МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.В. Ганичева, А.В. Ганичев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В MS EXCEL

Учебное пособие

Тверь 2023

УДК 519.6:004.9
ББК 22.19:16.3

Рецензенты: профессор кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», доктор технических наук, профессор, академик РАЕН Попов П.Г.; доцент кафедры математической статистики и системного анализа ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», кандидат физико-математических наук, доцент Лесик А.И.

Ганичева А.В., Ганичев А.В. Численные методы высшей математики в MS Excel: учебное пособие. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2023. 152 с.

Рассмотрены численные методы решения систем линейных уравнений, нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, численное дифференцирование и интегрирование, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а также вопросы аппроксимации и интерполяции функций.

Предназначено для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, магистров и студентов технических вузов.

ISBN 978-5-7995-1285-9

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие состоит из введения, восьми глав, библиографического списка и приложения.

В первой главе рассмотрены методы решения систем линейных уравнений. Разобран метод Гаусса и использование инструмента «Поиск решения» для систем линейных уравнений. Показано, что применение инструмента MS Excel «Поиск решения» основано на векторе невязок и сведении решения систем линейных уравнений к оптимизационной задаче.

Вторая глава посвящена способам решения нелинейных уравнений. Изложена методика нахождения корней нелинейного уравнения, описаны методы уточнения значений действительных корней. Рассмотрены методы половинного деления (дихотомии) и касательных Ньютона, а также способы уточнения корней нелинейного уравнения инструментами MS Excel «Подбор параметра» и «Поиск решения».

В третьей главе изложены вопросы решения систем нелинейных уравнений и исследования квадратичных форм. Приведены примеры решения систем нелинейных уравнений графическим методом, с помощью табулирования функции и инструмента «Поиск решения». Графически в MS Excel построены поверхности, иллюстрирующие решение систем нелинейных уравнений.

В четвертой главе рассмотрены методы численного дифференцирования: правой, левой и центральной конечных. Построены графики в MS Excel значений производной, полученные различными методами. Изложен метод вычисления параметрической производной.

Пятая глава посвящена вопросам численного интегрирования. Изложены основные методы численного интегрирования: методы левых, правых и средних прямоугольников, трапеций и Симпсона. Рассмотрено правило Рунге оценки погрешности интегрирования. На конкретном примере показано применение численных методов вычисления определенных интегралов в MS Excel, а также исследована зависимость точности вычисления интеграла от числа шагов интегрирования. Показано, как вычислять двойной интеграл в MS Excel.

В шестой главе рассмотрены численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Эйлера и Рунге – Кутта), аналитическое решение дифференциальных уравнений и реализация методов Эйлера и Рунге – Кутта в MS Excel.

Седьмая глава посвящена вопросам аппроксимации функций (интерполяции и сглаживанию-построению уравнения регрессии). На примерах, решенных аналитически и реализованных в MS Excel, показано построение интерполяционных полиномов (канонического, Лагранжа, Ньютона), а также линейное интерполирование. Разработан способ аппроксимации функций полиномом любой степени (в том числе выше шестой), а также другими аналитическими функциями по МНК.

В восьмой главе рассмотрен один из численных методов оптимизации – использование «Таблицы данных». Изложены вопросы организации оптимального движения автобусов для ряда показателей: скорости, времени на остановках, числа автобусов, количества промежуточных остановок.

В конце каждой главы приведены задания для самостоятельной работы. Различная сложность заданий делает возможной дифференцированную форму обучения.

Библиографический список, состоящий из 40 источников научной и учебно-методической литературы, отражает уровень современных достижений в области цифровых технологий, а также отсылает к типовым учебным пособиям и методическим разработкам по учебной дисциплине «Численные методы».

В приложении приведены основные производные и правила дифференцирования, основные интегралы и правила интегрирования, разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.

Работа с данным учебным пособием предполагает знание учащимися основ работы с табличным процессором MS Excel и владение базовыми навыками работы в его среде.

В учебное пособие включены не все типовые разделы указанной учебной дисциплины, а лишь те, которым уделяется недостаточно внимания в курсе «Информатика».

Авторы выражают признательность рецензентам – Павлу Георгиевичу Попову и Александре Ильиничне Лесик.

ГЛАВА 1
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Общие сведения о системах линейных уравнений и методах их решения

1.1.1. Системы линейных уравнений

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из основных задач линейной алгебры. Она встречается в многочисленных практических ситуациях. Системы линейных уравнений используются в экономике при решении задач управления и планирования производства, организации логистических маршрутов (транспортная задача), размещения оборудования. Системы линейных уравнений применимы не только в области экономики, но и в военном деле, а также при моделировании технологических, физических, химических и биологических процессов.

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где m и n – произвольные натуральные числа;

a_i и b_j – заданные числа, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$;

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ – неизвестные переменные, которые подлежат определению;

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ – **свободные члены системы**.

Система называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Коэффициенты при неизвестных в системе (1.1) образуют матрицу A размера $m \times n$, которая называется **матрицей системы** и при добавлении справа столбца свободных членов превращается в **расширенную матрицу** $\overline{A}$ системы, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Запишем систему (1.1) в матричной форме. Обозначим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1.1) запишется в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \tag{1.2}$$

где A – матрица коэффициентов при переменных;

X – матрица-столбец переменных;

B – матрица-столбец свободных членов.

Решением системы (1.1) называется любая совокупность чисел $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, которая, будучи подставленной в систему (1.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$, обращает все уравнения системы в тождество. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной** в противном случае. Ясно, что любая однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение: $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \cdots,\ x_n = 0$.

Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**, а имеющая более одного решения – **неопределенной**.

Две системы называются **эквивалентными (равносильными)**, если каждое решение первой является решением второй и каждое решение второй является решением первой. При этом если некоторое уравнение можно представить в виде суммы других уравнений, умноженных на некоторые числовые множители, то это уравнение будет следствием других уравнений и его можно исключить из системы.

Вопрос о разрешимости системы (1.1) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A системы равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$ этой системы.

Пусть $r < n$, r переменных $x_1, x_2, \cdots, x_r$ называются **базисными,** если минор матрицы (базисный минор), составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются **свободными**. Решение системы (1.2), в котором все неосновные переменные равны нулю, называется **базисным решением**. При решении системы оставляются только те уравнения, коэффициенты которых определяют базисный минор, так как остальные уравнения являются их следствиями. Свободные переменные переносятся в правую часть уравнений и полагаются равными произвольным действительным числам; через эти переменные выражаются базисные.

