые свойства чисел $\mathbf{P(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)}$.

Например, если положить в этой формуле $\mathbf{x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1}$, то получим, что

$$\mathbf{(m)^n = \sum P(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)}.$$

Здесь сумма распространена на все разбиения числа $\mathbf{n}$ на $\mathbf{m}$ неотрицательных целых слагаемых: $\mathbf{n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m}$ и порядок слагаемых учитывается. Далее, если умножить обе части равенства (6.15) на $\mathbf{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}$, применить к левой части аналогичное разложение, а в правой раскрыть скобки, то получим для $\mathbf{P(k_1, \ldots, k_m)}$ следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{gathered}\mathbf{P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = P(k_1 - 1, k_2, \ldots, k_m) + P(k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m) +}\\ \mathbf{+ \ldots + P(k_1, k_2, \ldots, k_m - 1)}.\end{gathered}$$

Если же перемножить обе части разложений

$$(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \ldots + \mathbf{x_m})^{\mathbf{n}} = \sum \mathbf{P}(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_m})\, \mathbf{x_1^{k_1}}, \mathbf{x_2^{k_2}}, \ldots, \mathbf{x_m^{k_m}}\ ;$$
$$(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \ldots + \mathbf{x_m})^{\mathbf{s}} = \sum \mathbf{P}(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}, \ldots, \mathbf{l_m})\, \mathbf{x_1^{l_1}}, \mathbf{x_2^{l_2}}, \ldots, \mathbf{x_m^{l_m}}$$

и сравнить коэффициенты в обеих частях при $\mathbf{x_1^{r_1}}, \mathbf{x_2^{r_2}}, \ldots, \mathbf{x_m^{r_m}}$, то получим тождество

$$\mathbf{P}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \ldots, \mathbf{r_m}) = \sum\nolimits_{\mathbf{k_p + l_p = r_p}} \mathbf{P}(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}, \ldots, \mathbf{k_m})\mathbf{P}(\mathbf{l_1}, \mathbf{l_2}, \ldots, \mathbf{l_m})\ .$$

Здесь в правой части суммирование распространено на все целые неотрицательные числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$; $l_1, l_2, \ldots, l_m$, такие, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = s$ и $k_1 + l_1 = r_1$, $k_2 + l_2 = r_2$, …, $k_m + l_m = r_m$.

7. Асимптотика

7.1. Общие определения

Лучше иметь точные решения, но не всегда удается их получить. В связи с этим часто приходится ограничиваться построением приближенного решения. Если есть сумма или рекуррентная последовательность, не представимая (насколько мы можем судить) в замкнутом виде, то желательно получить какую-нибудь информацию о ее поведении; принцип «все или ничего» в данном случае совсем неуместен. Даже если располагать ответом в замкнутом виде, информация все же может быть неполной, поскольку не всегда ясно, как сравнить ответ с другими формулами.

Так, вероятно, не существует замкнутого выражения для суммы

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k},$$

однако

$$S_n \sim 2\binom{3n}{n} \text{ при } n \to \infty.$$

Говорим, что сумма имеет асимптотику $2\binom{3n}{n}$. Еще лучше иметь более детальную информацию наподобие формулы

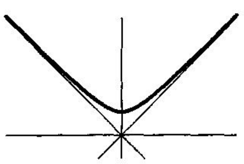
$$S_n = \binom{3n}{n}\left(2 - \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

дающей относительную ошибку порядка $1 / n^2$. Однако даже этого недостаточно, чтобы сказать, как велико S_n в сравнении с другими величинами. Что больше: S_n или число Фибоначчи F_{4n}? Ответ: имеем $S_2 = 22 > F_8 = 21$ при $n = 2$; но в конце концов F_{4n} становится больше, поскольку $F_{4n} \sim \varphi^{4n}/\sqrt{5}$ и $\varphi^4 \approx 6{,}8541$, тогда как

$$S_n = \sqrt{\frac{3}{pn}}(6.75)^n\left(1 - \frac{151}{72n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Цель заключается в том, чтобы научиться понимать и получать подобные результаты без чрезмерных сложностей.

Слово *асимптотика* имеет греческое происхождение и буквально означает «никогда не соединяющиеся». Изучая конические сечения, древнегреческие математики рассматривали, в частности, гиперболы, такие как график функции $y = \sqrt{1 + x^2}$, имеющий прямые $y = x$ и $y = -x$ своими асимптотами:



При $\mathbf{x}\to\infty$ кривая приближается к асимптотам, но никогда не соприкасается с ними. В наши дни слово «асимптотика» используется в более широком смысле – для обозначения любой приближенной величины, которая становится все более точной по мере приближения некоторого параметра к предельному значению. Для нас асимптотика означает «почти соединяющиеся».

Вывод некоторых асимптотических формул очень сложен и не укладывается в рамки настоящего учебного пособия. Мы остановимся лишь на вводных данных, полагая, что на этом базисе можно будет построить более сложные методы.

7.2. Иерархия асимптотики

Встречающиеся на практике функции от n имеют различную асимптотическую скорость роста; некоторые функции стремятся к бесконечности быстрее других. Мы формализуем это понятие с помощью определения

$$\mathbf{f(n)} \prec g(\mathbf{n}) \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{f(n)}}{\mathbf{g(n)}} = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

Введенное отношение транзитивно: если $\mathbf{f(n)} \prec \mathbf{g(n)}$ и $\mathbf{g(n)} \prec \mathbf{h(n)}$, то $\mathbf{f(n)} \prec \mathbf{h(n)}$. Можно также написать $\mathbf{g(n)} \succ \mathbf{f(n)}$, если $\mathbf{f(n)} \prec \mathbf{g(n)}$. Эти обозначения ввел в 1871 г. Поль Дюбуа-Реймон.

Например, $\mathbf{n} \prec \mathbf{n^2}$. Неформально мы говорим, что $\mathbf{n}$ растет медленнее, чем $\mathbf{n^2}$. В действительности

$$\mathbf{n}^{\alpha} < \mathbf{n}^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta \quad (7.2)$$

для произвольных вещественных $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Разумеется, существует много функций, кроме степеней $\mathbf{n}$. Отношение $\prec$ можно использовать, чтобы упорядочить множество функций. В этой цепочке встретятся, например, такие члены:

$$\mathbf{1} \prec \mathbf{\log\log n} \prec \mathbf{\log n} \prec \mathbf{n^e} \prec \mathbf{n^c} \prec \mathbf{n^{\log n}} \prec \mathbf{c^n} \prec \mathbf{n^n} \prec \mathbf{c^{c^n}}.$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{c}$ – произвольные константы, удовлетворяющие условию $\mathbf{0} < \boldsymbol{\varepsilon} < \mathbf{1} < \mathbf{c}$.

Все перечисленные выше функции, за исключением 1, стремятся к бесконечности при $\mathbf{n}$, стремящемся к бесконечности. Таким образом, пытаясь вставить в эту иерархию новую функцию, мы не будем стараться определить, стремится ли она к бесконечности; вместо этого нас будет интересовать, *как быстро* она стремится.

Из приведенной выше иерархии получаем $\mathbf{\log n} \prec \mathbf{n^{0,0001}}$; это может показаться неверным, если мы ограничимся совсем маленькими числами вроде одного гугола, $\mathbf{n = 10^{100}}$. Действительно, в этом случае $\mathbf{\log n = 100}$, тогда как $\mathbf{n^{0,0001}}$ есть всего лишь $\mathbf{10^{0,01} \approx 1,0233}$. Но если рассмотреть гуголплекс, $\mathbf{n = 10^{10^{100}}}$, то $\mathbf{\log n = 10^{100}}$ медленней стремится к бесконечности в сравнении с $\mathbf{n^{0,0001} = 10^{10^{96}}}$.

Даже если $\boldsymbol{\varepsilon}$ чрезвычайно мало (меньше, скажем, $\mathbf{1/10^{10^{100}}}$), величина **log n** будет значительно меньше, чем $\mathbf{n^{\varepsilon}}$, если только **n** достаточно велико. Действительно, если положить $\mathbf{n = 10^{10^{2k}}}$, где **k** выбрано так, чтобы $\boldsymbol{\varepsilon \geq 10^{-k}}$, то будем иметь $\mathbf{log\ n = 10^{2k}}$, но $\mathbf{n^{e} \geq 10^{10^{k}}}$. Таким образом, отношение **(log n) / $\mathbf{n^{\varepsilon}}$** стремится к нулю при $\mathbf{n \longrightarrow \infty}$.

Рассмотренная выше иерархия касается функций, стремящихся к бесконечности. Нередко, однако, представляют интерес функции, стремящиеся к нулю, так что необходимо иметь аналогичную иерархию и для таких функций. Построим ее, перейдя к обратным величинам, так как если **f(n)** и **g(n)** никогда не обращаются в нуль, то

$$\mathbf{f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow 1 / g(n) \prec 1 / f(n)}.$$

Так, все следующие функции (за исключением 1) стремятся к нулю:

$$\frac{1}{c^{c^{n}}} < \frac{1}{n^{n}} < \frac{1}{c^{n}} < \frac{1}{n^{\log n}} < \frac{1}{n^{c}} < \frac{1}{n^{e}} < \frac{1}{\log n} < \frac{1}{\log\log n} < \mathbf{1}.$$

Рассмотрим еще несколько функций и попробуем вставить их в иерархию. Число $\boldsymbol{\pi(n)}$ простых чисел, не превосходящих **n**, как известно, равно приблизительно **n / ln n**. Поскольку $\mathbf{1 / n^{\varepsilon} \prec 1 / ln\ n \prec 1}$, умножение на **n** дает

$$\mathbf{n^{1-\varepsilon} \prec \pi(n) \prec n}.$$

Соотношение (7.2) можно обобщить. Например:

$$\mathbf{n^{б_1}(\log n)^{б_2}(\log\log n)^{б_3} < n^{в_1}(\log n)^{в_2}(\log\log n)^{в_3} \Leftrightarrow (б_1, б_2, б_3) <}$$
$$\mathbf{< (в_1, в_2, в_3)}.$$

Здесь $\boldsymbol{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < (\beta_1, \beta_2, \beta_3)}$ означает лексикографический порядок (порядок слов в словарях); иначе говоря, это неравенство означает, что $\boldsymbol{\alpha_1 < \beta_1}$, или $\boldsymbol{\alpha_1 = \beta_1}$ и $\boldsymbol{\alpha_2 < \beta_2}$, или же $\boldsymbol{\alpha_1 = \beta_1}$ и $\boldsymbol{\alpha_2 = \beta_2}$ и $\boldsymbol{\alpha_3 < \beta_3}$.

Что можно сказать о функции $\mathbf{e^{\sqrt{\log n}}}$? Где ее место в иерархии? Ответы на эти вопросы можно получить с помощью правила

$$\mathbf{e^{f(n)} \prec e^{g(n)} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \big(f(n) - g(n)\big) = -\infty},$$

которое в два шага получается из определения (7.1) путем логарифмирования.

Следовательно,

$$\mathbf{1 \prec f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow e^{|f(n)|} \prec e^{|g(n)|}}.$$

Поскольку $\mathbf{1 \prec \log\log n \prec \sqrt{\log n} \prec \mathit{e}\log n}$, получаем

$$\mathbf{\log n \prec \varepsilon^{\log n} \prec n^{\varepsilon}}.$$

Если две функции **f(n)** и **g(n)** имеют один и тот же порядок роста, мы будем писать $\mathbf{f(n) \asymp g(n)}$. Официальное определение таково:

$$\mathbf{f(n) \asymp g(n) \Leftrightarrow |f(n)| \leq C|g(n)|} \text{ и } \mathbf{|g(n)| \leq C|f(n)|}$$

для некоторого **C** и всех достаточно больших **n**. Это имеет место, если, например, **f(n)** – константа, **ag(n) = cos n + arctg n**. Данное соотношение справедливо во всех случаях, когда **f(n)** и **g(n)** – многочлены одинаковых степеней. Существует также отношение, определяемое правилом

$$\mathbf{f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1}.$$

В таких случаях будем говорить, что **f(n)** есть асимптотика для **g(n)**.

Г.Х. Харди ввел важное понятие – класс логарифмически-экспоненциальных функций, определяемый рекурсивно как наименьшее семейство $\mathfrak{J}$-функций, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Постоянная функция $\mathbf{f(n) = \alpha}$ лежит в $\mathfrak{J}$ всех вещественных $\boldsymbol{\alpha}$.

2. Тождественная функция $\mathbf{f(n) = n}$ лежит в $\mathfrak{J}$.

3. Если **f(n)** и **g(n)** из $\mathfrak{J}$, то и $\mathbf{f(n) - g(n)}$ лежит в $\mathfrak{J}$.

4. Если **f(n)** из $\mathfrak{J}$, то $\mathbf{e^{f(n)}}$ лежит в $\mathfrak{J}$.

5. Если функция **f(n)** из $\mathfrak{J}$ является по существу положительной, то **ln f(n)** лежит в $\mathfrak{J}$.

Функция **f(n)** называется по существу положительной, если существует число $\mathbf{n_0}$, такое, что $\mathbf{f(n) > 0}$ для всех $\mathbf{n \geq n_0}$.

Используя эти правила, можно, например, показать, что $\mathbf{f(n) + g(n)}$ лежит в $\mathfrak{J}$, если **f(n)** и **g(n)** находятся там же. Действительно,

$$\mathbf{f(n) + g(n) = f(n) - (0 - g(n))}.$$

Если **f(n)** и **g(n)** по существу положительные элементы $\mathfrak{J}$, то их произведение $\mathbf{f(n){\cdot}g(n) = e^{\ln f(n) + \ln g(n)}}$ и частное $\mathbf{f(n) / g(n) = e^{\ln f(n) + \ln g(n)}}$ также лежат в $\mathfrak{J}$; то же верно для функций вроде $\sqrt{\mathbf{f(n)}} = \mathbf{e^{\frac{1}{2}\ln f(n)}}$ и т.д. Харди доказал, что всякая логарифмически-экспоненциальная функция является по существу положительной, по существу отрицательной или тождественно равна нулю. Следовательно, произведение и частное любых двух $\mathfrak{J}$-функций лежат в $\mathfrak{J}$, за исключением случая деления на тождественно нулевую функцию.

Главная теорема Харди о логарифмически-экспоненциальных функциях заключается в том, что эти функции образуют асимптотическую иерархию: если **f(n)** и **g(n)** – любые функции из $\mathfrak{J}$, то либо $\mathbf{f(n) \prec g(n)}$, либо $\mathbf{f(n) \succ g(n)}$, либо $\mathbf{f(n) \asymp g(n)}$. В последнем случае найдется константа α, такая, что

$$\mathbf{f(n) \sim \alpha\, g(n)}.$$

Доказательство теоремы Харди выходит за рамки настоящего пособия, однако необходимо знать о существовании этой теоремы, поскольку почти все функции, с которыми приходится взаимодействовать, лежат в $\mathfrak{J}$. На практике в большинстве случаев можно без особого труда вставить данную функцию в данную иерархию.

7.3. Числа Бернулли

Якоб Бернулли (1655–1705), подбирая формулы для сумм **m**-х степеней натуральных чисел, обнаружил в них любопытные закономерности. Положим

$$\mathbf{S_m(n) = 0^m + 1^m + \ \dots\ + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_0^n x^m дx}.$$

Рассматривая следующий ряд формул, Бернулли уловил в них некую закономерность:

$$\mathbf{S_0(n) = n};$$
$$\mathbf{S_1(n) = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n};$$
$$\mathbf{S_2(n) = \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n};$$
$$\mathbf{S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2},$$
$$\mathbf{S_4(n) = \tfrac{1}{5}n^5 - \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n};$$
$$\mathbf{S_5(n) = \tfrac{1}{6}n^6 - \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2},$$
$$\mathbf{S_6(n) = \tfrac{1}{7}n^7 - \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n};$$
$$\mathbf{S_7(n) = \tfrac{1}{8}n^8 - \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2};$$
$$\mathbf{S_8(n) = \tfrac{1}{9}n^9 - \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n};$$

$$\mathbf{S_9(n) = \tfrac{1}{10}n^{10} - \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2};$$
$$\mathbf{S_{10}(n) = \tfrac{1}{11}n^{11} - \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n}.$$

В формуле для $\mathbf{S_m(n)}$ коэффициент при $\mathbf{n^{(m+1)}}$ всегда равен $\mathbf{1/(m + 1)}$. Коэффициент при $\mathbf{n^m}$ всегда равен $\mathbf{-1/2}$. Коэффициент при $\mathbf{n^{m-1}}$ всегда равен $\mathbf{m / 12}$. Коэффициент при $\mathbf{n^{m-2}}$ равен нулю. Коэффициент при $\mathbf{n^{m-3}}$ всегда равен $\mathbf{-m(m-1)(m-2) / 720}$. Коэффициент при $\mathbf{n^{m-4}}$ всегда равен нулю. Если эту закономерность продолжить, то коэффициент при $\mathbf{n^{m-k}}$ всегда будет иметь вид некоторой константы, умноженной на $\mathbf{m^k}$. Именно это и обнаружил Бернулли (он не оставил доказательства).

В современных обозначениях его формула записывается в виде

$$\mathbf{S_m(n) = \tfrac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + \binom{m+1}{1} B_1 n^m + \ \dots\ + \binom{m+1}{m} B_m n\right) =}$$
$$\mathbf{= \tfrac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}}.$$

Коэффициенты при степенях $\mathbf{n}$ – числа Бернулли – определяются неявным рекуррентным соотношением

$$\mathbf{\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = [m = 0]} \text{ при любом } \mathbf{m \geq 0}.$$

Так, $\mathbf{\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0}$. Несколько первых этих величин оказываются такими:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{B_n}$	1	–1/2	1/6	0	–1/30	0	1/42	0	–1/30	0	5/66	0	–691/2730

7.4. Формула суммирования Эйлера

Обратимся к общему методу аппроксимации сумм, который был впервые опубликован Леонардом Эйлером в 1732 г. (Идею иногда связывают с именем Колина Мак-Лорена, профессора математики в Эдинбурге, открывшего этот метод чуть позднее.)

Основная формула выглядит следующим образом:

$$\sum_{a \le k \le b} \mathbf{f}(\mathbf{k}) = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} \mathbf{f}^{(k-1)}(\mathbf{x})\Big|_a^b + \mathbf{R_m}, \qquad (7.3)$$

где $\mathbf{R_m} \approx (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} \mathbf{f}^{(m)}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$, целые $\mathbf{a \le b}$; $\mathbf{m \ge 1}$.