На практике для решения и исследования системы нет необходимости вычислять ранги матриц A и $\overline{A}$. Достаточно сразу применить метод Гаусса, который будет рассмотрен в § 1.2.

1.1.2. Методы решения систем линейных уравнений

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы – прямые и итерационные. Прямые методы используют алгоритмическое преобразование формульных выражений для вычисления неизвестных значений переменных. С помощью этих методов задача решается на основе выполнения заранее известного числа операций. Среди прямых методов решения систем линейных уравнений, реализуемых с помощью MS Excel, наиболее распространенными являются методы Гаусса, обратной матрицы, с использованием формул Крамера.

Методы решения систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера достаточно обстоятельно рассмотрены в учебно-методической литературе (см., например, [36]). Поэтому в данном учебном пособии рассмотрим только метод Гаусса и использование инструмента «Поиск решения».

Другую группу методов решения систем линейных уравнений образуют итерационные методы. Они осуществляют подбор значений переменных, чтобы после подстановки их значений в уравнения системы получились (с заданной степенью точности) равенства. Подбор значений переменных осуществляется посредством последовательных шагов, которые называются **итерациями**. Вначале задается некоторое начальное приближенное решение. После этого с помощью некоторого алгоритма осуществляется итерационный процесс уточнения решения. Итерации проводятся до получения решения с заданной точностью. Объем требуемых вычислений для итерационных методов заранее определить сложно. К данной группе относятся методы простой итерации, Якоби, Зейделя и др.

В MS Excel есть специальное средство, позволяющее решать многие задачи, а именно приложение MS Excel (инструмент, надстройка «Поиск решения»). Это средство позволяет решать системы линейных уравнений, нелинейные уравнения и их системы, производить безусловную и условную оптимизацию, решать задачи линейного программирования, а также осуществляет итерационный поиск решения.

В настоящем учебном пособии среди итерационных методов решения систем линейных уравнений рассмотрим только средство «Поиск решения».

§ 1.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса является наиболее универсальным и эффективным и заключается в последовательном исключении переменных.

Рассмотрим решение системы (1.1) m линейных уравнений с n переменными.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов, называемых прямым и обратным ходом. На первом этапе система уравнений (1.1) с помощью элементарных преобразований приводится к равносильной системе трапецеидального или треугольного вида. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из указанной треугольной системы. Начиная с последних (по номеру) переменных находятся все остальные. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему, а ее расширенную матрицу.

Система линейных уравнений является системой **трапецеидального вида**, если расширенная матрица имеет вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array}\right),$$

где элементы a_{ii} $(i = 1,2)$ отличны от нуля; они называются **угловыми элементами**; ниже этих элементов стоят нули, выше – любые элементы.

Система линейных уравнений называется системой **треугольного вида**, если ее расширенная матрица имеет вид

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right),$$

т. е. это квадратная матрица, угловые (диагональные элементы) которой отличны от нуля, ниже главной диагонали стоят нули, выше – любые элементы.

Элементарные преобразования системы представляют собой:

1) умножение уравнения на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на произвольное число;

3) перемену местами двух уравнений.

В результате получается система, равносильная исходной.

Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное преобразование над строками расширенной матрицы этой системы, а именно:

1) умножение строки матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке другой, умноженной на произвольное число;

3) перемена местами двух строк.

Исходя из определения ранга матрицы, можно утверждать, что ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях и равен числу угловых элементов матрицы трапецеидального или треугольного вида.

Рассмотрим метод Гаусса на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными сначала аналитически, а затем в MS Excel.

Пример 1.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Первую строку, умноженную на 3 и 4, вычитаем соответственно из второй и третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 9 & -4 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на –5 и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, прямой ход закончен, система приведена к треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 - 4x_3 = 1, \\ 11x_3 = -1. \end{cases}$$

Начинаем обратный ход: $x_3 = -1/11$. Подставив это значение во второе уравнение системы, получим $x_2 = 7/11$. Подставив x_2 и x_3 в первое уравнение, найдем $x_1 = 3/11$.

Ответ: $x_1 = 3/11 = 0{,}27273$, $x_2 = 7/11 = 0{,}63636$, $x_3 = -1/11 = -0{,}09091$.

Рассмотрим решение в MS Excel.

Коэффициенты запишем в матрицу *A*. Свободные члены – в матрицу *B*:

	A	B	C	D
1		*A*		*B*
2	1	1	-1	1
3	3	2	1	2
4	4	-1	5	0

Если в первой ячейке матрицы *A* оказался нуль, нужно поменять местами строки, чтобы здесь оказалось отличное от нуля значение.

Приведем все коэффициенты при x_1 (кроме первого уравнения) к нулю.

Скопируем первую строку расширенной матрицы в ячейки A6:D6. Отнимем от второй строки первую, умноженную на отношение коэффициентов при x_1 второго и первого уравнения. Для этого введем в ячейку A7 формулу =A3:D3-$A$2:$D$2*(A3/$A$2). Значения в ячейках B7:D7 рассчитаем с помощью формулы массива. Выделим диапазон A7:D7, нажмем функциональную клавишу F2 и сочетание клавиш Ctrl + + Shift + Enter. Произведем автозаполнение диапазона A8:D8:

A7 fx {=A3:D3-$A$2:$D$2*(A3/$A$2)}

	A	B	C	D	E	F
1		*A*		*B*		
2	1	1	-1	1		
3	3	2	1	2		
4	4	-1	5	0		
5						
6	1	1	-1	1		
7	0	-1	4	-1		
8	0	-5	9	-4		

Приведем к нулю коэффициенты перед x_2 в третьем уравнении. Копируем строки 6 и 7 (только значения) и вставляем в строки 10 и 11. Отнимем от третьей строки вторую, умноженную на отношение коэффициентов при x_2 третьего и второго уравнения. Для этого введем в ячейку A12 формулу =A8:D8-$A$7:$D72*(B8/$B$7). Значения в ячейках B12:D12 рассчитаем с помощью формулы массива MS Excel. Получим {0; –11; 1}:

A12 f_x {=A8:D8-$A$7:$D7*(B8/$B$7)}

	A	B	C	D	E	F
1		*A*		*B*		
2	1	1	-1	1		
3	3	2	1	2		
4	4	-1	5	0		
5						
6	1	1	-1	1		
7	0	-1	4	-1		
8	0	-5	9	-4		
9						
10	1	1	-1	1		
11	0	-1	4	-1		
12	0	0	-11	1		

Прямой ход закончен, начинаем обратный ход с последней строки полученной матрицы. Все элементы данной строки делим на коэффициент при x_3. Элементы матрицы располагаем в диапазоне ячеек A14:D16. Введем в ячейку A16 формулу =A12:D12/C12. Значения в ячейках B16:D16 рассчитаем с помощью формулы массива. Получим

16	0	0	1	-0,09091

Отнимем от второй строки уравнения новую третью строку, умноженную на коэффициент при x_3 второй строки. Разность разделим на коэффициент при x_2 второй строки. Для этого в ячейку A15 введем формулу =(A11:D11-A16:D16*C11)/B11. Значения в ячейках B15:D15 рассчитаем с помощью формулы массива (Ctrl + Shift + Enter). Имеем

15	0	1	0	0,636364
16	0	0	1	-0,09091

От первой строки отнимаем вторую и третью, умноженные на соответствующие коэффициенты при x_2 и x_3. Разность делим на коэффициент при x_1 первой строки. Для этого в ячейку A14 введем формулу =(A10:D10-A15:D15*B10-A16:D16*C10)/A10.

В последнем столбце полученной матрицы получаем корни уравнения (выделены цветом):

14	1	0	0	0,27273
15	0	1	0	0,63636
16	0	0	1	-0,09091

Сделаем проверку в соответствии с формулой (1.2): $A \cdot X = B$.

Выделим диапазон F2:F4. В ячейку F2 введем формулу =МУМНОЖ(A2:C4;D14:D16). С помощью комбинации Ctrl + Shift + Enter получим матрицу, которая совпадает с матрицей *B*, т. е. найденные значения являются корнями заданной системы и совпадают с решением системы аналитическим методом:

F2 {=МУМНОЖ(A2:C4;D14:D16)}

	A	B	C	D	E	F
1		*A*		*B*		
2	1	1	-1	1		1,00000
3	3	2	1	2		2,00000
4	4	-1	5	0		0,00000
5						
6	1	1	-1	1		
7	0	-1	4	-1		
8	0	-5	9	-4		
9						
10	1	1	-1	1		
11	0	-1	4	-1		
12	0	0	-11	1		
13						
14	1	0	0	0,27273		
15	0	1	0	0,63636		
16	0	0	1	-0,09091		

Пример 1.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу и, совершив элементарные преобразования, будем иметь

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1\\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{1–й шаг}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{2–й шаг}}$$

$$\xrightarrow{\text{2–й шаг}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \end{array}\right).$$

На первом шаге умножили первую строку на 1, 3, 2 и вычли ее соответственно из второй, третьей и четвертой. На втором шаге умножили вторую строку на –1, вычли вторую строку из третьей и четвертой. Получили трапецеидальный вид и эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1\\ x_2-10x_3+17x_4=-2 \end{cases},$$

которая является неопределенной и имеет бесконечно много решений. Чтобы выполнялось второе уравнение, можем для x_3 и x_4 выбрать произвольные значения: $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$, тогда $x_2=10\alpha-17\beta-2$. Подставив x_2, x_3, x_4 в первое уравнение, найдем выражение для x_1:

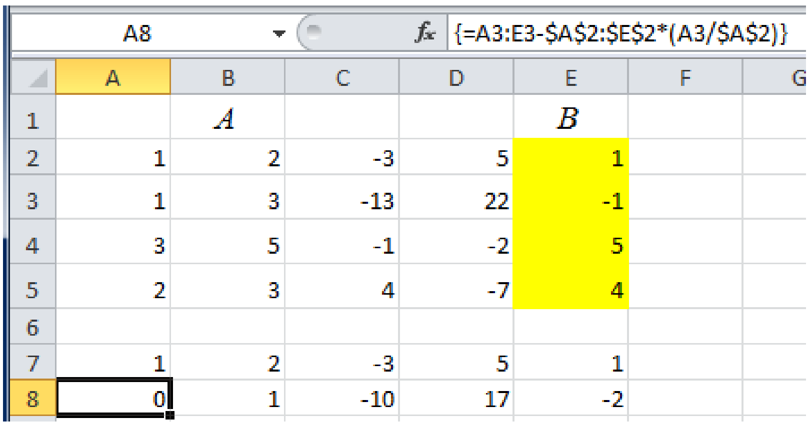
$$x_1=-17\alpha+29\beta+5.$$

Переменные x_3 и x_4 являются свободными и могут принимать любые значения, поэтому система имеет бесконечно много решений. Для конкретных значений x_3 и x_4 будем иметь частное решение системы.

Например, $x_4=0$, $x_3=1$, $x_2=8$, $x_1=-12$ – частное решение.

Рассмотрим решение в MS Excel.

Отнимем от второй строки первую, умноженную на отношение коэффициентов при x_1 второго и первого уравнений (=A3:E3-$A$2:$E$2*(A3/$A$2)):


A8 {=A3:E3-$A$2:$E$2*(A3/$A$2)}

	A	B	C	D	E	F	G
1		A			B		
2	1	2	-3	5	1		
3	1	3	-13	22	-1		
4	3	5	-1	-2	5		
5	2	3	4	-7	4		
6							
7	1	2	-3	5	1		
8	0	1	-10	17	-2		

Отнимем от третьей строки первую, умноженную на отношение коэффициентов при x_1 третьего и первого уравнений: (=A4:E4-$A$2:$E$2*(A4/$A$2)); от четвертой строки отнимем первую, умноженную на отношение коэффициентов при x_1 четвертого и первого уравнений: (=A5:E5-$A$2:$E$2*(A5/$A$2)). Получим

7	1	2	-3	5	1
8	0	1	-10	17	-2
9	0	-1	10	-17	2
10	0	-1	10	-17	2

Умножим вторую строку на отношение коэффициентов при x_2 третьего и второго уравнений; вычтем вторую строку из третьей (=A9:E9-$A$8:$E$8*(B9/$B$8)). Умножим вторую строку на отношение коэффициентов при x_2 четвертого и второго уравнений; вычтем вторую строку из четвертой строки (=A10:E10-$A$8:$E$8*(C10/$C$8)):

12	1	2	-3	5	1
13	0	1	-10	17	-2
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0

Если при реализации прямого хода метода Гаусса возникает нулевая строка, то система имеет бесконечно много решений, так как хотя бы одна переменная в этом случае является свободной.