Слева находится типичная сумма, оценка которой может понадобиться. В правой части – другое выражение для той же суммы, включающее интегралы и производные. Если **f(x)** – достаточно «гладкая» функция, то она будет иметь производные $\mathbf{f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)}$ и эта формула окажется тождеством. Выражение в правой части зачастую оказывается превосходной аппроксимацией суммы в левой части (в том смысле, что остаток $\mathbf{R_m}$ мал). Так, например, мы увидим, что аппроксимация Стирлинга для **n!** есть следствие формулы суммирования Эйлера; то же справедливо для асимптотической аппроксимации для гармонических чисел $\mathbf{H_n}$.

Числа $\mathbf{B_k}$ в формуле (7.3) – это числа Бернулли, уже появлявшиеся в разделе 6; функция $\mathbf{B_m}(\{\mathbf{x}\}) = \sum_k \binom{m}{k} \mathbf{B_k} \cdot \mathbf{x}^{m-k}$ – многочлен Бернулли. Запись $\{\mathbf{x}\}$ обозначает дробную часть, $\mathbf{x} - \lfloor \mathbf{x} \rfloor$. Формула суммирования Эйлера сводит все эти понятия вместе.

Вспомним значения нескольких первых чисел Бернулли:

$$\mathbf{B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_6 = 1/42, B_8 = -1/30,}$$
$$\mathbf{B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = B_{11} = \ldots = 0}.$$

Якоб Бернулли открыл данные числа, когда изучал суммы степеней целых чисел, и формула Эйлера объясняет закономерность этих чисел: если мы положим $\mathbf{f(x) = x^{m-1}}$, то будем иметь $\mathbf{f^{(m)}(x) = 0}$; следовательно, $\mathbf{R_m} = 0$ и формула (7.3) сведется к

$$\sum_{a \le k \le b} k^{m-1} = \frac{x^m}{m}\Big|_a^b + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} (m-1)^{\underline{(k-1)}} x^{m-k}\Big|_a^b =$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k \cdot (b^{m-k} - a^{m-k}).$$

Так, для **m = 3** получим пример подсчета суммы:

$$\sum_{0 \le k \le n} k^2 = \frac{1}{3}\left(\binom{3}{0} B_0 n^3 + \binom{3}{1} B_1 n^2 + \binom{3}{2} B_2 n\right) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

В математике определен разностный оператор Δ и объяснено, что оператор $\sum$ – обратный к Δ, точно так же, как $\int$ является обратным к оператору дифференцирования **D**. Можно выразить Δ через **D**, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$\mathbf{f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x) / 1!\ \varepsilon + f''(x) / 2!\ \varepsilon^2 + \ldots}$$

Подстановка $\boldsymbol{\varepsilon - 1}$ дает

$$\mathbf{\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x) = f'(x)/1! + f''(x)/2! + (f'''(x)/! + \ldots =}$$

$$= (\mathbf{D}/1! + \mathbf{D}^2/2! + \mathbf{D}^3/3! + \dots)\, \mathbf{f(x)} \approx (\mathbf{e^D} - 1)\, \mathbf{f(x)}.$$

Здесь $\mathbf{e^D}$ обозначает дифференциальный оператор

$$\mathbf{D}/1! + \mathbf{D}^2/2! + \mathbf{D}^3/3! + \dots$$

Поскольку $\Delta = (\mathbf{e^D} - 1)$, обратный оператор $\sum = 1/\Delta$ должен выражаться как $1/(\mathbf{e^D} - 1)$; кроме того, известно, что

$$\mathbf{z}/(\mathbf{e^z} - 1) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} \mathbf{B^k z^k}/\mathbf{k}! -$$

степенной ряд, включающий числа Бернулли.

Таким образом,

$$\sum = \frac{\mathbf{B_0}}{\mathbf{D}} + \frac{\mathbf{B_1}}{1!} + \frac{\mathbf{B_2}}{2!}\mathbf{D} + \frac{\mathbf{B_3}}{3!}\mathbf{D}^2 + \ \dots = \int + \sum_{\mathbf{k} \geq 1} \frac{\mathbf{B_k}}{\mathbf{k}!}\mathbf{D}^{\mathbf{k}-1}.$$

Применив это операторное уравнение к $f(x)$ и добавив пределы, получим

$$\sum_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} + \sum_{\mathbf{k} \geq 1} \frac{\mathbf{B_k}}{\mathbf{k}!} \mathbf{f}^{(\mathbf{k}-1)}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}},$$

а это в точности формула суммирования Эйлера (7.3) без остаточного члена. Ни Эйлер, ни кто-либо другой не рассматривали остаток до тех пор, пока С.Д. Пуассон не опубликовал в 1823 г. работу о приближенном интегрировании. Остаточный член играет важную роль, поскольку бесконечная сумма $\sum_{\mathbf{k} \geq 1} \frac{\mathbf{B_k}}{\mathbf{k}!} \mathbf{f}^{(\mathbf{k}-1)}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ часто оказывается расходящейся.

7.5. Пример вычисления суммы

Рассмотрим применение формулы Эйлера к «телескопической» сумме

$$\mathbf{S_n} = \sum_{1 \leq \mathbf{k} < n} \frac{1}{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)} = \sum_{1 \leq \mathbf{k} < n} \left(\frac{1}{\mathbf{k}} - \frac{1}{\mathbf{k}+1}\right) = 1 - \frac{1}{\mathbf{n}}.$$

Для начала можно разложить функцию $\mathbf{f(x) = 1/(x(x + 1))}$ на простейшие дроби, $\mathbf{f(x) = 1/x - 1/(x + 1)}$, так как это упрощает интегрирование и дифференцирование.

Имеем

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\mathbf{x}^2} + \frac{1}{(\mathbf{x}+1)^2} \quad \text{и} \quad \mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \frac{2}{\mathbf{x}^3} - \frac{2}{(\mathbf{x}+1)^3};$$

в общем случае

$$\mathbf{f}^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}) = (-1)^{\mathbf{k}}\mathbf{k}! \left(\frac{1}{\mathbf{x}^{\mathbf{k}+1}} - \frac{1}{(\mathbf{x}+1)^{\mathbf{k}+1}}\right) \text{ для } \mathbf{k} \geq 0.$$

Далее

$$\int_1^{\mathbf{n}} \mathbf{f(x)dx} = \ln \mathbf{x} - \ln(\mathbf{x}+1) \Big|_1^{\mathbf{n}} = \ln \frac{2\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1}.$$

Подставляя эти выражения в формулу суммирования (7.3), получаем

$$\mathbf{S_n} = \ln \frac{2\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} - \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{m}} (-1)^{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{B_k}}{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\mathbf{n}^{\mathbf{k}}} - \frac{1}{(\mathbf{n}+1)^{\mathbf{k}}} - 1 + \frac{1}{2^{\mathbf{k}}}\right) + \mathbf{R_m}(\mathbf{n}),$$

где $\mathbf{R_m}(\mathbf{n}) = -\int_1^{\mathbf{n}} \mathbf{B_m}(\{\mathbf{x}\}) \left(\frac{1}{\mathbf{x}^{\mathbf{m}+1}} - \frac{1}{(\mathbf{x}+1)^{\mathbf{m}+1}}\right) \mathbf{dx}$.

Например, для $\mathbf{m} = 4$ правая часть равна

$$\ln \frac{2\mathbf{n}}{\mathbf{n}+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathbf{n}} - \frac{1}{\mathbf{n}+1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\mathbf{n}^2} - \frac{1}{(\mathbf{n}+1)^2} - \frac{3}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{120}\left(\frac{1}{\mathbf{n}^4} - \frac{1}{(\mathbf{n}+1)^4} - \frac{15}{16}\right) + \mathbf{R_4}(\mathbf{n}).$$

Это не похоже на правильный ответ $\mathbf{1 - n^{-1}}$. Распишем слагаемые правой части через отрицательные степени $\mathbf{n}$ до, например, $\mathbf{O(n^{-5})}$:

$$\ln\frac{n}{n+1} = -n^{-1} + \frac{1}{2}n^{-2} - \frac{1}{3}n^{-3} + \frac{1}{4}n^{-4} + O(n^{-5}),$$

$$\frac{1}{n+1} = n^{-1} - n^{-2} + n^{-3} - n^{-4} + O(n^{-5}),$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} = - n^{-2} - 2n^{-3} + 3n^{-4} + O(n^{-5}),$$

$$\frac{1}{(n+1)^4} = - n^{-4} + O(n^{-5}).$$

Следовательно, сумма членов в правой части аппроксимации дает

$$\ln 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{128} + \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)n^{-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)n^{-2} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{12}\right)n^{-3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{12} + \frac{1}{120} - \frac{1}{120}\right)n^{-4} + R_4(n) =$$

$$= \ln 2 + \frac{39}{128} - n^{-1} + R_4(n) + O(n^{-5}).$$

Коэффициенты при $\mathbf{n^{-2}}$, $\mathbf{n^{-3}}$ и $\mathbf{n^{-4}}$ сократились.

Надо доказать, что $\mathbf{R_4(n)}$ асимптотически мало, в результате получим аппроксимацию суммы. Но доказать это, по всей видимости, невозможно, поскольку постоянное слагаемое равно 1, а не $\mathbf{\ln 2 + 39/128}$ (что есть примерно 0,9978). Таким образом, $\mathbf{R_4(n)}$ в действительности равно $\mathbf{89/128 - \ln 2 + O(n^{-4})}$.

Заметим, что постоянное слагаемое в аппроксимации следует схеме

$$\ln 2 - \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}B_2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}B_3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}B_4 - \frac{1}{5}\cdot\frac{31}{32}B_5 + \ldots$$

Возможно, этот ряд сходится к 1, когда число слагаемых становится бесконечным? Нет, числа Бернулли возрастают очень быстро. Например, $\mathbf{B_{22} = 854513/138 > 6192}$, следовательно, $\mathbf{|R_{22}(n)|}$ будет гораздо больше, чем $\mathbf{|R_4(n)|}$.

Ключевой момент заключается в том, чтобы заметить, что $\mathbf{R_4(n)}$ стремится к некоторому пределу при $\mathbf{n} \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} R_4(n) = -\int_1^\infty B_4(\{x\})\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\right)dx = R_4(\infty).$$

Интеграл $\int_1^\infty B_4(\{x\})f^{(m)}(x)dx$ будет существовать, если $\mathbf{f^{(m)}(x) = O(x^{-2})}$ при $\mathbf{x} \to \infty$, и это несомненно так для $\mathbf{f^{4}(x)}$. Далее имеем

$$R_4(n) = R_4(\infty) + \int_n^\infty B_4(\{x\})\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\right)dx = R_4(\infty) + O\left(\int_n^\infty x^{-6}dx\right) =$$

$$= R_4(\infty) + O(n^{-5}).$$

Итак, было доказано с помощью формулы Эйлера, что

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k(k+1)} = \ln 2 + \frac{39}{128} - n^{-1} + R_4(\infty) + O(n^{-5}) = C - n^{-1} + O(n^{-5})$$

для некоторой константы $\mathbf{C}$. Неизвестно, что это за константа (для ее нахождения нужны другие методы), однако формула суммирования Эйлера позволила установить, что константа существует.

Допустим, выбрали значительно большее значение $\mathbf{m}$. Тогда те же рассуждения покажут, что $\mathbf{R_m(n) = R_m(\infty) + O(n^{-m-1})}$, и можно прийти к формуле

$$\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k(k+1)} = C - n^{-1} + c_2 n^{-2} + c_3 n^{-3} + \ldots + c_m n^{-m} + O(n^{-m-1})$$

для каких-то констант c_2, c_3, … . В нашем случае все константы **c** оказываются нулевыми, тем не менее докажем это.

Член $\ln (n/(n + 1)$ вносит в c_m слагаемое $(-1)^m/m$, вклад члена $(-1)^{m+1} \cdot (B_m/m)\ n^{-m}$ в c_m составляет $(-1)^{m+1} \cdot (B_m/m)$, а вклад члена $(-1)^k \cdot (B_m/k)\ (n + 1)^{-k}$ равен $(-1)^m \binom{m-1}{k-1} (B_k/k)$. Следовательно,

$$(-1)^m c_m = \frac{1}{m} - \frac{B_m}{m} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} \frac{B_k}{k} = \frac{1}{m} - \frac{B_m}{m} + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} B_k =$$

$$= \frac{1}{m}(1 - B_m + B_m(1) - 1).$$

Очевидно, что это нуль для $m > 1$. Таким образом, доказано, что

$$\sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k(k+1)} = C - n^{-1} + O(n^{-m-1}) \text{ для всех } m \ge 1.$$

8. Основные комбинаторные конфигурации [3]

8.1. Правила суммы и произведения. Определения перестановок и сочетаний

В большей части доказательств в той или иной форме используется одно или сразу два нижеприведенных правила.

Правило суммы. Если объект **A** может быть выбран **m** способами, а объект **B** – другими **n** способами, то выбор «либо **A**, либо **B**» может быть осуществлен **m + n** способами.

Правило произведения. Если объект **A** может быть выбран **m** способами и после каждого из таких выборов объект **B** может быть выбран **n** способами, то выбор «**A** и **B**» в указанном порядке может быть осуществлен **m · n** способами.

Данные правила по своей природе являются определениями, и их скорее нужно понимать, чем доказывать.

Следует заметить, что в первом правиле выборы **A** и **B** являются взаимно исключающими, т.е. нет возможности выбрать оба объекта одновременно (одним и тем же путем).

Правило произведения наиболее часто используется в тех случаях, когда порядок выбора не является существенным, т.е. когда выборы **A** и **B** оказываются независимыми. Не следует, однако, игнорировать возможность наличия такой зависимости.

Дадим определения перестановок и сочетаний:

определение 1. **r**-перестановкой из **n** элементов называется упорядоченная выборка (либо расположение в определенном порядке) **r** из этих элементов;

определение 2. **r**-сочетанием из **n** элементов называется выборка **r** из них без учета порядка.

На основе данных определений отметим следующее. Во-первых, в каждом из них ничего не говорится о характере **n** элементов: все они могут быть одного вида; некоторые – одного, а остальные – иного вида; все различны.

Несмотря на то, что в более простых случаях настоящей теории предполагается, что все рассматриваемые элементы различны, самым общим является следующий случай: имеется **k** видов элементов, причем к виду **j** относятся $\mathbf{n_j}$ элементов, так что $\mathbf{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$. Множество чисел $\mathbf{(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$ называется *спецификацией* этих элементов.

В определении перестановок смысл термина «упорядоченный» означает, что две выборки рассматриваются как различные, если они состоят из одних и тех же элементов, но осуществлены в различном порядке. Можно считать, что все **r**-перестановки реализуются в два приема: сначала осуществляются выборы всевозможных множеств по **r** элементов в каждом (**r**-сочетания), а затем каждое из них упорядочивается всеми возможными способами. Например, двумя перестановками из трех различных элементов, обозначаемых цифрами 1, 2, 3, оказываются 12, 13, 23, 21, 31, 32. Первые три из них являются 2-сочетаниями из этих предметов.

8.2. r-перестановки

Используем рассмотренные выше правила и определения для проведения наиболее простых и полезных подсчетов.

8.2.1. Различные предметы (элементы)

Первый из членов **r**-перестановки из **n** различных предметов может быть выбран **n** способами, так как все **n** предметов различны по предположению. После этого выбор второго члена уже необходимо осуществить **n – 1** способами и так далее, т.е. вплоть до выбора **r**-го члена, который может быть проведен **n – r + 1** способами. Повторным применением правила произведения получим искомое число различных **r**-перестановок:

$$\mathbf{P(n, r) = n(n-1) \ldots (n-r+1), \quad n \geq r}. \tag{8.1}$$

При **r = n** получаем

$$\mathbf{P(n, n) = n(n-1) \ldots 1 = n!}, \tag{8.2}$$

т.е. число различных перестановок из **n** предметов равно произведению всех целых чисел от 1 до **n**, называемому **n-**факториалом и обозначаемому, как показано выше, через **n!** Символ **P(n, 0)**, не имеющий комбинаторного смысла, условимся считать равным единице**.**

Используя соотношение (8.2), можно переписать выражение (8.1) в следующем виде:

$$\mathbf{P(n, r) = n!/(n - r)! = P(n, n)/P(n - r, n - r)},$$

или (в сокращенном виде)

$$\mathbf{P(n, r) = (n)_r}.$$

Последнее выражение называется убывающим **r**-факториалом от **n**. Так как тот же символ используется в теории гипергеометрических функций для обозначения произведения **n(n + 1) … (n + r – 1)** в предыдущем определении, во избежание двусмысленности потребовалось использовать слово «убывающий».

Полученное выше соотношение

$$\mathbf{P(n, n) = P(n, r)\ P(n - r, n - r)}$$

вытекает также из правила произведения.

Интересно отметить следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathbf{P(n, r) = P(n - 1, r) + rP(n - 1, r - 1) = (n - 1)_r + r(n - 1)_{r - 1}}. \quad (8.3)$$

Данное соотношение можно получить из выражения (8.1) с помощью обычных алгебраических преобразований, положив в нем **n = n – r + r**; к нему же можно прийти в процессе классификации **r**-перестановок по наличию или отсутствию в них заданного элемента. Действительно, число перестановок, в которых фиксированный элемент отсутствует, составит **P(n – 1, r)**. Если же этот элемент входит в перестановку, то может занимать в ней одно из **r** положений. Поэтому он и может появляться в **P(n – 1, r – 1)** различных перестановках из **n – 1** отличных от него предметов.

Пример 1. Из четырех различных объектов, обозначенных цифрами 1, 2, 3 и 4, составляются следующие двенадцать 2-перестановок **(n = 4, r = 2):**

12	13	14	23	24	34
21	31	41	32	42	43.

8.2.2. Число перестановок из n объектов, из которых p принадлежат одному виду, q – другому и т.д.

Рассматриваются только перестановки из всех **n** элементов (взятых в совокупности), поэтому термин «перестановка» здесь не уточняется. Пусть **x** – искомое число перестановок. Допустим, что **p** одинаковых предметов заменено новыми **p** предметами, отличными как друг от друга, так и от других предметов, входящих в перестановку. Их можно переставить между собой (по соотношению (8.2)) **p!** способами. Следовательно, число перестановок из этих новых предметов составит **xp!**. Те же рассуждения справедливы для всякого иного набора одинаковых предметов. Так как в конечном счете все **n** предметов являются различными и число перестановок из них равно **n!**, то **xp!q!... = n!** Отсюда

$$\mathbf{x = n!/(p!\ q!...),\quad p + q... = n}. \quad (8.4)$$

Правая часть (8.4) является полиномиальным коэффициентом, т.е. коэффициентом в разложении выражения $\mathbf{(a + b + ...)^n}$. Этот коэффициент является также числом размещений **n** различных элементов по **p** различным ячейкам или ящикам, причем в первую помещается **p** элементов, во вторую – **q** и так далее, без учета порядка элементов в любой ячейке.

Пример 2. **n** различных книг, каждая из которых имеется в **m** экземплярах, может быть размещено на одной полке $\mathbf{(nm)!(m!)^n}$ способами.