Рассмотрим обратный ход для частного решения. Элементы матрицы располагаем в диапазоне ячеек A17:E20.

Положим $x_4 = 0$, $x_3 = 1$. В итоге имеем строки

19	0	0	1	0	1
20	0	0	0	1	0

От второй строки отнимаем третью и четвертую, умноженные на соответствующие коэффициенты при x_3 и x_4. Разность делим на коэффициент при x_2 второй строки. Введем в ячейку A18 формулу =(A13:E13-A19:E19*C13-A20:E20*D13)/B13:

18	0	1	0	0	8
19	0	0	1	0	1
20	0	0	0	1	0

От первой строки отнимаем вторую, третью и четвертую, умноженные на соответствующие коэффициенты при x_2, x_3 и x_4. Разность делим на коэффициент при x_1 первой строки. Введем в ячейку A17 формулу =(A12:E12-A18:E18*B12-A19:E19*C12-A20:E20*D12)/A12.

В последнем столбце матрицы получим корни уравнения (выделены цветом):

17	1	0	0	0	-12
18	0	1	0	0	8
19	0	0	1	0	1
20	0	0	0	1	0

Ответ: $x_4 = 0$, $x_3 = 1$, $x_2 = 8$, $x_1 = -12$ – частное решение.

Пример 1.3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{–й шаг}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{2\text{–й шаг}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво, поскольку оно свелось к неверному равенству $0 = -1$. Поэтому данная система несовместна.

Рассмотрим решение в MS Excel:

	A	B	C	D
1		*A*		*B*
2	1	2	-1	7
3	2	-3	1	3
4	4	1	-1	16
5				
6	1	2	-1	7
7	0	-7	3	-11
8	0	-7	3	-12
9				
10	1	2	-1	7
11	0	-7	3	-11
12	0	0	0	-1

Система несовместна.

§ 1.3. Использование инструмента «Поиск решения» для решения систем линейных уравнений

Инструмент «Подбор параметра» предназначен для получения требуемого результата решения задачи, зависящего от одного неизвестного параметра. Для более сложных задач такого класса используется инструмент «Поиск решения».

Работу инструмента «Поиск решения» можно формализовать следующим образом. Требуется найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при изменении которых оптимизируемая целевая функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняет одну задачу (из множества трех задач) при заданных ограничениях $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество трех задач: {«найти максимум целевой функции»; «найти минимум целевой функции»; «добиться того, чтобы целевая функция приняла фиксированное значение»}.

Искомые переменные находятся в ячейках рабочего листа Excel. Целевая функция задается в виде формулы в ячейке рабочего листа. Она должна зависеть (ссылаться) на ячейки переменных. Ограничения задаются в виде равенств или неравенств. На ячейки переменных можно наложить дополнительные ограничения: неотрицательности и/или целочисленности.

Размер задач, которые можно решить с помощью базовой версии этого инструмента, имеет следующие ограничения:

количество неизвестных – 200;

количество формульных ограничений на неизвестные – 100;

количество предельных условий на неизвестные – 400.

Можно настроить следующие параметры поиска решения:

1. «Максимальное время» – это время в секундах, которое может быть затрачено на поиск решения. Максимально допустимое значение – 32767.

2. «Предельное число итераций (шагов)» – количество действий (вычисление очередного значения и проверка его релевантности), которые могут быть сделаны. Максимально допустимое значение – 32767. Если при достижении максимального времени поиска решения или количества итераций решение еще не найдено, инструмент «Поиск решения» выведет диалоговое окно «Показать предварительное решение».

3. «Точность ограничения» (то, насколько близко друг к другу расположены два последовательных приближения) – задается числом в диапазоне от 0 до 1 (по умолчанию 0,000001).

4. Один из трех способов расчета:

«Поиск решения нелинейных задач методом обобщенного понижающего градиента (ОПГ)» – для гладких нелинейных задач;

«Поиск решения линейных задач симплекс-методом»;

«Эволюционный поиск решения» – для негладких задач.

По умолчанию используется первый метод. При поиске решения нелинейных задач методом «ОПГ» или «Эволюционный поиск решения» в поле «Сходимость» указывается, насколько должны отличаться результаты последних пяти итераций, чтобы средство прекратило поиск решения. Чем меньше число, тем меньше должно быть изменение.

5. «Неотрицательные значения» – позволяет задать нулевую нижнюю границу для тех изменяемых ячеек, для которых она не была указана в поле «Ограничение».

6. «Показывать результаты итераций» – выводит промежуточные результаты и делает паузы после каждого шага вычисления.

1.3.1. Решение систем линейных уравнений инструментом «Поиск решения» с помощью вектора невязок

При решении систем линейных уравнений $A \cdot X = B$ инструмент MS Excel «Поиск решения» использует итерационные (приближенные) методы. Строится последовательность приближений $X^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Вектор

$$N^{(i)} = B - A \cdot X^{(i)} \tag{1.3}$$

называется **вектором невязок**.

Инструмент «Поиск решения» ищет такое приближение $X^{(k_0)}$, при котором вектор невязок близок к нулю с заданной степенью точности. В этом случае происходит совпадение значений правой и левой части системы $A \cdot X = B$.

Рассмотрим применение инструмента «Поиск решения» на следующем примере.

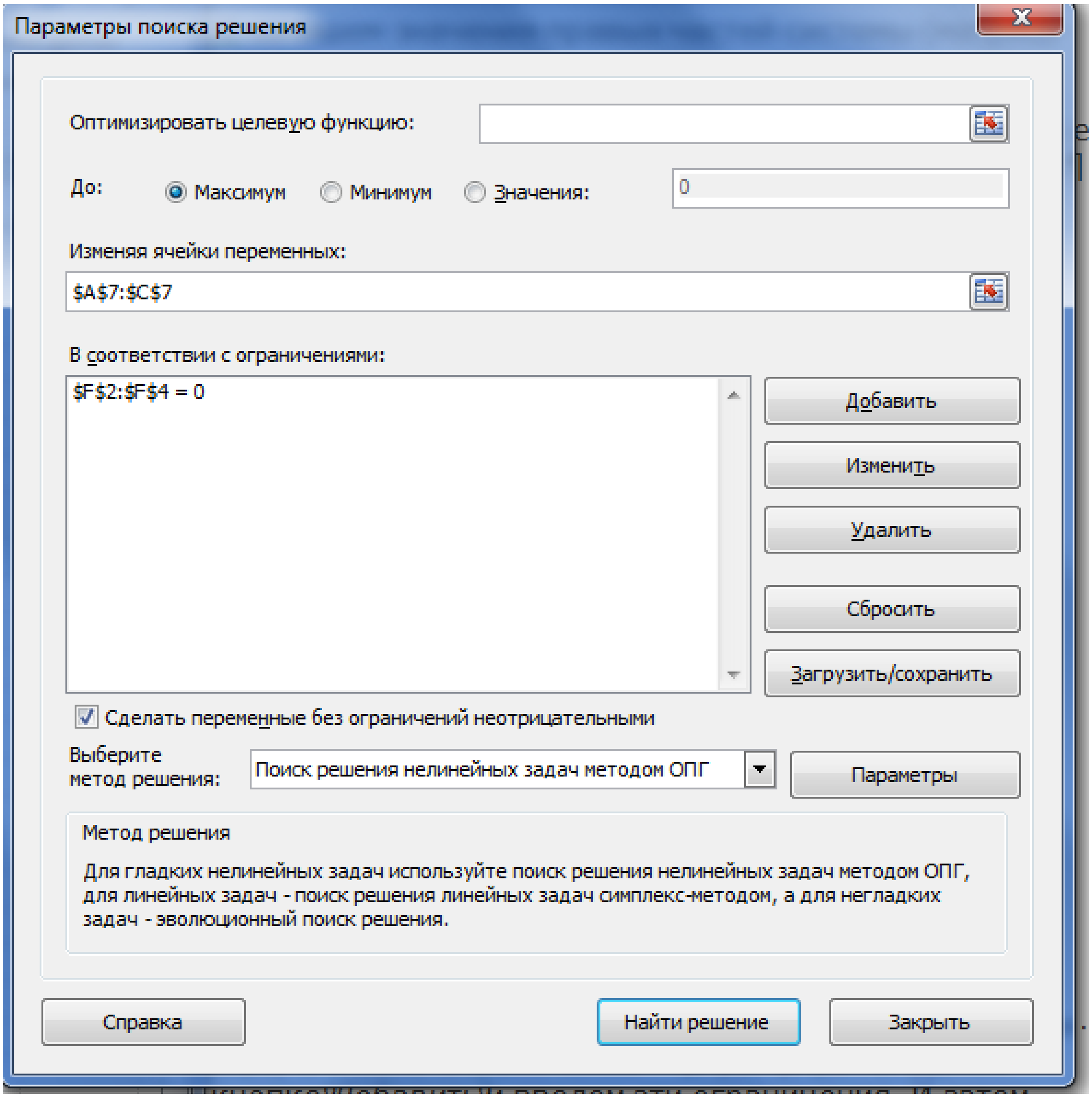
Пример 1.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Введем коэффициенты системы (матрицу A) в ячейки A2:C4, свободные члены в ячейки B2:B4. Зададим начальные значения $X^{(0)} = (1, 1, 1)$ в ячейках A7:C7 (начальные значения можно задавать любыми). В ячейку E2 введем формулу для вычисления левой части первого уравнения системы: =СУММПРОИЗВ(A2:C2; $A$7:$C$7). Делаем автозаполнение ячеек E3:E4. Невязки рассчитываем по формуле (1.3) и помещаем в диапазон F2:F4.

	A	B	C	D	E	F
1		*A*		*B*	левая часть	невязки
2	1	1	1	6	3	-3
3	2	-1	1	3	2	-1
4	3	1	-1	2	3	1
5						
6	X_1	X_2	X_3			
7	1	1	1			

Выберем команду «Данные \ Поиск решения»:



Получим

	A	B	C	D	E	F
1		*A*		*B*	левая часть	невязки
2	1	1	1	6	6	3E-06
3	2	-1	1	3	3	0
4	3	1	-1	2	2	0
5						
6	X_1	X_2	X_3			
7	1	2,000002	3,000002			

Задана стандартная точность 0,000001.

Ограничения в инструменте «Поиск решения» можно задать в виде E2:E4=D2:D4.

1.3.2. Использование инструмента «Поиск решения» для решения систем нелинейных уравнений сведением их к оптимизационной задаче

Задачу решения систем линейных уравнений (1.1) можно свести к оптимизационной задаче.

Зададим целевую функцию для системы *m* уравнений с *n* неизвестными:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right)^2, \qquad (1.4)$$

где b_i – *i*-й элемент вектора свободных членов *B*;

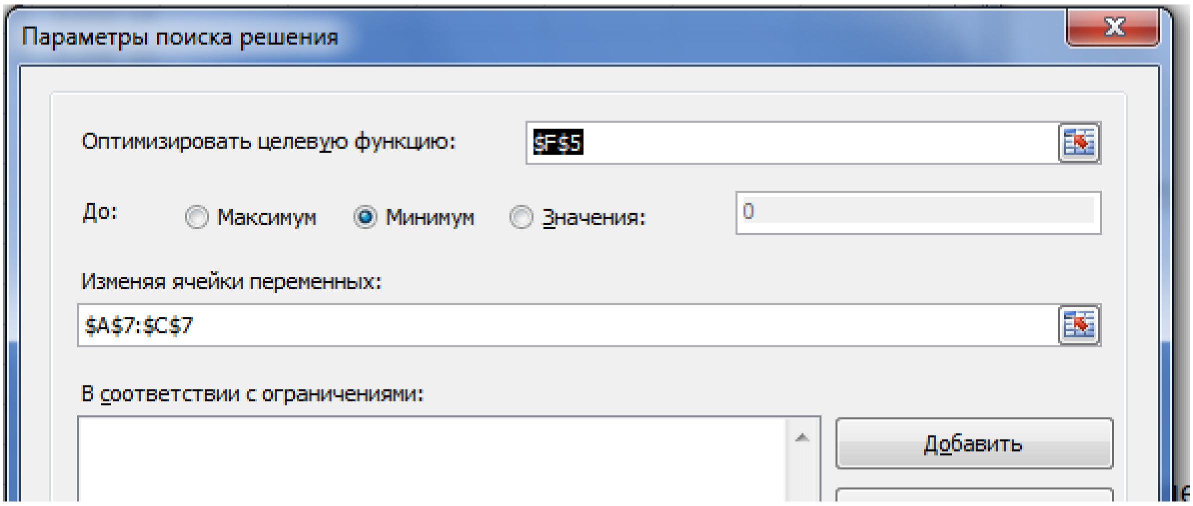
a_{ij} – элемент матрицы коэффициентов *A*;

x_j – элемент вектора решений $\bar{X}$.