В последней части данного раздела с помощью метода производящих функций будет решена более общая проблема определения числа **r**-перестановок из элементов общей спецификации (**p** элементов одной природы, **q** – другой и т.д.).

8.2.3. r-перестановки с неограниченными повторениями

Рассмотрим запас предметов **n** различных типов, в котором элементов каждого типа неограниченное число. Другими словами, любой элемент после извлечения его из запаса замещается в запасе другим, аналогичным ему. Следовательно, каждое место в **r**-перестановке может быть заполнено **n** различными путями, так как запас элементов после любого выбора остается неизменимым. Согласно правилу произведения, искомое число перестановок, а именно число **r**-перестановок с повторениями из **n** элементов, определяется выражением

$$\mathbf{U(n, r) = n'}. \qquad (8.5)$$

Пример 3. Число различных способов, которыми могут быть нанесены перфорации на **r**-позиционную ленту (используемую в телетайпе или вычислительной машине), составляет $\mathbf{2^r}$. В рассматриваемом примере любая из **r** позиций, составляющих каждую строку ленты, замещается одним из двух «элементов» – перфорацией или отсутствием ее.

В терминах статистики величина **U(n, r)** соответствует выбору с возвращением в противоположность величине **P(n, r)**, отвечающей выбору без возвращения.

8.3. Сочетания

8.3.1. r-сочетания из n различных элементов

Простейший метод рассуждений основан на том, что в каждом сочетании из **r** различных элементов последние были упорядочены **r!** способами, т. е. столькими способами, сколько существует **r**-перестановок; следовательно, если **C(n, r)** означает искомое число сочетаний, то

$$\mathbf{r!C(n, r) = P(n, r) = n(n-1) \ldots (n-r+1), \quad n \geq r,}$$

и

$$\mathbf{C(n, r) = (n(n-1) \ldots (n-r+1))/r! = n!/(r!(n-r)!)} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}}, \qquad (8.6)$$

где последний символ используется обычно для биномиальных коэффициентов, т.е. коэффициентов в разложении $\mathbf{(a+b)^n}$. ($\mathbf{C_r^n, C_{n'n}^r, C_r}$) и (**n**, **r**) – различные обозначения того же числа **C(n, r)**. Первые два из них трудны для печати, а индексы можно принять за показатели степени; левый индекс третьего обозначения иногда трудно отнести к той букве **C**, которую он определяет; написание буквы **C**, строго говоря, не является необходимым, ибо числа выражения (8.6) не обязательно во всех случаях связаны с сочетаниями; заметим, однако, что все указанные обозначения употребляются в печатных изданиях и вне их.

C(n, 0) – число сочетаний из **n** элементов по 0 – не имеет комбинаторного смысла. Тем не менее обычно уславливаются считать его равным единице. При $\mathbf{r < 0}$ или $\mathbf{r > n}$ (по определению) $\mathbf{C(n, r) = 0}$.

Величина **C(–n, r)** не имеет комбинаторного смысла, однако можно заметить, что из (8.6) следует:

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r};$$

$$\binom{-n}{r} = (-1)^{n+r}\binom{r-1}{n-1}.$$

Пример 4. Из четырех различных объектов (обозначаемых 1, 2, 3, 4) можно составить следующие сочетания по два (**n = 4, r = 2**):

12, 13, 14, 23, 24, 34.

С помощью рекуррентных соотношений число сочетаний (8.6) можно получить несколько иным путем. Сочетания (8.6) можно разбить на два типа: сочетания, содержащие данный элемент (например, первый), и сочетания, его не содержащие. Число сочетаний первого типа равно **C(n – 1, r – 1)**, так как фиксация одного элемента в сочетании уменьшает на единицу как число **n**, так и число **r**; число сочетаний второго типа по тем же соображениям равно **C(n – 1, r)**. Следовательно,

$$\mathbf{C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r), \quad n \geq r.} \qquad (8.7)$$

Методом математической индукции можно показать, что выражение (8.6) является единственным решением соотношения (8.7), удовлетворяющим граничным условиям:

$$\mathbf{C(n, 0) = C(1, 1) = 1; \quad C(1, 2) = C(1, 3) = \ldots = 0.}$$

Соотношение (8.7) является важной формулой, так как оно служит основным рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов. Заметим, что путем итерации можно получить

$$\begin{aligned}\mathbf{C(n, r)} &= \mathbf{C(n-1, r-1) + C(n-2, r-1) + \ldots + C(r-1, r-1)} = \\ &= \mathbf{C(n-1, r) + C(n-2, r-1) + \ldots + C(n-1-r, 0).}\end{aligned} \qquad (8.8)$$

Первая строка классифицирует **r**-сочетания из **n** пронумерованных элементов по элементу с наименьшим номером, т.е. **C(n – k, r – 1)** является числом **r**-сочетаний, в которых наименьший из номеров элементов равен **k**. Вторая из строк выражения (8.8) не поддается такому же простому комбинаторному толкованию.

Ниже приведена небольшая таблица, позволяющая находить числовые значения величины **C(n, r)** и являющаяся разновидностью треугольника Паскаля. Следует обратить внимание на то, как просто заполняется каждая строка таблицы с помощью предыдущей строки и выражения (8.7). Отметим также, что **C(n, r) = C(n, n – r)**. Это соотношение непосредственно следует из (8.6), а также с очевидностью вытекает из того, что выбор **r** предметов из общего числа **n** определяет оставшиеся **n – r** предметов.

Числа **C(n, r)** (биномиальные коэффициенты):

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

8.3.2. Сочетания с повторениями

Теперь искомым является число **r**-сочетаний из **n** различных предметов, каждый из которых может появляться неопределенно часто от 0 до **r** раз. Это число является функцией **f(n, r)** от **n** и **r**.

Кажется, что наиболее естественным для определения числа сочетаний с повторениями является использование рекуррентных формул и правила суммы. Предположим, что предметы перенумерованы числами от 1 до **n**. Тогда каждое сочетание содержит либо не содержит 1. Если в сочетание входит предмет 1, то он может встретиться в сочетании 1, 2, и так далее вплоть до **r** раз. Однако во всех случаях при уменьшении допустимого числа появлений элемента 1 на единицу получаем **f(n, r – 1)** допустимых сочетаний. Сочетаний, не содержащих элемента 1, будет **f(n – 1, r)**. Следовательно,

$$\mathbf{f(n, r) = f(n, r - 1) + f(n - 1, r)}. \qquad (8.9)$$

Если **r = 1**, то никакие повторения элементов невозможны и **f(n, 1) = n** (заметим: соотношение (8.9) определяет число **f(n, 0) = = f(n, 1) – f(n – 1, 1)** равным единице, что является естественным условием). Если **n = 1**, то при любом значении **r** возможно лишь одно сочетание, поэтому **f(1, r) = 1**. Далее

$$\mathbf{f(n, 2) = f(n, 1) + f(n - 1, 2) = f(n, 1) + f(n - 1, 1) + f(n - 2, 2)}.$$

Если теперь повторно использовать это соотношение до появления числа **f(1, 2)**, равного единице, то по формуле суммы арифметической прогрессии или на основе первого из соотношений (8.8) получаем

$$\mathbf{f(n, 2) = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 1 = (n + 1)\, n/2} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}.$$

Аналогично с помощью первого из соотношений (8.8) получаем

$$\mathbf{f(n, 3) = f(n, 2) + f(n - 1, 2) + ... + f(1, 3)} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} + \ldots + 1 = \binom{\mathbf{n+2}}{\mathbf{3}}.$$

Теперь понятен общий ответ: число **r**-сочетаний с повторениями из **n** различных элементов равно

$$\mathbf{f(n, r)} = \binom{\mathbf{n + r - 1}}{\mathbf{r}}. \tag{8.10}$$

При этом можно без труда проверить, что соотношение (8.10) удовлетворяет (8.9) и его граничным условиям: $\mathbf{f(n, 1) = n, f(1, r) = 1}$.

Пример 5. Число сочетаний с повторениями по 2 из 4 элементов через 1, 2, 3, 4, равно 10, разбив их согласно соотношению (8.9), получим

11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44.

Результат (8.10) настолько же прост, насколько просты его доказательства. Лучшее из них, которое можно считать восходящим к Эйлеру, следующее. Рассмотрим любое из **r**-сочетаний с повторением из **n** пронумерованных упорядоченных предметов, например сочетание $\mathbf{c_1\, c_2 \dots c_r}$, в котором элементы выписаны в возрастающем порядке (считаем, что одинаковые элементы упорядочены по возрастанию). Естественно, что в каждом сочетании вследствие возможности неограниченных повторений рядом стоящие элементы могут быть одинаковыми. Ввиду этого построим с помощью соотношений

$$\mathbf{d_1 = c_1 + 0;\ d_2 = c_2 + 1, \dots;\ d_i = c_i + i - 1, \dots;\ d_r = c_r + r - 1}$$

последовательность элементов $\mathbf{d_1, d_2, \dots, d_r}$. Следовательно, при любых элементах $\mathbf{c_i}$ элементы $\mathbf{d_i}$ всегда различны. Ясно, что последовательности из элементов $\mathbf{c_i}$ и $\mathbf{d_i}$ взаимно однозначно соответствуют друг другу, т.е. каждое заданное **r**-сочетание порождает определенную последовательность элементов $\mathbf{d_i}$ (и наоборот). Число последовательностей из элементов $\mathbf{d_i}$ равно числу $\mathbf{C(n + r - 1, r)}$ **r**-сочетаний (без повторений) из элементов с номерами от 1 до $\mathbf{n + r - 1}$; следовательно, формула (8.10) доказана. Например, последовательностями из элементов $\mathbf{d_i}$, соответствующими **r**-сочетаниям из примера 5, оказываются (в том же порядке) следующие: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45.

8.4. Производящие функции для сочетаний

Проведенные выше подсчеты могут быть унифицированы и обобщены с помощью сравнительно простого математического аппарата – производящей функции.

Для примера рассмотрим три объекта, которые обозначены как $\mathbf{x_1, x_2, x_3}$. Образуем произведение $\mathbf{(1 + x_1t)(1 + x_2t)(1 + x_3t)}$.

Перемножив и расположив это произведение по степеням t, получим

$$\mathbf{1 + (x_1 + x_2 + x_3)t + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)t^2 + x_1x_2x_3t^3},$$

или

$$\mathbf{1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3},$$

где $\mathbf{a_1, a_2, a_3}$ – элементарные симметрические функции трех переменных $\mathbf{x_1, x_2}$, и $\mathbf{x_3}$. Эти симметрические функции определяются вышеприведенным выражением. Можно заметить, что число слагаемых каждого коэффициента $\mathbf{a_r}$ ($\mathbf{r = 1, 2, 3}$) равно числу сочетаний из трех элементов по **r**.

Следовательно, число таких сочетаний получается приравниванием каждого x_1 единице, т.е. $(1 + t)^3 = \sum_{r=0}^{3} a_r(1, 1, 1)t^r$.

Для случая **n** различных объектов, обозначенных $x_1, \ldots, x_n$, ясно, что

$$(1 + x_1t)(1 + x_2t)\ldots(1 + x_nt) =$$
$$= 1 + a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)t + \ldots + a_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^r + \ldots + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)t^n$$

и

$$(1 + t)^n = \sum_{r=0}^{n} a_r(1, 1, \ldots, 1)\, t^r = \sum_{r=0}^{n} C(n, r)t^r. \qquad (8.11)$$

Это результат, упомянутый в замечании, следующем за выражением (8.6), определяющим числа **C(n, r)** как биномиальные коэффициенты.

Выражение $(1 + t)^n$ называется перечисляющей производящей функцией сочетаний из **n** различных объектов (или энумератором).

Пример 6. В равенстве (8.11) примем $t = 1$; тогда

$$2^n = \sum_0^n C(n, r) = \sum_0^n \binom{n}{2r},$$

т.е. число всех возможных сочетаний из **n** различных элементов равно 2^n. Последнее также очевидно из того, что в любое из возможных сочетаний каждый заданный элемент либо входит, либо не входит. Далее, при $t = -1$, равенство (8.11) принимает вид

$$0 = \sum_0^n (-1)^r \binom{n}{r} = 1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Сложив два последних равенства, а затем вычтя из другого, получим

$$\sum_{r=0} \binom{n}{2r} = \sum_{r=0} \binom{n}{2r+1} = 2^{n-1}.$$

Пример 7. Положим $n = n - m + m$. Так как

$$(1 + t)^n = (1 + t)^{n-m}\,(1 + t)^m,$$

то, приравнивая коэффициенты при t^r в левой и правой частях, получим

$$C(n, r) = C(n - m, 0)\, C(m, r) + C(n - m, 1)\, C(m, r - 1) + \ldots +$$
$$+ C(n - m, r)\, C(m, 0),$$

или

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=0} \binom{n-m}{k} \binom{m}{r-k}.$$

Соответствующее соотношение для «убывающих» факториалов

$$(n)_r = n(n - 1)\ldots(n - r + 1)$$

имеет вид

$$(n)_r = (m)_r + \binom{r}{1}(n - m)_1\, (m)_{r-1} + \binom{r}{12}\, (n - m)_2\, (m)_{r-2} + \ldots +$$
$$+ \binom{r}{j}(n - m)_j(m)_{r-j} + \ldots + (n - m)_r.$$

Данный результат часто называют теоремой Вандермонда. Его можно переписать в виде

$$(n)_r = \sum_{j=0} \binom{r}{j} (n + m)_j (m)_{r-j},$$

откуда следует соотношение

$$(n)^r = \sum_{j=0} \binom{r}{j} (n - m)^{(j)} m^{(r-j)}$$

для «возрастающих» факториалов $n^{(r)} = n(n + 1)\ldots(n + r - 1) = (-1)^r(-n)_r$.

Какими же оказываются производящие функции и энумераторы в случае, когда не все комбинируемые элементы различны?

В произведении $(1 + x_1t)(1 + x_2t)...(1 + x_nt)$ каждый множитель является биномом, который благодаря наличию в нем слагаемых 1 и x_k указывает на возможность наличия или отсутствия в каждом из сочетаний элемента x_k. Это произведение порождает сочетания, так как коэффициент при t^r в нем получается выбором единицы в $n - r$ из n двучленных множителей и в r оставшихся после такого выбора множителях – членов вида x_kt всеми возможными путями. Эти коэффициенты по самому их определению являются r-сочетаниями. Каждый элемент в любом сочетании может появляться не более одного раза, так как любой множитель состоит только из двух слагаемых.

Таким образом, производящую функцию для сочетаний, в которых элементы x_k могут содержаться по 0, 1, 2, ..., j раз, можно получить заменой прежних множителей $1 + x_k t$ множителями вида

$$1 + x_kt + x_k^2t^2 + \ldots + x_k^jt^j.$$

Более того, множители производящей функции можно совершенно независимо друг от друга приспосабливать к любым требованиям задачи. Так, например, если x_k должно всегда входить четное число раз, но не более чем j раз, то j-й множитель ($j = 2j + 1$) следует выбирать в виде

$$1 + x_k^2t^2 + x_k^it^i + \ldots + x_k^{2i}t^{2i}.$$

Следовательно, производящая функция для любой задачи описывает не только виды элементов, но и виды искомых сочетаний. Множитель x_k^i в каждом члене коэффициента при соответствующей степени t в выражении производящей функции показывает, что элемент x_k появляется в соответствующем сочетании i раз.

Можно было бы записать общую для всех случаев форму, однако обозначения оказались бы громоздкими и менее наглядными, чем в приводимых ниже примерах.

Пример 8. Для сочетаний с неограниченным повторением элементов n видов и без ограничения на число появлений любого элемента перечисляющей производящей функцией будет

$$(1 + t + t^2 + ...)^n,$$

или, что то же самое,

$$(1 + t)^n = \sum_0^\infty \binom{-n}{r}(-1)^r = \sum_0^\infty \frac{-n(-n-1)...(-n-r+1)}{r!}(-t)^r = \sum_0^\infty \binom{n+r-1}{r} t^r.$$

Этим подтверждается результат (8.10).

Пример 9. Для сочетаний из примера 8 и при дополнительном условии непрерывного вхождения в сочетание по меньшей мере одного элемента каждого вида перечисляющая функция будет иметь вид

$$(t + t^2 + ...)^n,$$

или, что то же самое,

$$(\mathbf{t} + \mathbf{t}^2 + \ldots)^{\mathbf{n}} = \mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{1} - \mathbf{t})^{-\mathbf{n}} = \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{0}}^{\infty} \binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{1}}{\mathbf{r}} \mathbf{t}^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r}=\mathbf{n}}^{\infty} \binom{\mathbf{r} - \mathbf{1}}{\mathbf{n} - \mathbf{1}} \mathbf{t}^{\mathbf{r}}.$$

Следовательно, число искомых сочетаний равно 0 для $\mathbf{r} < \mathbf{n}$ и равно $\mathbf{C(r – 1, r – n)}$ для $\mathbf{r \geq n}$. Например, для $\mathbf{n = 3}$ и элементов **a**, **b**, **c** существует одно 3-сочетание **abc** и пять 5-сочетаний, а именно **aaabc**, **abbbc**, **aabbc**, **aabcc**, **abbcc**.

Пример 10. Для сочетаний из примера 8, но при условии, что каждый элемент появляется четное число раз, перечисляющая производящая функция имеет вид

$$\mathbf{(1 + t^2 + t^i + ...)^n},$$

или, что то же самое, вид

$$(\mathbf{1} - \mathbf{t}^2)^{-\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{0}}^{\infty} \binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{1}}{\mathbf{r}} \mathbf{t}^{\mathbf{2r}}.$$

Таким образом, число **r**-сочетаний при нечетном **r** равно нулю, а число **2r**-сочетаний, совершенно очевидно, равно числу **r**-сочетаний из примера 8:

$$\mathbf{(1 - t^2)^{-n} = (1 - t)^{-n}(1 + t)^{-n}},$$

так что сумма

$$\binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{1}}{\mathbf{r}} - \binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{2}}{\mathbf{r} - \mathbf{1}}\mathbf{n} + \binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{3}}{\mathbf{r} - \mathbf{2}}\binom{\mathbf{n} + \mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \ldots +$$
$$+ (-\mathbf{1})^{\mathbf{k}}\binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{k} - \mathbf{1}}{\mathbf{r} - \mathbf{k}}\binom{\mathbf{n} + \mathbf{k} - \mathbf{1}}{\mathbf{k}} + \ldots + (-\mathbf{1})^{\mathbf{r}}\binom{\mathbf{n} + \mathbf{r} - \mathbf{1}}{\mathbf{r}}$$

равна нулю для нечетного $\mathbf{r}$ и $\binom{\mathbf{n} + \mathbf{s} - \mathbf{1}}{\mathbf{s}}$ для $\mathbf{r = 2s}$, т.е.

$$\binom{\mathbf{n} + \mathbf{s} - \mathbf{1}}{\mathbf{s}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{2s}} \binom{\mathbf{n} + \mathbf{2s} - \mathbf{k} - \mathbf{1}}{\mathbf{2s} - \mathbf{k}}\binom{\mathbf{n} + \mathbf{k} - \mathbf{1}}{\mathbf{k}}(-\mathbf{1})^{\mathbf{k}}.$$

Подобные примеры, очевидно, могут быть неограниченно умножены. Полезно отметить следующий факт: при образовании сочетания осуществляется независимый выбор элементов, и это преимущество используется в производящей функции на основе правила умножения. Действительно, каждый коэффициент произведения является производящей функцией для элементов данного вида. Произведения этих производящих функций возникают подобно тому, как возникают суммы независимых произвольных переменных в теории вероятностей.

8.5. Производящие функции для перестановок

В случае коммутативных алгебраических операций произведения $\mathbf{x_1}\ \mathbf{x_2}$ и $\mathbf{x_2}\ \mathbf{x_1}$ одинаковы. Поэтому производящую функцию, описывающую перестановки, невозможно построить так, как это было сделано для сочетаний. Тем не менее отыскание перечисляющих производящих функций (энумераторов) оказывается делом несложным.

В случае **n** различных элементов из соотношения (8.1) вытекает выражение

$$(\mathbf{1} + \mathbf{t})^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{r})\mathbf{t}^{\mathbf{r}}/\mathbf{r}!, \qquad (8.12)$$

т.е. в разложении выражения $(1 + t)n$ число $P(n, r)$ является коэффициентом при $t^r/r!$ Имеется возможность обобщения. Если какой-либо элемент может появляться 0, 1, 2, ..., k раз или если существует k элементов данного вида, то множитель $1 + t$ в левой части (8.12) заменяется множителем

$$1 + t + t^2/2! + ... + t^k/k!.$$

Это объясняется тем, что число перестановок из n элементов, p из которых одного вида, q – другого и так далее, согласно формуле (8.4), равно

$$n!/(p!q!...).$$

Данное число оказывается коэффициентом при $t^n/n!$ в произведении

$$(t^p/p!)(t^q/q!)..., p + q + ... + n,$$

что в точности соответствует требованиям: буква, определяющая элементы первого типа, появляется точно p раз; буква, определяющая элементы второго типа, – ровно q раз и т.д.

Следовательно, если перестановки заданы условиями, согласно которым k-й из n элементов должен появиться λ_0 k, λ_1 k, … раз $(k = 1, 2, …, n)$, то число r-перестановок оказывается коэффициентом при $t^n/n!$ в произведении

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t^{\lambda_0(k)}}{\lambda_0(k)!}+\frac{t^{\lambda_1(k)}}{\lambda_1(k)!}+\dots\right).$$

Возникающие здесь производящие перечисляющие функции могут быть названы экспоненциальными производящими функциями. Подобный термин оправдан аналогией, поскольку известно, что

$$e^{a_1} = \sum_0^\infty a^r\frac{t^r}{r!}.$$

Указанное замечание разъясняется следующими примерами.

Пример 11. Для r-перестановок из n различных элементов с неограниченными повторениями (любой элемент может появляться в перестановке произвольное число раз) перечисляющей производящей функцией служит

$$(1 + t + t^2/2! + ...)^n,$$

но

$$(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots)^n = e^{nt} = \sum_0^\infty n^r\frac{t^r}{r!}.$$

Следовательно, число r-перестановок равно, что согласуется с соотношением (8.5).

Пример 12. Для перестановок из примера 11 и при дополнительном условии, что каждый элемент входит в перестановку не менее одного раза, энумератором служит

$$\left(1+\frac{t^2}{2!}+...\right)^n = (e^t - 1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j e^{(n-j)t} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{t^r}{r!} \sum_{0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \Delta^n O^r.$$

Последний результат выражен в обозначениях, принятых в теории конечных разностей. Если ввести оператор **E** сдвига $\mathbf{Eu(n) = u(n + 1)}$ и оператор **Δ** разности $\mathbf{\Delta\ u(n) = u(n + 1) - u(n) = (E - 1)}$ и **(n)**, то по этому результату можно придать вид

$$\sum \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^r = \sum \binom{n}{j} (-1)^j E^{n-j} O^r = (E-1)^n O^r =$$
$$= (E-1)^n O^r = \Delta^n O^r.$$

Заметим, что $\mathbf{\Delta\, O^r = 1^r,\ \Delta^2 O^r = 2^r - 2,\ \Delta^3 O^r = 3r - 32^r + 3}$. Эти величины еще появятся в следующих разделах.

Наконец, следует отметить, что перестановки с неограниченными повторениями из примеров 11 и 12 связаны с задачами на размещения. Для примера рассмотрим восемь 3-перестановок с повторениями из элементов двух типов (**a** и **b**):

aaa, **aab**, **aba**, **baa**, **abb**, **bab**, **bba**, **bbb.**

Их можно поставить во взаимно однозначное соответствие с размещениями трех различных элементов по двум ячейкам (ячейки отделены вертикальными черточками):

abc|– ab|c ac|b bc|a a|bc b|ac c|ab –| abc.

Здесь намечается утверждение, что число **r**-перестановок с повторениями из объектов **n** различных типов равно числу размещений **r** различных элементов по личным ячейкам. Ограничение из примера 12, состоящее в том, что каждая перестановка содержит по меньшей мере по одному элементу каждого типа, соответствует следующему требованию, относящемуся к размещениям: все **n** ячеек должны оказаться заняты.

8.6. Принцип включений-исключений

Пусть имеется **N** предметов, некоторые из которых обладают свойствами $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$. При этом каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими. Обозначим через $\mathbf{N(a_1, ..., a_n)}$ количество предметов, обладающих свойствами $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ (и, возможно, еще некоторыми другими). Если необходимо будет подчеркнуть, что берутся лишь предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство следует писать со штрихом. Например, через $\mathbf{N(a_1, a_1, a_4)}$ обозначено количество предметов, обладающих свойствами $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_1}$, но не обладающих свойством $\mathbf{a_4}$ (вопрос об остальных свойствах остается открытым).

Число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается по правилу через $\mathbf{N(a_1', a_2', ..., a_n')}$. Общий закон состоит в том, что

$$\begin{gathered} N(a_1', a_2', ..., a_n') = N - N(a_1) - N(a_2) - \ ... - N(a_n) + N(a_1', a_2') + \\ + \ N(a_1 a_3) + \ ... + N(a_1 a_n) + \ ... + N(a_{n-1} a_n) - N(a_1 a_2 a_3) - - \\ N(a_{n-2} a_{n-1} a_n) + \ ... + (-1)^n N(a_1 a_2 ... a_n). \end{gathered} \tag{8.13}$$

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2, ..., a_n}$ (без учета их порядка), причем знак + ставится, если число учитываемых свойств четно, и знак $-$, если это число нечетно. Например, $\mathbf{N(a_1a_3a_6a_8)}$ входит со знаком +, а $\mathbf{N(a_3a_6a_{10})}$ со знаком $-$. Формулу (8.13) называют *формулой включений и исключений* – сначала исключаются все предметы, обладающие хотя бы одним из свойств $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2, ..., a_n}$, потом включаются предметы, обладающие по крайней мере двумя из этих свойств, исключаются имеющие по крайней мере три и т.д.

Докажем формулу (8.13). Доказательство ведется с помощью индукции по числу свойств. При одном свойстве формула очевидна. Каждый предмет либо обладает этим свойством, либо не обладает, поэтому $\mathbf{N(a') = N - N(a)}$.

Предположим теперь, что формула (8.13) доказана для случая, когда число свойств равно $\mathbf{n - 1}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{N}\left(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_2^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-2}^{'}\right) = \mathbf{N} - \mathbf{N}(\mathbf{a}_1) - \ ... - \mathbf{N}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}) + \mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2) + ... + \\ + \ \mathbf{N}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}) - \mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3) - \mathbf{N}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-3}\mathbf{a}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}) + ... + \\ + (-\mathbf{1})^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}\mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}).\end{gathered} \tag{8.14}$$

Данная формула, по предположению, справедлива для любой совокупности. В частности, она верна для совокупности $\mathbf{N(a_n)}$ элементов, обладающих свойством $\mathbf{a_n}$. Для этой совокупности формула (8.14) принимает вид

$$\begin{gathered}\mathbf{N}\left(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_2^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}^{'}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{'}\right) = \mathbf{N}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}}) - \mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{\mathbf{n}}) - \ ... - \mathbf{N}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}) + \\ + \ \mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_{\mathbf{n}}) + \ ... + \mathbf{N}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}-2}\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}) - \mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_{\mathbf{n}}) + \ ... + \\ + (-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}\mathbf{N}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}\mathbf{a}_{\mathbf{n}})\end{gathered} \tag{8.15}$$

(добавляется указание, что в каждом случае берутся лишь предметы, обладающие свойством $\mathbf{a_n}$).

Вычтем равенство (8.15) из равенства (8.14). В правой части получим то, что требуется: правую часть формулы (8.13). В левой части – разность

$$\mathbf{N}(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_1^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}^{'}) - \mathbf{N}(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_1^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}^{'}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{'}). \tag{8.16}$$

Однако $\mathbf{N(a_1, a_2, ..., a_n)}$ – это число предметов, не обладающих свойствами $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}$ (и, возможно, обладающих свойством $\mathbf{a_n}$), а $\mathbf{N(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1},, a_n)}$ – это число предметов, которые не обладают свойствами $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}$, но наверняка обладают свойством $\mathbf{a_n}$. Значит, разность (8.16) как раз равна числу предметов, не обладающих ни одним из свойств $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n}$. Иными словами,

$$\mathbf{N}\left(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_1^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}^{'}\right) - \mathbf{N}\left(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_1^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}^{'}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{'}\right) = \mathbf{N}\left(\mathbf{a}_1^{'}\mathbf{a}_1^{'}...\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}^{'}\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{'}\right).$$

Таким образом, после вычитания в левой части получается левая часть формулы (8.13). Таким образом, эта формула доказана для случая, когда число свойств равно $\mathbf{n}$.

Итак, соотношение (8.13) справедливо для $\mathbf{n}$ свойств, так как оно справедливо для $\mathbf{n - 1}$, а при $\mathbf{n = 1}$ уже доказано, поэтому доказана справедливость этого соотношения для любого набора свойств.

Формулу (8.13) можно представить в символической форме следующим образом:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}'...\boldsymbol{\lambda}') = \mathbf{N}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})...(\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}).$$

Здесь после раскрытия скобок необходимо произведения $\mathbf{N\alpha\beta\ldots\lambda}$ писать в виде $\mathbf{N(\alpha\beta\ldots\lambda)}$. Например, вместо $\mathbf{N\alpha\beta\lambda}$ нужно написать $\mathbf{N(\alpha\beta\lambda)}$.

8.7. Задачи

1. A. Показать, что из **p** знаков «плюс» и из **q** знаков «минус» можно составить $\binom{\mathbf{p}+\mathbf{1}}{\mathbf{q}}$ различных последовательностей, в каждой из которых нигде рядом не окажутся два знака «минус».

B. Показать, что **n** знаков, каждый из которых либо «плюс», либо «минус», можно **f(n)** способами расположить в последовательность, в которой нигде не окажутся рядом два «минуса». При этом **f(0) = 1**, **f(1) = 2** и **f(n) = f(n – 1) + f(n – 2)**, **n > 1**.

C. Из сопоставления A и B, вытекает, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}^{\mathbf{m}} \binom{\mathbf{n}-\mathbf{q}+\mathbf{1}}{\mathbf{q}}, \mathbf{m} = \left[\left(\frac{\mathbf{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}\right)\right],$$

где **[x]** – наибольшее целое число, не превосходящее **x**. Показать, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}-\mathbf{q}+\mathbf{1}}{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{n}-\mathbf{1}) + \mathbf{g}(\mathbf{n}-\mathbf{2})$$

и что $\mathbf{g(0) = 1}$, $\mathbf{g(1) = 2}$, следовательно, $\mathbf{g(n) = f(n)}$. Числа $\mathbf{f(n)}$ называются числами Фибоначчи.

2. A. Доказать, что

$$\mathbf{n}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}+\mathbf{1})\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}+\mathbf{1}} + \mathbf{r}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}},$$

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = \binom{\mathbf{r}+\mathbf{2}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}+\mathbf{2}} + \mathbf{2}\binom{\mathbf{r}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}+\mathbf{1}} + \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}},$$

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{s}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{q}} \binom{\mathbf{s}}{\mathbf{k}}\binom{\mathbf{r}-\boldsymbol{s}+\boldsymbol{k}}{\mathbf{r}-\mathbf{s}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}+\mathbf{s}-\mathbf{k}}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{min}(\mathbf{r},\mathbf{s}).$$

B. Доказать аналогично, что

$$\mathbf{n}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\binom{\mathbf{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{r}+\mathbf{1}} + \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}+\mathbf{1}},$$

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = \binom{\mathbf{r}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}+\mathbf{2}}{\mathbf{r}+\mathbf{2}} + \mathbf{2r}\binom{\mathbf{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{r}+\mathbf{2}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}+\mathbf{2}},$$

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{s}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \binom{\mathbf{s}}{\mathbf{k}}\binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}-\mathbf{k}}\binom{\mathbf{n}+\mathbf{s}-\mathbf{k}}{\mathbf{r}+\mathbf{s}}.$$

3. Доказать, что

$$\sum_{\mathbf{r}-\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{r}+\mathbf{1}}}{\mathbf{r}+\mathbf{1}} \mathbf{C}(\mathbf{n},\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}+\mathbf{1}},$$

$$\sum_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}+\mathbf{1}} \mathbf{C}(\mathbf{n},\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{2}^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}-\mathbf{1}}{\mathbf{n}+\mathbf{1}},$$

используя производящую функцию $\mathbf{(1+t)^n = \sum C(n, r)t^r}$, или другим путем.

4. Вывести следующие тождественные соотношения между биномиальными коэффициентами:

$$\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{m}} (-\mathbf{1})^{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{n}-\mathbf{k}}{\mathbf{n}-\mathbf{m}}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} < m \leq n;$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=2^{m}\binom{n}{m};$$
$$\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k}\binom{n-k}{m}\binom{n}{k}=0,\quad 0\le m<n;$$
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}=\binom{2n}{m},\quad m\le n;$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{k}^{2}=\binom{2n}{n}.$$

5. Доказать, что число **r**-сочетаний из **n** элементов, среди которых имеется **p** элементов одного типа и по одному элементу из **q** других типов (спецификацию этих элементов будем обозначать символом $\mathbf{p1^q(p + q = n)}$), равно

$$C(p1^q;\ r) = \binom{q}{r} + \binom{q}{r-1} + \ldots + \binom{q}{r-p}.$$

Пользуясь этим результатом, доказать, что энумератором в данном случае служит $\mathbf{(1 + t + t^2 + \ldots + t^p)(1 + t)^2}$, и установить рекуррентную формулу

$$C(p1^q;\ r) - C(p1^q,\ r-1) = \binom{q}{r} - \binom{q}{r-p-1}.$$

6. Доказать, что число **r**-сочетаний из **n** элементов спецификации $\mathbf{2^m\ 1^{n-2m}}$ оказывается равным $C(2^m 1^{n-2m}, r) = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n-m-k}{r-2k}$.

Вывести рекуррентную формулу

$$C(2^m\ 1^{n-2m},\ r) = C(2^{m-1}\ 1^{n+1-2m},\ r) + C(2^{m-1}\ 1^{n-2m},\ r-2).$$

7. Показать, что число **r**-сочетаний из элементов спецификации $\mathbf{s^m}$ (**m** различных видов элементов по **s** элементов каждого вида), называемой иногда регулярной, составляет

$$C(s^m, r) = \sum_k (-1)^k \binom{m}{k}\binom{m+r-k(s+1)-1}{r+k(s+1)}.$$

8. Вывести рекуррентную формулу

$$C(n_1n_2\ldots n_m,\ r) = C(n_2\ldots n_m,\ r) + C(n_2\ldots n_m,\ r-1) + \ldots +$$
$$+ C(n_2\ldots n_m,\ r-n_1),$$

обозначив через $\mathbf{C(n_1n_2\ldots n_m,\ r)}$ число **r**-сочетаний из элементов спецификации $\mathbf{(n_1n_2\ldots n_m)}$,

9. Доказать результат примера 12 для перестановок с неограниченными повторениями путем классификации $\mathbf{n^r}$ перестановок из примера 11 по числу содержащихся в них различных элементов.

10. Показать, что $\mathbf{\Delta^n 0^{r+1} = n\ \Delta^n 0^r + n\Delta^{n-1} 0^r}$, используя производящую функцию из примера 12 (или иным методом),.

11. Показать, что число **r**-перестановок с неограниченными повторениями, в которых каждый элемент может повторяться лишь четное число раз (в том числе и **0** раз), дается в виде $\mathbf{\delta^n 0^r}$, где

$$\delta u_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/2.$$

Вывести

$$\delta u_n 0^{r+2} = n^2\delta^n 0^r - n(n-1)\delta^{n-2} 0^r.$$

12. Прочитать условие и выполнить задания. Обозначим через $\mathbf{P_n}$ общее число всех перестановок из $\mathbf{n}$ различных элементов, $\mathbf{P_n = \sum(n)_r}$.

А. Вывести рекуррентную формулу $\mathbf{P_n = nP_{n-1} + 1}$ и проверить таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{P_n}$	1	2	5	16	65	326	1975	13700	109601

В. Показать, что

$$\mathbf{P_n = (E+1)^n 0! = n! \sum_0^n 1/k! = n!\, e - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+2)_n} - \ldots}$$

и что, следовательно, $\mathbf{P_n}$ является ближайшим к $\mathbf{n!}$ целым числом.

С. Показать, что

$$\mathbf{\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n / n! = e^t / (1 - t)}.$$

13. Прочитать условие и выполнить задания. Производящей функцией для $\mathbf{r}$-перестановок спецификации ($\mathbf{2^m}$) ($\mathbf{m}$ видов, по два элемента каждого вида) служит

$$\mathbf{\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)^m = \sum_{r=0}^{2m} q_{m,r} t^r / r!},$$

где $\mathbf{q_{m,r}}$ – число $\mathbf{r}$-перестановок.

А. Вывести следующие рекуррентные соотношения:

$$\mathbf{q_{m+1,r} = q_{m,r} + rq_{m,r-1} + (r/2)q_{m,r-2}};$$
$$\mathbf{q_{m,r+1} = mq_{m,r} - m\,(r/2)q_{m-1,r-2}};$$
$$\mathbf{q_{m,r+2} = m\,(2m-1)q_{m-1,r} - m(m-1)q_{m-2,r}}.$$

Проверить, в частности, что

$$\mathbf{q_{m,0} = 1,\ q_{m,1} = m,\ q_{m,2} = m^2}.$$

В. Установить, что число всех $\mathbf{q_m = \sum q_{m,r}}$ определяется символическим выражением

$$\mathbf{q_m = (1 + E + E^2/2)^m 0! \ldots (E^k 0! = k!)},$$

и вывести рекуррентную формулу

$$\mathbf{q_m = m(2m-1)q_{m-1} - m(m-1)q_{m-2} + m + 1}.$$

Проверить, что $\mathbf{q_0 = 1}$, $\mathbf{q_1 = 3}$, $\mathbf{q_2 = 19}$, $\mathbf{q_3 = 271}$.