Пример 1.5. Решить систему примера 1.4 по формуле (1.4).

Решение. Для системы примера 1.4 значения $\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right)$ помещаем в диапазон F2:F4. Целевая функция $F(X)$ в ячейке F5 вычисляется по формуле =СУММ(F2:F4).

В окне «Данные \ Поиск решения» задаем



При $X^{(0)} = (1, 1, 1)$ получаем

	A	B	C	D	E	F
1		A		B	левая часть	невязки
2	1	1	1	6	6	2,48E-11
3	2	-1	1	3	3	2,44E-13
4	3	1	-1	2	2	2,1E-12
5						2,72E-11
6	X_1	X_2	X_3			
7	1	1,999997	2,999998			

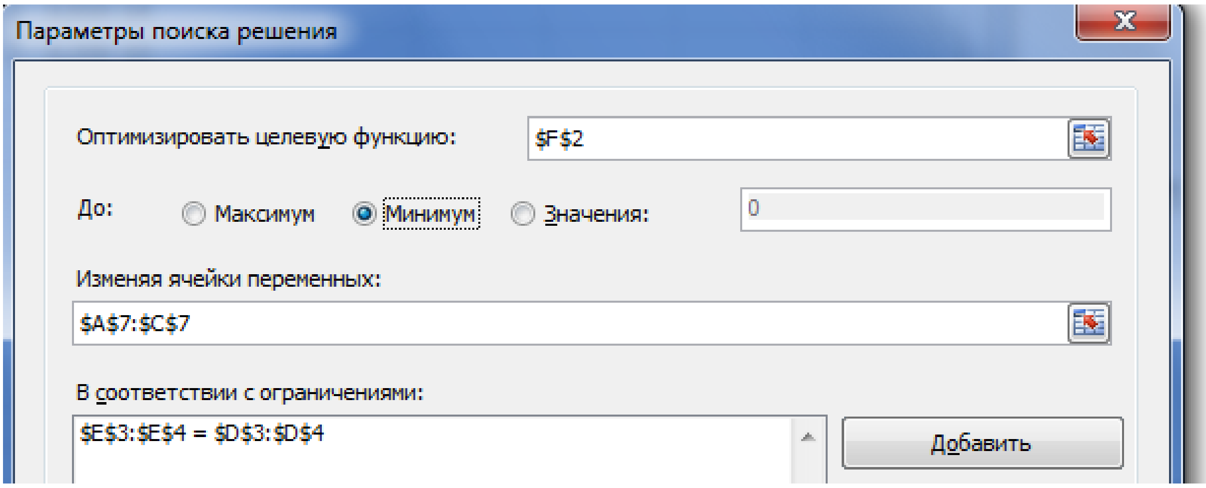
При $X^{(0)} = (0, 0, 0)$ получаем бо́льшую точность решения:

	A	B	C	D	E	F
1		A		B	левая часть	невязки
2	1	1	1	6	6	4,9E-12
3	2	-1	1	3	3	4,86E-12
4	3	1	-1	2	2	1,17E-11
5						2,14E-11
6	X_1	X_2	X_3			
7	0,999999	1,999999	2,999999			

Таким образом, точность решения с помощью инструмента «Поиск решения» зависит от задания начальных значений искомых переменных.

Задачу решения систем линейных уравнений можно свести к оптимизационной задаче и другим методом. Для этого модуль невязки по одному из уравнений (например, первому) берется в качестве целевой функции, а оставшиеся невязки, число которых составляет $n - 1$, рассматриваются в качестве ограничений.

При $X^{(0)} = (1, 1, 1)$ получаем:



	A	B	C	D	E	F
1		*A*		*B*	левая часть	невязка
2	1	1	1	6	6	2,16236E-11
3	2	-1	1	3	3	
4	3	1	-1	2	2	
5						
6	X_1	X_2	X_3			
7	1	2	3			

Еще более хороший результат получается при $X^{(0)} = (0, 0, 0)$ (невязка по первому уравнению равна нулю).

Таким образом, сведение к оптимизационной задаче является лучшим среди рассмотренных методов решения систем линейных уравнений с помощью инструмента «Поиск решения».

Задание для самостоятельной работы

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса и с помощью инструмента «Поиск решения».

1. $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 2x + 5y = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y - 3z = 0, \\ 2x + 6y - 7z = 3, \\ x - 2y + 4z = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 7, \\ 5x - y + 2z = 2, \\ 3x - y + z = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_2 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 0 \cdot x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 24, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 10x_4 = -9, \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 - 6x_4 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 - x_4 = -8, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -7, \\ 0\cdot x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 0\cdot x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0\cdot x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -9, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 0\cdot x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 0\cdot x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -12. \end{cases}$

.

ГЛАВА 2
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 2.1. Общие сведения о методах решения нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения описывают многие процессы механики, физики, химии, социологии, а также экономические, технические, военные, сельскохозяйственные, биологические системы. Поэтому проблема решения нелинейных уравнений (нахождения корней уравнения) является важной и актуальной.

Нелинейные уравнения делятся на две группы: алгебраические и трансцендентные. Многочлен (полином) является целой алгебраической функцией. В общем виде многочлен n-й степени выглядит следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{2.1}$$

где n – степень полинома (некоторое положительное число);

$a_n, \ldots, a_0$ – коэффициенты полинома (произвольные действительные числа), причем старший коэффициент a_n должен быть не равен нулю.

Уравнение вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ называется **полиномиальным**. Если в уравнение $f(x) = 0$ входит хотя бы одна трансцендентная функция (тригонометрическая, показательная, логарифмическая и др.), то уравнение называется **трансцендентным**.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на два класса: точные (аналитические) и приближенные (итерационные). Точные методы, основанные на вычислении корней по формулам, применяются для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений. Многие нелинейные уравнения не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Точные решения известны для квадратных уравнений, кубических (формула Кардано) и уравнений четвертой степени (метод Феррари). Для уравнений выше пятой степени формул для выражения корней многочлена не существует.

Для нелинейных уравнений, не имеющих аналитического решения, используются итерационные (численные) методы с заданной степенью точности.

В данном учебном пособии рассматриваются методы поиска только действительных корней нелинейного уравнения; проблема нахождения комплексных корней не затрагивается.