14. Показать, что

$$\mathbf{r^r (n-r)^{n-r} \binom{n}{r} \le n^n},$$

или

$$\mathbf{\binom{n}{r} \le n^n / r^r (n-r)^{n-r}}$$

путем классификации перестановок из $\mathbf{n}$ различных элементов с повторениями.

15. Решить задачу Терквема. Упорядочим $\mathbf{n}$ элементов; построиим из них $\mathbf{r}$-сочетания, располагая элементы в каждом из сочетаний в их естественном (по возрастанию индексов) порядке. Пусть $\mathbf{f(n, r)}$ – число таких $\mathbf{r}$-сочетаний, в которых элементы с нечетными индексами стоят в нечетных позициях, а элементы с четными индексами – в четных местах.

Или, что то же самое, пусть $\mathbf{f(n, r)}$ – число $\mathbf{r}$-сочетаний, составленных при четном $\mathbf{r}$ из равного числа элементов с четными и нечетными индексами. При нечетном $\mathbf{r}$ число элементов с нечетными индексами на единицу больше числа элементов с четными индексами.

Показать, что для $\mathbf{f(n, r)}$ имеет место рекуррентная формула:

A. $\mathbf{f(n, r) = f(n - 1, r - 1) + f(n - 2, r), f(n, 0) = 1}$.

B. $\mathbf{f(n, r) = \binom{q}{r}, q = [(n + 1)/2]}$,

где $\mathbf{[(n + 1)/2]}$ – наибольшее целое, не превосходящее $\mathbf{(n + r)/2}$.

C. $\mathbf{f(n) = \sum f(n, r) = f(n - 1) + f(n - 2)}$.

Числа $\mathbf{f(n)}$ оказываются, как и в задаче 1, числами Фибоначчи.

16. Прочитать условие и выполнить задания. Обозначим через $\mathbf{a_{n,\ r}}$ число перестановок из $\mathbf{n}$ различных элементов с повторениями, в которых любые два соседних элемента различны; через $\mathbf{a^*_{n,\ r}}$ обозначим число таких $\mathbf{r}$-перестановок, в которых на первом месте стоит данный элемент. Показать, что

$$\mathbf{a_{n,\ r} = na^*_{n,\ r};}$$
$$\mathbf{a^*_{n,\ r} = (n - 1)a^*_{n,\ r-1}}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{a_{n,\ r} = (n - 1)a_{n,\ r-1},\ r > 1;}$$
$$\mathbf{a_{n,\ r} = n(n - 1)^{r-1},\ r > 0.}$$

Показать, что если

$$\mathbf{a_n(x) = \sum_{r=1} a_{n,\ r}x^{r-1}},$$

то

$$\mathbf{a_n(x) = n[1 - x\ (n - 1)]^{-1}}.$$

17. A. Прочитать условие и выполнить задания. Обозначим через $\mathbf{b_{n,\ r}}$ число тех перестановок из задачи 16, в которых не могут содержаться три одинаковых элемента подряд. Зная число перестановок, содержащих данный элемент на первом месте, и число перестановок с двумя данными элементами на двух первых местах, доказать рекуррентную формулу

$$\mathbf{b_{n,\ r} = (n - 1)(b_{n,\ r-1} + b_{n,\ r-2}),\ r > 2}.$$

Из данной формулы и начальных значений $\mathbf{b_{n,\ 1} = n}$, $\mathbf{b_{n,\ 2} = n^2}$ необходимо вывести соотношение для производящей функции

$$\mathbf{[1 - (n - 1)(x + x^2)]b_n(x) = n(1 + x)},$$

где

$$\mathbf{b_n(x) = \sum_{r=1} b_{n,\ r}x^{r-1}}.$$

B. Показать, что

$$\mathbf{1 + \frac{n-1}{n}xb_n(x) = \frac{1}{1-(n-1)(x+x^2)} = \sum_{r=0} \frac{\alpha^{r-1} - \beta^{r+1}}{\alpha - \beta}x^r},$$

где

$$\mathbf{(1 - \alpha x)(1 - \beta x) = 1 - (n - 1)(x + x^2)},$$

следовательно,

$$(\mathbf{n}-\mathbf{1})/\mathbf{n}\mathbf{b}_{\mathbf{n},\,\mathbf{r}} = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{r}+\mathbf{1}} - \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{r}+\mathbf{1}})/(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}).$$

18. Прочитать условие и выполнить задания. Рассмотрим те перестановки из задач 16 и 17, в которых не содержится **m (m = 2, 3, …)** одинаковых элементов подряд. Число этих перестановок следует обозначить через $\mathbf{a}_{\mathbf{n},\ \mathbf{r}}^{(\mathbf{m})}$, а производящую функцию – через $\mathbf{a}_{\mathbf{n},\ \mathbf{r}}^{(\mathbf{m})}(\mathbf{x})$. Показать, что

$$\mathbf{a}_{\mathbf{n},\mathbf{r}}^{(\mathbf{m})} = (\mathbf{n}-\mathbf{1})\left(\mathbf{a}_{\mathbf{n},\ \mathbf{r}-\mathbf{1}}^{(\mathbf{m})} + \mathbf{a}_{\mathbf{n},\ \mathbf{r}-\mathbf{2}}^{(\mathbf{m})} + \ldots + \mathbf{a}_{\mathbf{n},\ \mathbf{r}-\mathbf{m}+\mathbf{1}}^{(\mathbf{m})}\right), \mathbf{r} > \mathbf{m}-1,$$

и, следовательно, что $\mathbf{a}_{\mathbf{n},\ \mathbf{r}}^{(\mathbf{m})} = \mathbf{n}^{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r} < \mathbf{m}$,

$$[\mathbf{1}-(\mathbf{n}-\mathbf{1})(\mathbf{x}+\mathbf{x}^{\mathbf{2}}+\ldots+\mathbf{x}^{\mathbf{m}-\mathbf{1}})]\mathbf{a}_{\mathbf{n},\mathbf{r}}^{(\mathbf{m})}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{1}+\mathbf{x}+\ldots+\mathbf{x}^{\mathbf{m}-\mathbf{2}}).$$

9. Элементы теории графов

9.1. Основные определения

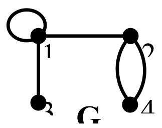
Граф (graph) – пара **G = (V, E)**, где **V** – множество объектов произвольной природы, называемых *вершинами* (vertices, nodes), а **E** – семейство пар $\mathbf{e_i} = (\mathbf{v_{i_1}}, \mathbf{v_{i_2}})$, $\mathbf{v_{ij}} \in \mathbf{V}$, называемых *ребрами* (edges). В общем случае множество **V** и/или семейство **E** могут содержать бесконечное число элементов, но в данном случае будут рассматриваться только конечные графы, т.е. графы, у которых как **V**, так и **E** конечны.

В приведенном определении графа не случайно **E** названо семейством пар, а не множеством. Дело в том, что элементы **E** могут быть неуникальны, т.е. возможны кратные ребра. Существует другое, более корректное определение: граф определяется как тройка **G = (V, E, φ)**, где **V** – множество вершин, **E** – множество ребер, а **φ = φ(v, u, e)** – трехместный предикат (булевская функция от трех переменных), возвращающая **True** тогда и только тогда, когда ребро **e** инцидентно вершинам **v** и **u**. Однако такие «строгости» в настоящем изложении являются чрезмерными.

Если порядок элементов, входящих в $\mathbf{e_i}$, имеет значение, то граф называется ориентированным (directed graph), сокращенно – орграф (digraph), иначе – неориентированным (undirected graph). Ребра орграфа называются дугами (arcs). В дальнейшем будем считать, что термин «граф», применяемый без уточнений «ориентированный» или «неориентированный», обозначает неориентированный граф.

Пример:

G = (V, E); V = {1, 2, 3, 4}; E <(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 4)>;

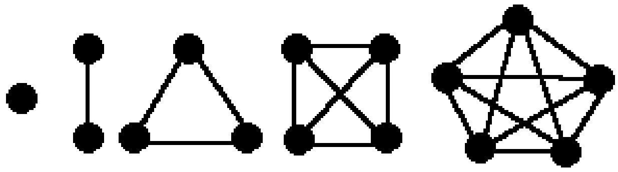


Если **e = (v, u)**, то вершины **v** и **u** называются концами ребра. При этом говорят, что ребро **e** является смежным (инцидентным) каждой из вершин **v** и **u**. Вершины **v** и **u** также называются смежными (инцидентными). В общем случае допускаются ребра вида **e = (v, v)**; они называются петлями.

Степень вершины графа – это число ребер, инцидентных данной вершине, причем петли учитываются дважды. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер: $\mathbf{Sum(deg(v_i),\ i = 1..|V|) = 2|E|}$.

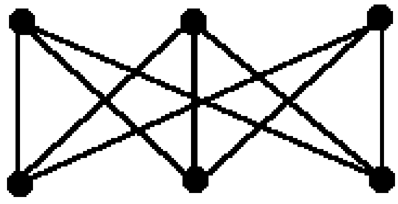
Граф, не содержащий петель и кратных ребер, называется обыкновенным (или простым) графом (simple graph). Во многих публикациях используется другая терминология: под графом понимается простой граф, граф с кратными ребрами называют мультиграфом, с петлями – псевдографом.

Некоторые классы графов получили особые наименования. Граф с любым количеством вершин, не содержащий ребер, называется пустым. Обыкновенный граф с **n** вершинами, любая пара вершин которого соединена ребром, называется полным и обозначается $\mathbf{K_n}$ (очевидно, что в полном графе $\mathbf{n(n-1)/2}$ ребер):



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Граф, вершины которого можно разбить на непересекающиеся подмножества $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$ так, что никакие две вершины, принадлежащие одному и тому же подмножеству, не смежны, называется двудольным (или бихроматическим, графом Кенига) и обозначается $\mathbf{B_{mn}}$ $\mathbf{(m = |V_1|,\ n = |V_2|,\ m + n = |V|)}$. Полный двудольный граф – такой двудольный граф, что каждая вершина множества $\mathbf{V_1}$ связана со всеми вершинами множества $\mathbf{V_2}$ (и наоборот); обозначение – $\mathbf{K_{mn}}$. *Замечание*: полный двудольный граф $\mathbf{B_{mn}}$ не является полным (за исключением $\mathbf{B_{11} = K_2}$). Пример двудольного графа для $\mathbf{B_{33}}$:



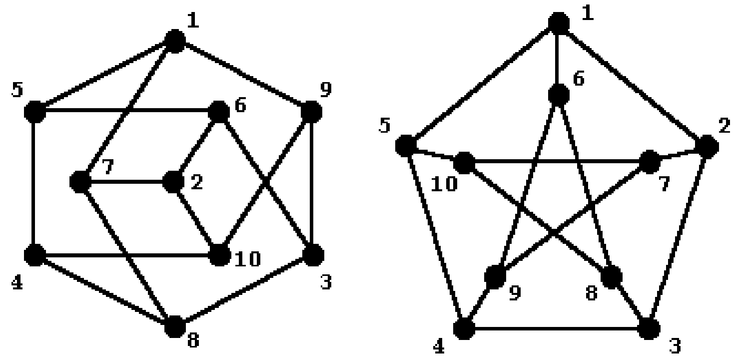
B_{33}

Подграфом (или частью графа **G = (V, E)**) называется такой граф **G' = (V', E')**, что $\mathbf{V'} \subseteq \mathbf{V}$ и две несмежные вершины в **G** несмежны в **G'**. Полным подграфом называется подграф, любая пара вершин которого смежна.

Остовным подграфом (суграфом) графа **G** называется любой его подграф, содержащий то же множество вершин, что и **G**.

9.2. Изоморфизм и гомеоморфизм

Графы $\mathbf{G_1 = (V_1, E_1)}$ и $\mathbf{G_2 = (V_2, E_2)}$ называются изоморфными (обозначение $\mathbf{G_1} \sim \mathbf{G_2}$), если между графами существует взаимно-однозначное отображение $\boldsymbol{\varphi}$**:** $\mathbf{G_1 \sim G_2}$ ($\mathbf{V_1 \sim V_2}$, $\mathbf{E_1 \sim E_2}$), которое сохраняет соответствие между ребрами (дугами) графов, т.е. для любого ребра (дуги) $\mathbf{e = (v, u)}$ верно: $\mathbf{e' = \varphi(v, u) = (\varphi(v), \varphi(u))}$ $\mathbf{(e \in E_1, e' \in E_2)}$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}$ называется изоморфным отображением. Иными словами, изоморфные графы различаются только обозначением вершин:



Одно из изоморфных отображений: (0, 0), (1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 2), (6, 1), (7, 4), (8, 9), (9, 8).

Характеристики графов, инвариантные относительно изоморфизмов графов (т.е. принимающие одинаковые значения на изоморфных графах), называются инвариантами графов.

Подразделением ребра $\mathbf{(v_1, v_2)}$ графа называется операция добавления в граф вершины $\mathbf{v'}$ и замены этого ребра на два смежных ребра $\mathbf{(v_1, v')}$ **и** $\mathbf{(v', v_2)}$**:** $\mathbf{V' = V + \{v'\}, E' = E - \{(v_1, v_2)\} + \{(v_1, v')\} + \{(v', v_2)}$.

Граф **G'** называется подразделением графа **G**, если он может быть получен из **G** путем конечного числа подразделений ребер.

Два графа называются гомеоморфными, если для них существуют изоморфные подразделения.

9.3. Пути и циклы

Путем в графе (или маршрутом в орграфе) называется чередующаяся последовательность вершин и ребер (или дуг в орграфе) вида $\mathbf{v_0, (v_0, v_1), v_1, \ldots, (v_{n-1}, v_n), v_n}$. Число **n** называется длиной пути. Путь без повторяющихся ребер называется цепью, без повторяющихся вершин – простой цепью. Путь может быть замкнутым ($\mathbf{v_0 = v_n}$). Замкнутый путь без повторяющихся ребер называется циклом (или контуром в орграфе); без повторяющихся вершин (кроме первой и последней) – простым циклом.

Утверждение 1. Если в графе существует путь, ведущий из вершины $\mathbf{v_0}$ в $\mathbf{v_n}$, то существует и простая цепь между этими вершинами.

Доказательство: простую цепь можно построить, «выкинув» из пути все циклы.

Граф называется связным, если существует путь между любыми двумя его вершинами, и несвязным – в противном случае. Несвязный граф состоит из нескольких связных компонент (связных подграфов).

Для орграфов понятие связности является более сложным: различают сильную связность, одностороннюю и слабую. Орграф называется сильно связным, если для любых двух его вершин $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ существует как маршрут из $\mathbf{v}$ в $\mathbf{u}$ ($\mathbf{v} \to \mathbf{u}$), так и из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \to \mathbf{v}$). Орграф называется односторонне связным, если для любых двух его вершин $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ существует по крайней один из маршрутов $\mathbf{v} \to \mathbf{u}$ или $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$. Наконец, орграф называется слабо связным, если связен неориентированный граф, получаемый из этого орграфа путем снятия ориентации с дуг. Очевидно, что любой сильно связный граф является односторонне связным, а односторонне связный – слабо связным, но не наоборот.

9.4. Деревья

Деревом называется произвольный связный граф без циклов.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{G = (V, E)}$ – связный граф, вершины $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{v_2}$ которого не смежны. Тогда в графе $\mathbf{G' = (V, E + (v_1, v_2))}$ существует простой цикл, проходящий через ребро $\mathbf{(v_1, v_2)}$.

Доказательство: поскольку $\mathbf{G}$ – связный граф, в нем существует путь из $\mathbf{v_2}$ и $\mathbf{v_1}$, а значит (по утверждению 1) и простая цепь $\mathbf{v_2 \ldots v_1}$. Следовательно, в графе $\mathbf{G'}$ существует путь $\mathbf{v_2 \ldots v_1 (v_1, v_2) v_2}$, который является простым циклом (по определению).

Лемма 2. Пусть $\mathbf{G = (V, E)}$ – связный граф, ребро $\mathbf{e = (v_1, v_2)}$ которого входит в некоторый цикл. Тогда граф $\mathbf{G' = (V, E - e)}$ – также связен, т.е. при удалении кольцевого ребра (ребра, входящего в некоторый цикл) из связного графа этот граф остается связным.

Доказательство: поскольку $\mathbf{G}$ – связный граф, в нем существует путь $\mathbf{S}$ между любыми двумя вершинами $\mathbf{v_i}$ и $\mathbf{v_j}$. Если $\mathbf{e}$ не входит в путь $\mathbf{S = v_i \ldots v_j}$, то этот путь существует и в графе $\mathbf{G'}$, а поэтому $\mathbf{G'}$ остается связным. Иначе ($\mathbf{e}$ входит в этот путь) $\mathbf{S = v_i \ldots v_1 (v_1, v_2) v_2 \ldots v_j}$. По условию $\mathbf{e}$ входит в некоторый цикл, следовательно, существует замкнутый путь $\mathbf{C =}$ $\mathbf{= v_2 (v_2, v_1) v_1 T v_2}$ (началом замкнутого пути можно считать любую его вершину), причем ребро $\mathbf{e = (v_1, v_2)}$ не входит в $\mathbf{T}$ (если существует путь между вершинами, то существует и путь, который является простой цепью (см. утверждение 1)). Но тогда существует путь $\mathbf{S' = v_i \ldots v_1 T v_2 \ldots v_j}$, в который не входит ребро $\mathbf{e = (v_1, v_2)}$, и, следовательно, этот путь существует в графе $\mathbf{G'}$.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{G = (V, E), p = |V|, q = |E|}$.

1. Число связных компонент в $\mathbf{G}$ больше либо равно $\mathbf{|V| - |E|}$ ($\mathbf{N_{комп} = p - q}$).

2. Если в **G** нет циклов, то число связных компонент в **G** равно **|V| – |E|** ($\mathbf{N_{комп} = p - q}$).

Доказательство: построим пустой граф с **p** вершинами (очевидно, в нем ровно **p** связных компонент) и будем добавлять ребра по одному.

При добавлении ребра возможно два варианта:

А – новое ребро соединяет вершины, находившиеся до этого в разных компонентах (в этом случае количество компонент уменьшается на единицу).

Б – новое ребро соединяет вершины, принадлежащие одной компоненте (число компонент не изменяется). Следовательно, при добавлении **q** ребер число компонент уменьшится не более чем на **q**, следовательно, количество компонент в графе будет больше либо равно **p – q**. Это доказывает утверждение 1.