§ 2.2. Методика нахождения корней нелинейного уравнения

При использовании численных методов алгоритм нахождения корней многочлена состоит, как правило, из трех задач [27, 37]:

1) исследуется количество и характер расположения корней;

2) определяются интервалы нахождения каждого корня;

3) уточняются значения каждого корня в найденном интервале (определением значения корня с заданной точностью).

Первая и вторая задачи составляют первый этап – этап отделения (локализации) корней. Задачи этого этапа решаются аналитическими и графическими методами. На втором этапе решается третья задача с помощью методов уточнения значений корней (методы половинного деления, Ньютона, секущих, хорд и др.), а также с применением инструментов Excel «Подбор параметра» и «Поиск решения».

Для аналитического отделения корней используются следующие сведения из математического анализа:

1) действительными корнями многочлена будут абсциссы точек пересечения его графика с осью X и только они;

2) отрезок $[a; b]$, внутри которого будут находиться все корни многочлена, определяется согласно оценке Коши:

$$[a;b]=\left[-\left(1+\frac{\max\left(|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|\right)}{|a_n|}\right);\quad 1+\frac{\max\left(|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|\right)}{|a_n|}\right]; \qquad (2.2)$$

3) алгебраическое уравнение $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}=0$ может иметь не более n корней. Поэтому если для такого уравнения получена $n + 1$ перемена знака, то все его корни локализованы;

4) многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень;

5) число положительных корней многочлена равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (коэффициенты, равные нулю, не учитываются) или меньше этого числа на четное число (теорема Декарта);

6) если ни один из коэффициентов многочлена $f(x)$ не равен нулю, то число отрицательных корней многочлена равно числу сохранения знаков в многочлене $f(-x)$ или меньше этого числа на четное число;

7) если многочлен не имеет отрицательных коэффициентов, то он не имеет положительных корней;

8) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(x)$ имеет на концах этого отрезка разные знаки ($f(a)f(b) < 0$), то на $[a; b]$ существует хотя бы один корень нелинейного уравнения;

9) если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна ($f'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a; b]$ и $f(a)f(b) < 0$), то на этом отрезке корень уравнения единственный.

Последние два положения справедливы как для многочленов, так и для трансцендентных уравнений.

Исследование действительных корней нелинейного уравнения $f(x) = 0$ удобно проводить графическим методом, состоящим в построении графика функции $f(x)$ в Excel и его анализе. Корнями уравнения будут абсциссы точек пересечения графика с осью $0X$ и только они. Для построения графика в Excel необходимо произвести табулирование функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с заданным шагом.

Для трансцендентных уравнений в случае аддитивных функций можно применять и другой способ графического решения уравнений.

Все члены уравнения разбивают на две группы, одну из которых записывают в левой части уравнения, а другую в правой, т. е. в виде уравнения $f(x) = g(x)$. После этого строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Абсциссы точек пересечения графиков этих двух функций являются корнями данного уравнения. Пусть точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, ординаты обоих графиков в этой точке равны между собой, т. е. $f(x_0) = g(x_0)$. Из этого равенства следует, что значение x_0 – корень уравнения.

Точность графического метода невысока, однако с помощью графика можно определить количество корней, выбрать первое приближение для локализации корней, с которого начинается решение уравнения.

Пример 2.1. Исследовать нелинейное уравнение

$$x^5 - 2{,}8x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4{,}4x - 5 = 0.$$

Решение. Значения коэффициентов уравнения:

$$a_5 = 1;\ a_4 = -2{,}8;\ a_3 = 3;\ a_2 = 3;\ a_1 = 4{,}4;\ a_0 = -5.$$

Последовательность знаков коэффициентов уравнения такова: + , – , + , + , + , –.

Число перемен знаков – два (положительных корней в уравнении два или нуль).

Заменив x на $-x$, получим

$$-x^5 - 2{,}8x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4{,}4x - 5 = 0.$$

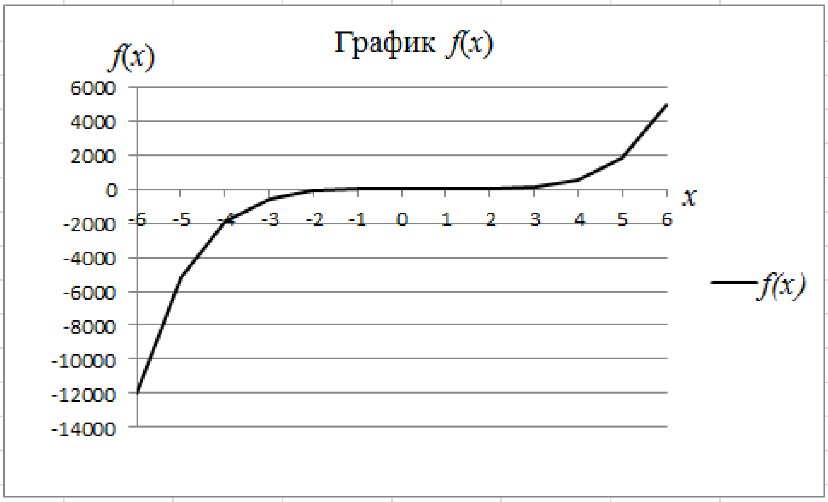
Последовательность знаков коэффициентов уравнения $f(-x)$: – , – , – , + , – , –. Число сохраненных знаков – три (отрицательных корней в уравнении три или один).