В соответствии с леммой 1 при добавлении ребра в связный граф в нем появляется цикл. Если в графе нет циклов, это означает, что при добавлении ребер всегда происходил вариант А, иначе появились бы циклы. Следовательно, число компонент при каждом добавлении ребра уменьшалось на единицу и после добавления **q** ребер в графе будет ровно **p − q** компонент. Это доказывает утверждение 1.

Следствие 1 леммы 3: если **|E| – |V| = 2**, то граф **G = (V, E)** несвязен (следует непосредственно из леммы 3).

Теорема 1. Любой связный граф содержит подграф, являющийся деревом.

Доказательство: если в связном графе нет циклов, то он уже является деревом по определению. Иначе находим любое кольцевое ребро и удаляем его; в соответствии с леммой 2 граф остается связным.

Продолжаем процесс, пока в графе существуют циклы. В силу конечности графа этот алгоритм построит дерево за конечное число шагов.

Замечание: фактически доказано более сильное утверждение: любой связный граф содержит остовный подграф (подграф с тем же количеством вершин, что и сам граф), являющийся деревом.

Теорема 2. Для любого дерева **G = (V, E)** верно, что **|V| – |E| = 1**.

Доказательство: по определению, в дереве нет циклов, следовательно, в соответствии с леммой 3 в нем ровно **|V| – |E|** связных компонент. Однако (по определению) дерево связно, т.е. состоит из одной связной компоненты, поэтому **|V| – |E| = 1**.

Теорема 3. Следующие свойства графов эквивалентны:

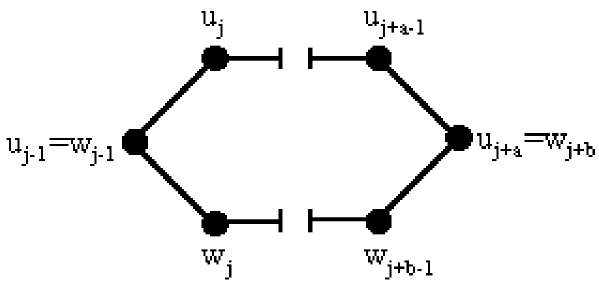
1. **G = (V, E)** – дерево.
2. Любые две вершины **G** соединены единственной простой цепью.
3. **G** – граф без циклов, у которого **|E| = |V| – 1**.
4. **G** – связный граф, у которого **|E| = |V| – 1**.
5. **G** – связный граф, но при удалении любого ребра он становится несвязным.

6. **G** – граф без циклов, но при добавлении любого ребра в нем появляется ровно один (с точностью до задания начальной вершины и направления обхода) простой цикл.

Доказательство: докажем теорему в последовательности (1) ⇔ (2), (2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1).

(1) ⇒ (2): допустим, что некоторые две вершины $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{v_2}$ графа **G** соединены по крайней мере двумя различными простыми цепями $\mathbf{L_1 = u_1 \ldots u_k}$, где $\mathbf{u_1 = v_1}$ и $\mathbf{u_k = v_2}$, и $\mathbf{L_2 = w_1 \ldots w_m}$, где $\mathbf{w_1 = v_1}$ и $\mathbf{w_m = v_2}$. Из того, что цепи являются простыми и различными, следует, что существует число **j**, $\mathbf{1 < j < \min(k, m)}$, такое, что $\mathbf{u_{j-1} = w_{j-1}}$, $\mathbf{u_j w'_j}$, … , $\mathbf{u_{j+a-1} w'_{j+b-1}}$, $\mathbf{u_{j+a} w_{j+b}}$, где $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = 1}$. Следовательно, в **G** существует цикл

$$\mathbf{C = u_{j-1}(u_{j-1}, u_j)u_j \ldots u_{j+a}(w_{j+b}, w_{j+b-1})w_{j+b-1} \,..\, w_j(w_j, w_{j-1})w_{j-1}:}$$



Получено противоречие с п. 1 теоремы 3.

(2)⇒(1):

А. Граф **G** является связным по определению связности (любые две вершины графа соединены цепью).

Б. Допустим, что в графе **G** существует цикл, проходящий через некоторую вершину $\mathbf{v}$: $\mathbf{C = v(v, u_1)u_1 \ldots u_k(u_k, v)v}$. Однако это означает, что между **v** и любой из вершин $\mathbf{u_i}$ существуют по крайней мере два различных пути $\mathbf{L_1 = v(v, u1)u1 \ldots u_{i-1}(u_{i-1}, u_i)u_i}$ и $\mathbf{L_2 = v(v, u_k)u_k \ldots u_{i+1}(u_{i+1}, u_i)u_i}$ (пути различны, так как (по определению) в цикле отсутствуют повторяющиеся ребра). В силу утверждения 1 из этих путей можно выделить простые цепи, которые также будут различны (в $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ нет совпадающих ребер). Таким образом, получается противоречие с п. 2 теоремы 3.

Из А, Б и определения дерева следует, что **G** является деревом.

(2)⇒(3) – по теореме 2.

(3)⇒(4) – по лемме 3.

(4) ⇒ (5): поскольку $\mathbf{|E| = |V| - 1}$, то после удаления ребра в новом графе будет $\mathbf{|V| - 2}$ ребер и по следствию 1 леммы 3 этот граф будет несвязным.

(5)⇒(6):

А. Докажем первую часть утверждения (**G** – граф без циклов): допустим, в **G** есть циклы; но тогда при удалении любого кольцевого ребра он останется связным, что противоречит теореме 3 п. 4.

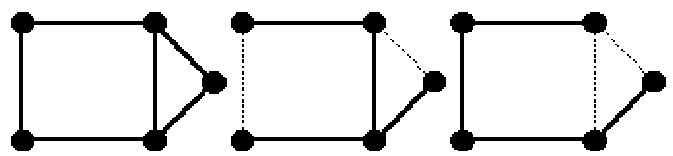
Б. Докажем вторую часть утверждения (при добавлении любого ребра в **G** появляется ровно один простой цикл): из связности графа и леммы 1 следует, что при добавлении любого ребра в **G** появляется как минимум один простой цикл; в силу теоремы 3 п. 2 этот простой цикл единственен (обратное означало бы, что в **G** существуют вершины, соединенные более чем одной простой цепью).

(6)$\Rightarrow$(1): допустим, **G** – не дерево, т.е. граф не связен или содержит циклы. Циклов не может быть в силу (5) $\Rightarrow$ (6) (А), поэтому остается следующий вариант: **G** – несвязен и состоит минимум из двух компонент. Но тогда при добавлении ребра между вершинами, принадлежащими разным компонентам, циклы не образуются, а это противоречит (5)$\Rightarrow$(6), (Б).

Остовным деревом (остовом) связного графа называется любой его остовный подграф, являющийся деревом.

Существование остовного подграфа для любого связного графа доказывается теоремой 1.

Общее число остовных деревьев связного графа может быть весьма велико. Так, для полного графа с **n** вершинами оно равно $\mathbf{n^{n-2}}$ (без доказательства). Ниже представлен граф и два его остовных дерева (удаленные ребра показаны пунктиром):



Для произвольного (возможно, несвязного) графа **G** остовное дерево определяется как любой его остовный подграф, не содержащий циклов и имеющий столько же компонент связности, что и **G**.

9.5. Цикломатическое число и фундаментальные циклы

Цикломатическим числом графа **G = (V, E)** с **k** связными компонентами называется число **n(G) = |E| – |V| +k**.

Фундаментальным циклом графа **G = (V, E)** с остовным деревом **T = (V, E')** называется простой цикл, получаемый в результате добавления в **T** одного из ребер **G**, не принадлежащего **E'**.

Утверждение 2. Количество фундаментальных циклов графа **G = (V, E)** при любом фиксированном остовном дереве **T = (V, E')** равно цикломатическому числу **G**.

Доказательство: согласно лемме 3, **k = |V| – |E'|**, следовательно, <количество ребер **G**, не принадлежащих **E'**> **= |E| – |E'| = |E| – (|V| – k) =**

$= \mathbf{n(G)}$. При добавлении любого из этих ребер в **T** появляется ровно один простой цикл в силу теоремы 3; все получаемые при этом простые циклы различны, так как каждый из них содержит по крайней мере одно уникальное ребро − то самое ребро **G**, не принадлежащее **E'**, которое было добавлено в дерево.

9.6. Планарные графы

Сопоставив вершинам графа точки на плоскости или в пространстве, а ребрам − линии, соединяющие точки, соответствующие концам ребра, можно получить диаграмму − визуальное представление данного графа. Очевидно, что для любого графа можно построить бесконечное количество таких диаграмм. Если на некоторой диаграмме среди точек, соответствующих вершинам графа, нет совпадающих, а линии, соответствующие ребрам графа, не имеют общих точек (за исключением концов), то эта диаграмма называется геометрической реализацией графа.

Теорема 1. Для любого графа существует геометрическая реализация в трехмерном евклидовом пространстве.

Доказательство:

1. Реализуем $|\mathbf{V}|$ точек, соответствующих вершинам графа, на одной прямой.

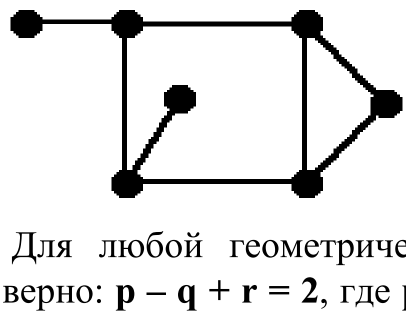
2. Проведем через эту прямую $|\mathbf{E}|$ различных полуплоскостей.

3. Реализуем каждое ребро в своей полуплоскости.

Возникает вопрос: любой ли граф можно реализовать на плоскости? Ответ отрицательный. Геометрическую реализацию на плоскости допускают лишь некоторые графы. Они называются планарными.

Для последующего изложения понадобится понятие грани. Неформально определим грани как части плоскости, на которые плоскость «разрезается» линиями геометрической реализации графа. Всегда существует неограниченная внешняя грань.

Ниже изображен граф, у которого 7 вершин, 8 ребер, 3 грани:

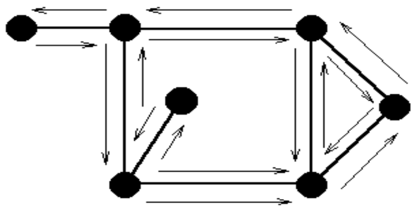


Формула Эйлера. Для любой геометрической реализации графа $\mathbf{G = (V, E)}$ на плоскости верно: $\mathbf{p - q + r = 2}$, где $\mathbf{p} = |\mathbf{V}|$, $\mathbf{q} = |\mathbf{E}|$, $\mathbf{r}$ − число граней (без доказательства).

Теорема 2. Если в связном планарном графе нет циклов длины меньше **k** и $\mathbf{k = 3}$, **то** $\mathbf{q \le k(p - 2)/(k - 2)}$, где $\mathbf{p} = |\mathbf{V}|$, $\mathbf{q} = |\mathbf{E}|$.

Доказательство (не совсем формальное): пусть граф реализован на плоскости и при этом получилось **r** граней. Пусть $\mathbf{q_i}$ − число сторон в **i**-й грани. Каждое ребро является стороной двух граней, поэтому $\mathbf{2q = Sum(q_i, i = 1..r)}$. По условию, в графе нет циклов длины меньше $\mathbf{k}$, но тогда $\mathbf{q_i = k}$ (так как стороны грани образуют цикл) и $\mathbf{2q = Sum(q_i, i = 1..r) – kr}$. По формуле Эйлера $\mathbf{r = 2 – p + q}$, следовательно, $\mathbf{2q = k(2 – p + q)}$, из чего следует доказываемое неравенство.

Ниже изображен граф, который имеет 8 ребер, 3 грани, 3 + 6 + 7 = 16 сторон:



Следствие 1 теоремы 2: для любого связного планарного графа без петель и кратных ребер выполняется неравенство $\mathbf{q \le 3(p – 2)}$, где $\mathbf{p = |V|}$, $\mathbf{q = |E|}$.

Доказательство: так как по условию в графе нет петель и кратных ребер, в нем нет и циклов длины меньше 3, поэтому, подставляя $\mathbf{k = 3}$ в неравенство теоремы 2, получаем $\mathbf{q \le k(p – 2)/(k – 2) = 3(p – 2)}$.

Теорема 3. Граф $\mathbf{K_5}$ непланарен.

Доказательство: $\mathbf{K_5}$ связен, в нем нет петель и кратных ребер, но следствие 1 теоремы 2 не выполняется – $\mathbf{q = 10 > 3(p – 2) = 9}$. Значит, $\mathbf{K_5}$ непланарен.

Теорема 4. Граф $\mathbf{K_{33}}$ непланарен.

Замечание: использование следствия 1 теоремы 2 здесь не поможет, так как $\mathbf{q = 9 < 3 (p – 2) = 12}$.

Доказательство: в $\mathbf{K_{33}}$ нет циклов длины меньше 4, поэтому применим неравенство теоремы 2 непосредственно (при $\mathbf{k = 4}$):
$\mathbf{q = 9 > 4(p – 2)/2 = 8}$. Следовательно, $\mathbf{K_{33}}$ непланарен.

Теорема Понтрягина – Куратовского (критерий планарности графов). Граф $\mathbf{G}$ планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $\mathbf{K_5}$ или $\mathbf{K_{33}}$.

Доказательство: необходимость следует из утверждений 3–6 (см. ниже), а также из того факта, что графы $\mathbf{K_5}$ и $\mathbf{K_{33}}$ непланарны (в соответствии с теоремами 3 и 4).

Утверждение 3: если графы $\mathbf{U_1}$ и $\mathbf{U_2}$ изоморфны, то $\mathbf{U_1}$ планарен тогда и только тогда, когда $\mathbf{U_2}$ планарен.

Доказательство: любая геометрическая реализация $\mathbf{U_1}$ является геометрической реализацией $\mathbf{U_2}$ (и наоборот).

Утверждение 4: любое подразделение $\mathbf{U'}$ графа $\mathbf{U}$ планарно тогда и только тогда, когда $\mathbf{U}$ планарен ($\Leftrightarrow$).

Доказательство:

($\Rightarrow$): граф **U'** планарен, следовательно, существует его геометрическая реализация на плоскости **R'**. Построим по **R'** плоскую геометрическую реализацию **R** графа **U**. Для этого объединим все линии **R'**, соответствующие ребрам **U'**, полученным в результате выполнения операций подразделения ребер. В силу существования **R** граф **U** является планарным;

($\Leftarrow$): граф **U** планарен, следовательно, существует его геометрическая реализация на плоскости **R**. Построим по **R** плоскую геометрическую реализацию **R'** графа **U'**. Для этого повторим в любой последовательности операции подразделения ребер, которые привели к построению **U'**. После выполнения каждой из этих операций будем разбивать линию, соответствующую подразделяемому ребру, на две линии (разбиение можно производить в любой точке, не совпадающей с концами линии). В силу существования **R'** граф **U'** является планарным.

Утверждение 5: если графы $\mathbf{U_1}$ и $\mathbf{U_2}$ гомеоморфны, то **U** планарен тогда и только тогда, когда $\mathbf{U_2}$ планарен ($\leftrightarrow$).

Доказательство:

($\Rightarrow$): по условию **U** и $\mathbf{U_2}$ гомеоморфны (по определению), поэтому существуют их изоморфные подразделения $\mathbf{U_1'}$ и $\mathbf{U_2'}$**.** По условию граф $\mathbf{U_1}$ планарен (по утверждению 4), граф $\mathbf{U_1'}$ планарен **P** (по утверждению 3), поэтому изоморфный ему граф $\mathbf{U_2'}$ планарен (по утверждению 4), следовательно, граф $\mathbf{U_2}$ планарен;

($\Leftarrow$): аналогично.

Утверждение 6: если подграф **U'** графа **U** непланарен, то **U** также непланарен.

Доказательство: допустим, что граф **U** планарен. Следовательно, существует его плоская геометрическая реализация **R**. Но тогда можно построить плоскую геометрическую реализацию **R'** графа **U'**: для этого достаточно удалить из **R** точки и линии, соответствующие тем вершинам и ребрам **U**, которых нет в **U'**. Из существования **R'** следует, что **U'** планарен – получили противоречие.

Достаточность теоремы доказывается гораздо сложнее. Существуют и другие критерии планарности графов.

9.7. Раскраски графов

Вершинной раскраской (далее просто раскраской) графа называется отображение множества вершин графа на конечное множество (множество цветов); **n**-раскраска графа – раскраска с использованием **n** цветов. Раскраска называется правильной, если никакие две вершины одного цвета не смежны. Очевидно, что для графа без петель всегда существует правильная раскраска в **|V|** цветов.

Хроматическим числом графа **G** называется минимальное число **n = c(G)**, такое, что существует правильная **n**-раскраска.

Лемма 1. В любом планарном графе без петель и кратных ребер существует вершина степени не более пяти.

Доказательство: допустим, что степени всех вершин превосходят 5. Тогда $\mathbf{2q = Sum(deg(v_i),\ i = 1..|V|) < 6p}$ и $\mathbf{q < 3p}$. Но по следствию 1 теоремы 2 должно выполняться неравенство $\mathbf{q \le 3(p-2) < 3p}$. Получили противоречие.

Теорема о пяти красках. Каждый планарный граф без петель и кратных ребер является не более чем 5-хроматическим.

Доказательство: индукцией по числу вершин.

При $\mathbf{p = 1}$ утверждение теоремы верно. Допустим, что утверждение верно для всех $\mathbf{p < p_0}$. Докажем, что тогда оно верно и для $\mathbf{p_0}$.

Рассмотрим планарный граф **G** без петель и кратных ребер с $\mathbf{p_0}$ вершинами; по лемме 1 в нем есть вершина $\mathbf{v_0}$ степени не более 5. По предположению индукции граф **G'**, получаемый удалением из **G** вершины $\mathbf{v_0}$ (очевидно, также планарный), может быть раскрашен не более чем в 5 цветов.

Предположение. Пусть $\mathbf{v_1, \dots v_k}$, $\mathbf{k = deg(v_0)}$ – все вершины-соседи вершины $\mathbf{v_0}$ и расположены по часовой стрелке относительно $\mathbf{v_0}$.

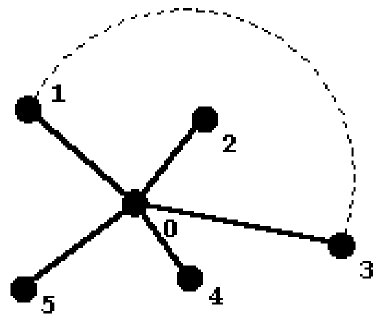
Если в раскраске вершин $\mathbf{v_1, \dots, v_k}$ используется не более 4 цветов, то «покрасим» вершину $\mathbf{v_0}$ в оставшийся 5-й цвет и получим правильную раскраску.

Осталось рассмотреть случай, когда в раскраске вершин $\mathbf{v_1, \dots, v_k}$ в графе **G'** используется 5 цветов ($\mathbf{k = 5}$). Пусть $\mathbf{c_i}$ – цвет вершины $\mathbf{v_i}$ $\mathbf{(i = 1..5)}$. Рассмотрим множество **A**, состоящее из вершины $\mathbf{v_1}$ и всех вершин графа **G**, исключая $\mathbf{v_0}$, в которые можно дойти из $\mathbf{v_1}$ только по вершинам цветов $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_3}$. Возможны два случая:

1. $\mathbf{v_3 \notin A}$.
2. $\mathbf{v_3 \in A}$.

В первом случае поменяем цвета вершин множества **A** $\mathbf{(c_1 < c_3)}$; окраска при этом останется правильной. Действительно, множество **A** состоит (по определению) из *всех* вершин цветов $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_3}$, в которые можно дойти из $\mathbf{v_1}$, поэтому среди вершин, смежных вершинам, принадлежащим **A**, нет вершин цветов $\mathbf{c_1}$ или $\mathbf{c_3}$. После замены цветов вершин множества **A** вершина $\mathbf{v_1}$ получит цвет $\mathbf{c_3}$, следовательно, можно использовать цвет $\mathbf{c_1}$ для «окраски» вершины $\mathbf{v_0}$ и получить таким образом правильную раскраску графа **G**.

Пример планарного графа:



Рассмотрим второй случай. Из принадлежности вершины $\mathbf{v_3}$ множеству **A** следует, что существует путь из $\mathbf{v_1}$ в $\mathbf{v_3}$ ($\mathbf{v_1} > \mathbf{v_3}$), проходящий только по вершинам цветов $\mathbf{c_1}$ и $\mathbf{c_3}$ (см. рисунок выше). Изучим цикл $\mathbf{L = v_1 > v_3(v_3,\ v_0)v_0(v_0,\ v_1)v_1}$ и замкнутую кривую, которая соответствует этому циклу в геометрической реализации графа. Вершина $\mathbf{v_2}$ находится внутри замкнутой кривой, а $\mathbf{v_4}$ – снаружи. Это следует, во-первых, из того, что линии, соответствующие ребрам графа в его геометрической реализации, не могут пересекаться (не считая концов), во-вторых – из вышеприведенного предположения. Определим множество **B**, состоящее из вершины $\mathbf{v_2}$ и всех вершин графа **G**, исключая $\mathbf{v_0}$, в которые можно дойти из $\mathbf{v_2}$ только по вершинам цветов $\mathbf{c_2}$ и $\mathbf{c_4}$. Вершина $\mathbf{v_4}$ не принадлежит **B**, поскольку любой путь из $\mathbf{v_2}$ в $\mathbf{v_4}$ должен проходить по крайней мере через одну вершину, принадлежащую циклу **L**, т.е. либо через вершину $\mathbf{v_0}$, либо через вершину, окрашенную в цвета $\mathbf{c_1}$ или $\mathbf{c_3}$. Следовательно, как и в первом случае, можно поменять цвета вершин множества **B** ($\mathbf{c_2} < \mathbf{c_4}$) и «покрасить» $\mathbf{v_0}$ в $\mathbf{c_2}$.

Теорема о четырех красках. Каждый планарный граф без петель и кратных ребер является не более чем 4-хроматическим.

Проблема четырех красок оставалась нерешенной в течение многих лет. Утверждается, что эта теорема была доказана с помощью компьютерной программы в 1976 году (Appel K., Haken W. Every Planar Map is Four Colorable (Contemporary Mathematics) // American Mathematical Society. Vol. 98. 1989). Краткое изложение идеи их доказательства имеется в источнике [4].

9.8. Графы с атрибутами

Во многих случаях элементам (вершинам и ребрам) графа ставятся в соответствие различные данные – атрибуты (метки). Если в качестве атрибутов используются целые или вещественные числа, то такие графы называют взвешенными. Фактически взвешенный граф – это функция, определенная на графе. В качестве атрибутов могут выступать и нечисловые данные, поэтому их называют графами с атрибутами помеченными (или атрибутированными (**A**-графами)). Например, структурные формулы химических соединений представляются молекулярными графами – **A**-графами, вершины которых соответствуют атомам химической структуры, а ребра – валентным связям между атомами. Для вершин молекулярного графа определен по крайней мере атрибут «номер атома в периодической таблице элементов», для ребер – «тип валентной связи (одинарная, двойная, тройная и др.)»; могут использоваться дополнительные атрибуты (например, «заряд атома»).

Для графов с атрибутами можно ввести усиленное определение изоморфизма: будем считать два ***A***-графа изоморфными, если они изоморфны в обычном смысле и, кроме того, изоморфное отображение сохраняет атрибуты (т.е. атрибуты соответствующих вершин и ребер в обоих графах совпадают).

9.9. Независимые множества и покрытия

Независимое множество вершин (НМВ) – множество вершин графа, никакие две вершины которого не инцидентны.

Максимальное независимое множество вершин (МНМВ) – НМВ, которое не содержится ни в каком другом НМВ.

Замечание: в данном определении «максимальность» означает «нерасширяемость»; в общем случае граф может иметь несколько МНМВ различной мощности.

Наибольшее независимое множество вершин – НМВ максимальной мощности. Мощность наибольшего НМВ (очевидно, это одно из МНМВ) называется вершинным числом независимости графа (а также неплотностью, числом внутренней устойчивости или числом вершинной упаковки графа); обозначение – **a(G)**.

Независимое множество ребер (НМР), или паросочетание, – множество ребер графа, никакие два ребра которого не инцидентны. Мощность наибольшего паросочетания называется числом паросочетания графа; обозначение – **n(G)**.

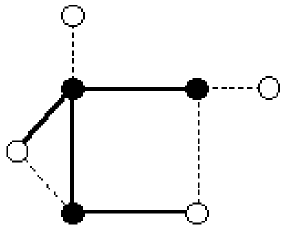
Доминирующее множество вершин (ДМВ) – такое множество вершин графа, что каждая вершина графа либо принадлежит ДМВ, либо инцидентна некоторой вершине, принадлежащей ДМВ.

Вершинное покрытие (ВП) – такое множество вершин графа, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине, принадлежащей ДМВ.

Мощность наименьшего вершинного покрытия называется числом вершинного покрытия графа; обозначение – **t(G)**.

Доминирующее множество ребер (ДМР), или реберное покрытие, – такое множество ребер связного графа, что каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру, входящему в ДМР. Мощность наименьшего ДМР называется числом реберного покрытия графа; обозначение – **r(G)**. На рисунке обозначены реберное покрытие графа (пунктиром), МНМВ (белые вершины) и вершинное покрытие (черные вершины).

Пример графа:



Величины **a(G)**, **n(G)**, **t(G)** и **r(G)** являются инвариантами графа. Между этими инвариантами существует связь, устанавливаемая леммами.

Лемма 1. Множество **S** является наименьшим вершинным покрытием графа **G = (V, E)** тогда и только тогда, когда **T = V(G)\S** является наибольшим независимым множеством вершин графа.

Доказательство:

($\Rightarrow$):

1. Докажем, что никакие две вершины, входящие в **T**, не инцидентны (т.е. **T** является НМВ). Допустим обратное: $\mathbf{S(v_i, v_j) \in E(G)}$, $\mathbf{v_i \in T}$, $\mathbf{v_j \in T}$. Но это означает, что ребро ($\mathbf{v_i, v_j}$) не покрывается множеством **S** – противоречие с определением ВП.

2. **T** является наибольшим НМВ в силу минимальности **|S|** и тождества **|S| + |V(G)\S| = |V(G)|.**

($\Leftarrow$):

1. Докажем, что каждое ребро **G** инцидентно хотя бы одной вершине **S** (т.е. **S** является ВП). Допустим обратное: $\mathbf{S(v_i, v_j) \in E(G)}$, $\mathbf{v_i \notin S}$, $\mathbf{v_j \notin S}$. Но это значит, что $\mathbf{v_i \in T}$, $\mathbf{v_j \in T}$– противоречие с определением НМВ.

2. Аналогично доказательству ($\Rightarrow$).

Следствие 1 леммы 1. Для любого графа **G = (V, E)** сумма числа вершинного покрытия и вершинного числа независимости постоянна и равна количеству вершин **G:** $\boldsymbol{\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|}$.

Лемма 2. Если граф **G = (V, E)** не имеет изолированных вершин, то сумма его числа паросочетания и числа реберного покрытия постоянна и равна количеству вершин **G:** $\boldsymbol{\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|}$.

Доказательство:

1. Пусть **C** – наименьшее реберное покрытие **G**, содержащее **r(G)** ребер. Рассмотрим подграф **GC** графа **G**, образованный множеством ребер **C** и инцидентными вершинами **G**; по определению покрытия в него входят все вершины **G**. Поскольку **C** является наименьшим, **GC** состоит из одной или большего количества компонент, каждая из которых является деревом (действительно, в противном случае можно было бы «выбросить» из них кольцевые ребра и получить покрытие меньшей мощности). По теореме 2 количество ребер в каждой компоненте $\mathbf{GS_i}$ графа **GC** на единицу меньше

количества вершин: $|\mathbf{E(GC_i)}| = |\mathbf{V(GC_i)}| - \mathbf{1}$. Просуммировав эти равенства для всех $\mathbf{i}$, получим $|\mathbf{E(GC)}| = |\mathbf{V(GC)}| - \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ – количество компонент в $\mathbf{GC}$, следовательно, $\mathbf{p} = |\mathbf{V(G)}| - \mathbf{r(G)}$. С другой стороны, если взять по одному ребру из каждой компоненты $\mathbf{GC}$, получим некоторое паросочетание, следовательно,

$$\mathbf{n(G)} < \mathbf{p} = |\mathbf{V(G)}| - \mathbf{r(G)} \text{ и } \mathbf{n(G)} + \mathbf{r(G)} < |\mathbf{V(G)}|. \qquad (9.1)$$

2. Пусть $\mathbf{M}$ – наибольшее паросочетание $\mathbf{G}$, содержащее $\mathbf{n(G)}$ ребер. Рассмотрим множество $\mathbf{U}$ вершин графа $\mathbf{G}$, не покрытых $\mathbf{M}$. Из определения паросочетания следует, что $|\mathbf{U}| = |\mathbf{V(G)}| - \mathbf{2}|\mathbf{M}| = |\mathbf{V(G)}| - \mathbf{2n(G)}$. Множество $\mathbf{U}$ является независимым (действительно, если бы две произвольные вершины $\mathbf{U}$ «связывались» ребром, то можно было бы добавить это ребро $\mathbf{M}$ и получить паросочетание большей мощности). Поскольку $\mathbf{G}$ по условию не имеет изолированных вершин, для каждой вершины, входящей в $\mathbf{U}$, существует ребро, покрывающее ее. Обозначим множество таких ребер через $\mathbf{S}$. Множества $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ не пересекаются, поэтому $|\mathbf{M} \cup \mathbf{S}| = |\mathbf{M}| + |\mathbf{S}| = \mathbf{n(G)} + |\mathbf{U}| = |\mathbf{V(G)}| - \mathbf{n(G)}$. Объединение $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$ является реберным покрытием графа по определению, следовательно,

$$\mathbf{r(G)} < |\mathbf{M} \cup \mathbf{S}| = |\mathbf{V(G)}| - \mathbf{n(G)} \text{ и } \mathbf{r(G)} + \mathbf{n(G)} < |\mathbf{V(G)}|. \qquad (9.2)$$

Из неравенств (9.1) и (9.2) следует результат леммы.

Дальнейшие результаты справедливы только для двудольных графов.

Теорема 1 (минимаксная теорема Кенига). Если граф $\mathbf{G}$ является двудольным, то $\mathbf{t(G)} = \mathbf{n(G)}$ (без доказательства).

Определение: совершенное паросочетание (1-фактор) – паросочетание, покрывающее все вершины графа.

Пусть $\mathbf{X}$ – произвольное подмножество вершин графа $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$. Обозначим через $\mathbf{G}\ (\mathbf{X})$ множество вершин $\mathbf{G}$, инцидентных вершинам $\mathbf{X}$.

Теорема 2 (теорема о свадьбах). Если $\mathbf{G}$ – двудольный граф с долями $\mathbf{P_1}$ и $\mathbf{P_2}$, то $\mathbf{G}$ имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|\mathbf{P_1}| = |\mathbf{P_2}|$ и по крайней мере одно из $\mathbf{P_i}$ $(\mathbf{i = 1..2})$ обладает тем свойством, что для любого $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{P_i}$ выполняется неравенство $|\mathbf{X}| < |\mathbf{G(X)}|$ (без доказательства).

Название теоремы связано со следующей задачей: требуется определить, возможно ли «переженить» группу юношей и девушек так, чтобы все остались довольны. Если допустить, что все симпатии взаимны (нереалистичное предположение), то задача сводится к нахождению совершенного паросочетания в двудольном графе, вершины одной из долей которого соответствуют юношам, другой – девушкам, а две вершины связаны ребром тогда и только тогда, когда юноша и девушка нравятся друг другу.

10. Задачи и алгоритмы

Кратчайшие пути

Многие задачи можно непосредственно свести к нахождению в графах кратчайших путей либо использовать в них поиск путей на одном из этапов решения.

Пути с минимальным количеством промежуточных вершин

Задача: найти путь между двумя заданными вершинами графа (орграфа), количество промежуточных вершин (и, соответственно, ребер) в котором минимально.

Для решения данной задачи существует эффективный алгоритм, имеющий линейную сложность как по числу вершин, так и по числу ребер. Он называется волновым (другие названия: поиск в ширину, алгоритм степного пожара).

Пример прикладной задачи: необходимо добраться на самолете из города **A** в город **B** при условии, что между ними нет прямого авиационного сообщения, и совершить при этом минимальное количество перелетов (при этом заданы возможные промежуточные аэропорты, а для каждой пары аэропортов известно, существует ли между ними прямой маршрут).

Решение: построим граф (орграф − если бывают «несимметричные» маршруты), вершины которого соответствуют всем возможным аэропортам, а ребра (дуги) − прямым маршрутам между ними. Задача сводится к нахождению маршрута с минимальным количеством промежуточных вершин между вершинами, соответствующими **A** и **B**.

Волновой алгоритм

Дано: непустой граф **G = (V, E)**. Требуется найти путь между вершинами **s** и **t** графа (**s** не совпадает с **t**), содержащий минимальное количество промежуточных вершин (ребер). Ниже описан алгоритм.

I

1. Каждой вершине $\mathbf{v_i}$ приписывается целое число $\mathbf{T(v_i)}$ − волновая метка (начальное значение $\mathbf{T(v_i) = -1}$).
2. Заводятся два списка – OldFront и NewFront (старый и новый «фронт волны»), а также переменная **T** (текущее время).
3. **OldFront := {s}**; **NewFront := {}; T(s) := 0**; **T := 0**.
4. Для каждой из вершин, входящих в OldFront, просматриваются инцидентные (смежные) ей вершины $\mathbf{u_j}$, и если $\mathbf{T(u_j) = -1}$, то $\mathbf{T(u_j) := T + 1}$, $\mathbf{NewFront := NewFront + \{u_j\}}$.
5. Если **NewFront :={},** то ВЫХОД («нет решения»).

6. Если **t** $\in$ **NewFront** (т.е. одна из вершин $\mathbf{u_j}$ совпадает с **t**), то найден кратчайший путь между **s** и **t** с **T(t) = T + 1** промежуточными ребрами; ВЫХОД («решение найдено»).

7. **OldFront := NewFront**; **NewFront := {}**; **T : = T + 1**; goto (4).

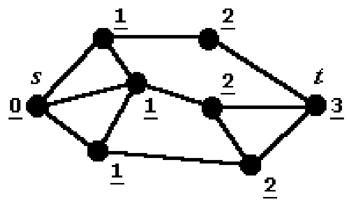
Замечание: на шаге 4 соседними вершинами для неориентированных графов считаются все смежные вершины, а для орграфов – вершины, в которые из данной вершины ведут дуги.

II

Если на шаге 6 была достигнута вершина **t**, то восстановить кратчайший путь можно следующим образом: среди соседей вершины **t** найдем любую вершину с волновой меткой **T(t) – 1**, среди соседей последней – вершину с меткой **T(t) – 2**, и так далее, пока не достигнем **s**.

Найденная последовательность вершин определяет один из кратчайших путей из **s** в **t**. На практике выгодно сохранять на шаге 4 информацию о том, из какой вершины волна пришла в вершину $\mathbf{u_j}$. Тогда восстановление пути осуществляется быстрее.

Разметка графа после выполнения волнового алгоритма:



Приведенное ниже доказательство корректности волнового алгоритма является хорошим примером того, что доказать почти очевидные утверждения бывает очень непросто. В дальнейшем алгоритмы будут приводиться, как правило, с менее подробным обоснованием.

Доказательство корректности волнового алгоритма. Под корректностью алгоритма понимается следующее:

А. Алгоритм завершает работу за конечное время.

Б. Если решение существует, то алгоритм находит правильное решение.

Будем называть итерацией волнового алгоритма очередное выполнение шагов 4–7 алгоритма.

А. Волновой алгоритм завершает работу за конечное число итераций. Это следует из конечности графа, а также из того, что на каждой итерации происходит либо уменьшение количества вершин графа, волновая метка которых равна -1 (на шаге 4), либо завершение работы алгоритма (на шаге 5).

В.

1. Докажем по индукции.

Предположение 1. К началу выполнения шага 4 алгоритма при заданном значении **T** волновые метки всех вершин $\mathbf{v_i}$, таких, что расстояние (т.е. количество ребер в кратчайшем пути) между **s** и $\mathbf{v_i}$ равно **T**, также равны $\mathbf{T((d(s, v_i) = T) \Rightarrow (T(v_i) = T))}$, и, кроме того, все эти вершины находятся в списке **OldFront**. Базис индукции: при **T = 0** предположение 1 выполняется (единственной вершиной, находящейся на расстоянии 0 от **s**, является сама вершина **s**; на шаге 3 она получит волновую метку 0 и будет занесена в **OldFront**); при **T = 1** предположе- ние 1 также выполняется (так как при **T = 0** все вершины, инцидентные *s*, получат волновую метку 1 и попадут сначала в **NewFront**, а затем, на шаге 7 алгоритма, **в OldFront**).

Предположение 2. Допустим, что предположение 1 выполняется для всех $\mathbf{T < T_0}$ ($\mathbf{T_0 > 1}$).

Рассмотрим все вершины $\mathbf{u_j}$, находящиеся на расстоянии $\mathbf{T_0}$ от **s:** $\mathbf{d(s, u_j) = T_0}$. Запишем кратчайший путь из **s** в $\mathbf{u_j}$ в виде **L =** $\mathbf{= (s(s, w_1)w_1\ldots(w_k, u_j)u_j)}$, где $\mathbf{k = T_0 - 1}$.

Путь $\mathbf{L' = (s(s, w_1)w_1\ldots(w_{k-1}, w_k)w_k)}$ является кратчайшим путем из **s** в $\mathbf{w_k}$ (в противном случае **L** не являлся бы кратчайшим путем из **s** в $\mathbf{u_j}$), его длина $\mathbf{T' = T_0 - 1 < T_0}$, поэтому в силу предположения 2 к началу выполнения шага 4 алгоритма при **T = T'**, во-первых, $\mathbf{T(w_k) = T'}$, и, во-вторых, $\mathbf{w_k}$ находится в **OldFront**. Вершины $\mathbf{w_k}$ и $\mathbf{u_j}$ являются смежными, поэтому на шаге 4 вершина $\mathbf{u_j}$ получит волновую метку $\mathbf{T' + 1 = T_0}$ и попадет в **NewFront**. На шаге 7 значение **T** будет увеличено на единицу, а **NewFront** скопирован в **OldFront**, следовательно, предположение 1 будет выполняться при $\mathbf{T = T_0}$.

2. Поскольку при работе алгоритма **T** «пробегает» все целые значения, начиная с 0 и кончая некоторым целым числом, большим либо равным 0, из 1 следует, что если волновая метка вершины не равна –1, то она равна расстоянию между **s** и этой вершиной:

$$\mathbf{((T(v_i) = a, a \neq -1) \Rightarrow (d(s, v_i) = a)).}$$

3. *Предположение 3*. Если решение существует, т.е. существует кратчайший путь из **s** в **t** длины **d(s, t)**, то выполнение шага 4 при **T' = d(s, t) – 1** будет иметь место.

Предположение 4. Единственной возможностью для завершения работы алгоритма при некотором **T'' < T'** является выход на шаге 5, но он возможен тогда и только тогда, когда ни одна из вершин, находящихся на расстоянии **T''** от **s**, не имеет инцидентных вершин, находящихся на расстоянии, большем **T''** от **s**.

Действительно, выход на шаге 5 происходит, если и только если список **NewFront** пуст, а это возможно, если и только если на данной итерации все вершины, инцидентные вершинам из **OldFront**, имеют волновые метки, не равные –1. Волновые метки этих вершин не могут быть больше **T''** (так как отличные от –1 значения были присвоены им на итерациях алгоритма при **T < T''**), следовательно, волновые метки находятся в диапазоне **[0..T'']**. В силу п. 2 волновые метки вершин, не равные –1, равны расстояниям между **s** и этими вершинами, что и доказывает предположение 4. Из предположения 4 следует, что путей между **s** и вершинами, находящимися на расстоянии **T > T''**, в том числе между **s** и **t**, не существует. Значит, выход на шаге 5 при **T'' < T'** не может произойти и предположение 3 верно.

4. Из п. 1–3 получается следующее.

Предположение 5. Волновые метки вершин $\mathbf{v_i}$, находящихся на расстоянии, меньшем **d(s, t)**, от **s**, равны этому расстоянию:

$$((d(v_i, s) < d(s, t)) \Rightarrow (T(v_i) = d(v_i, s))).$$

На некоторой итерации вершина **t** получит волновую метку **d(s, t)** и попадет в **NewFront**, следовательно, алгоритм завершится на шаге 6 той же итерации. Корректность используемого способа восстановления кратчайшего пути по волновым меткам вершин следует из предположения 5.

Существуют модификации приведенного здесь алгоритма, позволяющие находить:

1) кратчайшие пути между **s** и всеми другими вершинами графа;

2) все кратчайшие пути (либо не более чем заданное количество путей) между **s** и **t**.

В библиотеке AGraph реализованы различные варианты волнового алгоритма.

Пути минимального суммарного веса во взвешенном графе

Задача: найти путь (один из путей) минимальной суммарной длины между двумя заданными вершинами взвешенного графа (орграфа) с неотрицательными весами ребер (дуг).

Классическим алгоритмом решения данной задачи является алгоритм Дейкстры. При эффективной реализации временная сложность алгоритма в худшем случае равна **O(m + n log n)**, где **m = |E|**, **n = |V|**.

Пример прикладной задачи: необходимо добраться на самолете из города **A** в город **B** при условии, что между ними нет прямого авиационного сообщения, затратить при этом минимальные средства (при условии, что заданы возможные промежуточные аэропорты, для каждой пары аэропортов известно, существует ли между ними прямой маршрут, и если да, то известна минимальная стоимость перелета по этому маршруту).

Решение: построим взвешенный граф (орграф − если бывают «несимметричные» маршруты), вершины которого соответствуют всем возможным аэропортам, ребра (дуги) – прямым маршрутам между ними, а веса ребер (дуг) равны стоимости перелета (очевидно, неотрицательной) между соответствующими аэропортами. Задача сводится к нахождению в графе (орграфе) пути минимального веса между вершинами, соответствующими **A** и **B**.

Алгоритм Дейкстры

Дано: непустой взвешенный граф $\mathbf{G = (V, E)}$ с неотрицательными весами ребер (дуг). Требуется найти кратчайший путь от **s** к **t** ($\mathbf{s \neq t}$).

Инициализация:

1. Всем вершинам $\mathbf{v_i}$ приписывается метка – вещественное число: $\mathbf{d(s) = 0}$, $\mathbf{d(v_i) = +}$ – для всех $\mathbf{v_i \neq s}$.

2. Метки всех вершин, кроме **s**, считаются временными, метка **s** – постоянной.

3. Вершина **s** объявляется текущей (**c:= s**).

4. Все ребра (дуги) считаются непомеченными.

Основная часть:

По предположению индукции граф **G'**, получаемый удалением из **G** вершины $\mathbf{v_0}$ (очевидно, также планарный), может быть раскрашен не более чем в 5 цветов.

1. Для всех вершин $\mathbf{u_j}$, инцидентных текущей вершине **c**, метки которых являются временными, пересчитываем данные метки по формуле

$$\mathbf{d(u_j) := \min\{d(u_j),\ d(c) + Weight(c,\ u_j)\}}, \tag{10.1}$$

где $\mathbf{(c, u_j)}$ – ребро (дуга), соединяющее вершины **c** и $\mathbf{u_j}$, а $\mathbf{Weight(c, u_j)}$ – вес вершины; при наличии кратных ребер выбирается ребро с минимальным весом.

2. Если метки всех вершин являются постоянными либо равны + –, то путь не существует; ВЫХОД («нет решения»).

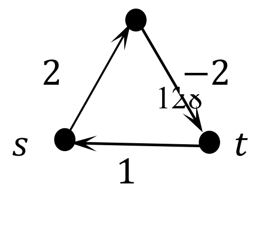
3. Иначе находим среди вершин с временными метками (среди всех таких вершин, а не только тех, чьи метки изменились в результате последнего выполнения шага 1) вершину **x** с минимальной меткой, объявляем ее метку постоянной, помечаем ребро (дугу) **(c', x)**, такое, что **d(x) = d(c') + Weight(c', x)**, где **c' = c** либо **c'** – вершина, бывшая текущей на одном из предыдущих шагов (**c' = c**, если на шаге 1 при $\mathbf{u_j = x}$ реализовалась вторая часть формулы (10.1)), и делаем эту вершину текущей (**c:= x**).

4. Если **c = t**, то найден путь длины **d(t)**: путь между **s** и **t**, который состоит только из помеченных на шаге 3 ребер (дуг) (можно доказать, что он существует и единственен); ВЫХОД («решение найдено»).

5. Иначе переходим на шаг 1.

Алгоритм Дейкстры не всегда находит правильное решение в случае произвольных весов ребер (дуг) графа.

Для орграфа алгоритм Дейкстры найдет маршрут **s (s, t) t** длины **1** между вершинами **s** и **t**, а не минимальный маршрут длины **2 + (–2)** = 0, проходящий через третью вершину графа:



Кратчайшее остовное дерево

Задача: найти кратчайшее остовное дерево взвешенного графа.

Пример прикладной задачи: необходимо проложить линии коммуникаций (дороги, линии связи, электропередач и т.п.) между **n** заданными «точечными» объектами при условиях: во-первых, известны расстояния между каждой парой объектов (это может быть геометрическое расстояние или стоимость прокладки коммуникаций между ними), а во-вторых, объекты могут быть связаны как непосредственно, так и с участием произвольного количества промежуточных объектов.

При допущении, что разветвления возможны только в этих же **n** объектах, задача сводится к нахождению кратчайшего остовного дерева (SST − Shortest Spanning Tree, или MST − Minimal Spanning Tree) во взвешенном графе, вершины которого соответствуют заданным объектам, а веса ребер равны расстояниям между ними. Если каждая пара вершин соединена ребром, то граф является полным и решение существует всегда, в противном случае решение существует тогда и только тогда, когда граф связен (отсутствие ребра между двумя вершинами означает невозможность прямой связи между соответствующими объектами).

Замечание: в случае введения дополнительных точек разветвления длина кратчайшего дерева, включающего все исходные точки, а также некоторое количество новых, может быть меньше длины кратчайшего дерева, построенного только на исходных точках. Если допустить, что точки разветвления не произвольны, а берутся из некоторого множества, то задачу можно сформулировать так: построить кратчайшее дерево, покрывающее заданное подмножество вершин взвешенного графа. Данная задача, называемая задачей Штейнера, является чрезвычайно сложной с вычислительной точки зрения и может быть практически решена только при небольшом количестве дополнительных вершин. В то же время существует эффективный приближенный алгоритм, строящий дерево, длина которого превышает длину кратчайшего дерева не более чем в два раза.

В отличие от задачи Штейнера, задача поиска кратчайшего остовного дерева допускает эффективное решение. Ниже будут рассмотрены два алгоритма решения этой задачи.

Алгоритм Краскала (АК)

Вход: связный взвешенный граф **G = (V, E)**, **n = |V|**, **m = |E|**.

Выход: SST − кратчайшее остовное дерево **G**.

1. **SST'** = <пустой граф с **n** вершинами>.
2. **k = 0**.
3. Если **|E(SST')| = n − 1**, то **SST = SST'**; КОНЕЦ.
4. **k = k + 1**.
5. **e =** < **k**-е по возрастанию весов ребро графа **G**>.

6. Если добавление ***e*** в **SST'** не приводит к появлению цикла, то добавить его в **SST'**.

7. Перейти на шаг 3.

Доказательство корректности АК. Алгоритм Краскала завершает работу за конечное число шагов и строит остовное дерево графа, так как он является частным случаем следующего алгоритма построения остовного дерева графа (без весов).

Алгоритм построения остовного дерева графа (ST)

Вход: связный граф **G = (V, E)**, **n = |V|**, **m = |E|**.

Выход: **ST** – остовное дерево графа **G**.

1. Занумеровать произвольным образом ребра графа **G**.
2. **ST' =** <пустой граф с **n** вершинами>.
3. **k = 0**.
4. Если **|E(ST')| = n – 1**, то **ST = ST'**; КОНЕЦ.
5. **k = k + 1**.
6. **e =** <**k**-е ребро графа **G**>.
7. Если добавление **e** в **ST'** не приводит к появлению цикла, то добавить его в **ST'**.
8. Перейти на шаг 4.

Доказательство корректности алгоритма ST:

А. Докажем, что алгоритм **ST** завершает работу не более чем за **m** шагов, т.е. на шаге 4 при некотором **k ≤ m** выполняется равенство **|E(ST')| = n – 1**.

Предположение 6. Допустим обратное: **|E(ST')| < n – 1** при **k = m** (*).

После выполнения шага 2 алгоритма **|V(ST')| = n**, следовательно, граф **ST'** не является связным (по следствию 1 леммы 3). Рассмотрим два произвольных связных компонента графа **ST'**: графы **T'** и **T''**.

Предположение 7. В **G** не может существовать ни одного ребра, один из концов которого лежал бы в **T'**, а другой – в **T''**. В противном случае такое ребро было бы добавлено в **ST'** при некотором **k ≤ m** на шаге 7 алгоритма, поскольку это ребро заведомо не привело бы к появлению цикла. Но из предположения 7 следует, что **G** несвязен. Получили противоречие с предположением 6.

В. Получаемый подграф **ST** является деревом по теореме 3 и является остовным деревом по определению, так как в него входят все вершины графа **G**.

АК является вариантом алгоритма **ST**, в котором ребра занумерованы по возрастанию весов.

Докажем индукцией по числу ребер, что получаемое в результате работы **АК** остовное дерево является кратчайшим.

Базис индукции: при $\mathbf{m = 1}$ остовное дерево единственно, поэтому дерево, которое строит **АК**, является кратчайшим.

Допустим, что **АК** строит **SST** для всех графов $\mathbf{G = (V, E)}$, таких, что $\mathbf{|E(G)| = m}$.

Докажем, что **АК** строит **SST** для графа $\mathbf{G' = (V', E')}$: $\mathbf{|E(G')| = m + 1}$. Рассмотрим ребро $\mathbf{e' \in E(G')}$, вес которого максимален. Возможны два варианта: **e'** – кольцевое; **e''** – ациклическое.

Рассмотрим первый случай. Удалим **e'** из **G'**, получим связный граф $\mathbf{G'' = (V', E' \backslash e')}$. В силу предположения индукции **АК** строит его **SST**. Вернемся к графу **G'**: в силу максимальности веса **e'** **АК** обработает **e'** в последнюю очередь, поэтому при $\mathbf{k = m}$ граф **SST'k(G')** совпадает со **SST(G'')**. При $\mathbf{k = m + 1}$ ребро **e'** не будет добавлено к **SST'(G')**, так как это привело бы к возникновению цикла, следовательно, **SST'(G')** совпадает с **SST(G'')**. Остается доказать, что при добавлении в связный граф ребра, вес которого не меньше, чем вес любого другого его ребра, длина кратчайшего остовного дерева графа не уменьшается. Но это верно в силу леммы (см. ниже). Таким образом, длина кратчайшего остовного дерева **G'** не меньше длины кратчайшего остовного дерева **G''**. Это минимальное значение достигается на **SST(G')**, следовательно, **SST(G')** является кратчайшим остовным деревом графа **G'**.

Лемма. Пусть $\mathbf{G = G(V, E)}$ – связный взвешенный граф:

$$\mathbf{G' = (V, E + e'),\ Weight(e') \le Weight(e),\ e'' \in E(G)}. \qquad (10.2)$$

Тогда существует кратчайшее остовное дерево графа **G'**, в которое не входит ребро **e'.** Если

$$\mathbf{Weight(e') > Weight(e),\ e'' \in E(G),} \qquad (10.3)$$

то **e'** не входит ни в какое кратчайшее остовное дерево **G'**.

Доказательство: допустим, **e'** входит в кратчайшее остовное дерево $\mathbf{T = SST(G')}$ графа **G'**. Удалим из **T** ребро **e'**: **T** распадется на два дерева – $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$. Найдем в графе **G** ребро $\mathbf{e'' \in E(G)}$, один из концов которого лежит в $\mathbf{T_1}$, а второй – в $\mathbf{T_2}$: $\mathbf{e'' = (v, u)}$, $\mathbf{v \in T_1}$, $\mathbf{u \in T_2}$ (такое ребро существует, так как в противном случае **G** не был бы связным). Соединим деревья $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ ребром **e''**: получим дерево **T'**, которое является остовным деревом графа **G'**, причем в силу выражения (10.2) $\mathbf{Weight(T') = Weight(T_1) + Weight(T_2) + Weight(e'') \le Weight(T_1) + Weight(T_2) + Weight(e') = Weight(T)}$ – построили остовное дерево небольшого суммарного веса (длины), в которое не входит ребро **e'**; в случае выражения (10.3), очевидно, $\mathbf{Weight(T') < Weight(T)}$.

Рассмотрим второй случай. Удалим **e'** из **G'**; получим граф $\mathbf{G'' = (V', E' \backslash e')}$, состоящий из двух связных компонент $\mathbf{G''_1}$ и $\mathbf{G''_2}$, количество ребер в каждой из которых не превосходит **m**. В силу предположения индукции **АК** построит их **SST**. Как и в первом случае, при $\mathbf{k = m}$ граф **SST'k(G')** совпадает со **SST(G'')**. При $\mathbf{k = m + 1}$ ребро **e'** будет добавлено в **G'** на шаге 7 **АК**, поэтому $\mathbf{Weight(SST'_{m+1}(G'))} =$ $= \mathbf{Weight(SST(G''_1))} + \mathbf{Weight(SST(G''_2))} + \mathbf{Weight(e')}$. Однако это минимальное возможное значение веса кратчайшего остовного дерева **G'**, следовательно, **АК** построил кратчайшее остовное дерево **G'**.

Алгоритм Прима

Определим расстояние между произвольной вершиной **v** взвешенного графа **G = (V, E)** и некоторым его подграфом $\mathbf{G' \subseteq G}$ как минимальный вес ребра, одним из концов которого является **v**, а другой лежит в **G'**: $\mathbf{d(v, G') = min_{(v, w) \in E(G),\ w \in G'} Weight(v, w)}$.

1. **SST'=**<граф, состоящий из одной произвольной вершины графа **G**>.
2. Если **|E(SST')| = n – 1**, то **SST = SST'**; КОНЕЦ.
3. Среди множества **I** вершин графа **G**, не входящих в **SST'**, но инцидентных хотя бы одной вершине из **SST'** ($\mathbf{I = \{u \mid u \in V(G), u \in SST'}$, $\mathbf{(u, v) \in E(G), v \in SST'\}}$), найти вершину $\mathbf{w \in I}$, расстояние которой до **SST'** минимально: $\mathbf{d(w, SST') = min_{v \in I}\, d(v, SST')}$.
4. Добавить ребро (**w, u**), на котором достигается минимальное расстояние **d(w, SST'),** в **SST'**.
5. Перейти на шаг 2

(без доказательства – можно доказать по аналогии с **АК**).

Библиографический список

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.

2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.

3. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ / пер. с англ. Л.Е. Садовского; под ред. Л.Я. Куликова. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 287 с.

4. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.

5. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. 3-е изд. М.: Наука, 1983. 48 с.

6. Маркушевич А.И. Деление с остатком в арифметике и алгебре: пособие для учителей математики сред. школы и студентов пед. вузов. М. – Л.: АПН РСФСР, 1949. 212 с.

7. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1984. 144 с.

8. Карпушина Н.М. «Liber abaci» Леонардо Фибоначчи // Математика в школе. 2008. № 4. URL: https://n-t.ru/tp/in/la.htm (дата обращения: 23.08.2008).

9. Веретенников Б.М., Белоусова В.И. Дискретная математика: учебное пособие. Екатеринбург: Урал. ун-т, 2014. Ч. I. 132 с.