Определяем отрезок $[a;\, b]$, на котором существуют корни уравнения

$$[a;b]=\left[-\left(1+\frac{\max\left(|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|\right)}{|a_n|}\right);\quad 1+\frac{\max\left(|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|\right)}{|a_n|}\right]=\left[-\left(1+\frac{5}{1}\right);1+\frac{5}{1}\right]=[-6;\,6]\cdot$$

Выполняем приближенное табулирование функции на отрезке [–6; 6] с шагом 1:

x	$f(x)$
-6	-11976,2
-5	-5202
-4	-1907,4
-3	-542
-2	-102,6
-1	-13,2
0	-5
1	3,6
2	27
3	132,4
4	559,8
5	1842
6	4924,6

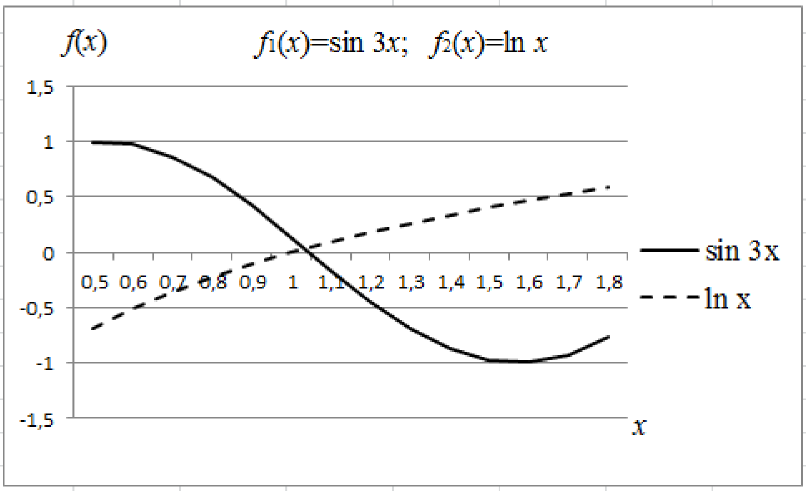


Из таблицы Excel и графика видно, что многочлен $f(x)$ содержит один корень на интервале [0; 1].

Пример 2.2. Графическим методом решить уравнение $\sin 3x - \ln x = 0$.

Решение. Для графического отделения корней уравнения преобразуем его к равносильному уравнению $\sin 3x = \ln x$ и отдельно построим графики функций $\sin 3x$ и $\ln x$:

x	$\sin 3x$	$\ln x$
0,5	0,997495	-0,69315
0,6	0,973848	-0,51083
0,7	0,863209	-0,35667
0,8	0,675463	-0,22314
0,9	0,42738	-0,10536
1	0,14112	0
1,1	-0,15775	0,09531
1,2	-0,44252	0,182322
1,3	-0,68777	0,262364
1,4	-0,87158	0,336472
1,5	-0,97753	0,405465
1,6	-0,99616	0,470004
1,7	-0,92581	0,530628
1,8	-0,77276	0,587787



Из графика видно, что уравнение имеет единственный корень ξ, который находится на отрезке [0,9; 1,1].

§ 2.3. Методы уточнения значений действительных корней нелинейного уравнения

2.3.1. Метод половинного деления (дихотомии)

Более эффективным методом нахождения корней нелинейного уравнения, чем табулирование и построение графика функции, является метод половинного деления (дихотомии).

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень, причем функция на этом отрезке непрерывна.

Возьмем точку $c = (a + b) / 2$ – середину отрезка $[a; b]$. Если $f(a) \cdot f(c) \le 0$, то корень принадлежит отрезку $[a; c]$, иначе он принадлежит отрезку $[c; b]$.

Выбираем тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжаем половинное деление до тех пор, пока длина отрезка не окажется меньше заданной предельной абсолютной погрешности ε (т. е. $(b - a) < \varepsilon$). Приняв $x \approx (a + b)/2$, получим ошибку, не превышающую значения $\Delta x = (b - a) / 2$. Блок-схема метода половинного деления приведена на рис. 2.1.

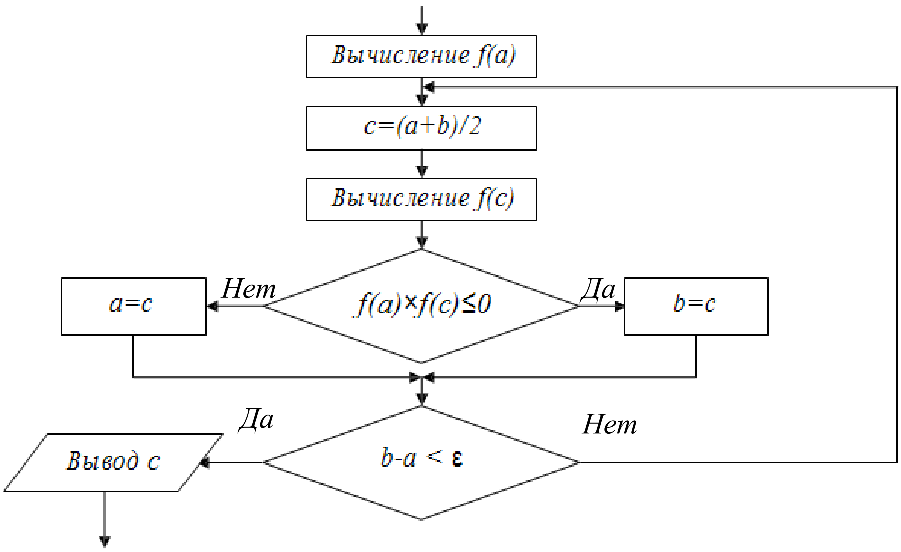


Рис. 2.1

Данный метод легко реализуется с помощью Excel.

Пример 2.3. Исследовать уравнение

$$f(x) = x^5 - 2{,}6x^4 + 2{,}82x^3 - 3{,}41x^2 + 4{,}12x - 3{,}23 = 0,$$

уточнить значения корней методом половинного деления.

Решение. Коэффициенты уравнения равны:

$$a_5 = 1;\ a_4 = -2{,}6;\ a_3 = 2{,}82;\ a_2 = -3{,}41;\ a_1 = 4{,}12;\ a_0 = -3{,}23.$$

Последовательность знаков коэффициентов уравнения $f(-x)$: + , – , + , – , + , –. Число перемены знаков равно пяти (в уравнении положительных корней пять, три или один).

Коэффициенты уравнения $f(-x)$ равны:

$$a_5 = -1;\ a_4 = -2{,}6;\ a_3 = -2{,}82;\ a_2 = -3{,}41;\ a_1 = -4{,}12;\ a_0 = -3{,}23.$$

Последовательность знаков коэффициентов уравнения $f(-x)$: – , – , – , – , – , –. Число сохраненных знаков равно нулю (в уравнении нет отрицательных корней).

Определяем отрезок $[a;b]$, на котором существуют корни уравнения

$$[a;b] = \left[-\left(1+\frac{\max(|a_{n-1}|,\dots,|a_0|)}{|a_n|}\right);\ 1+\frac{\max(|a_{n-1}|,\dots,|a_0|)}{|a_n|}\right] = \left[-\left(1+\frac{4{,}12}{1}\right);1+\frac{4{,}12}{1}\right] =$$
$$= [-5{,}126;5{,}12].$$

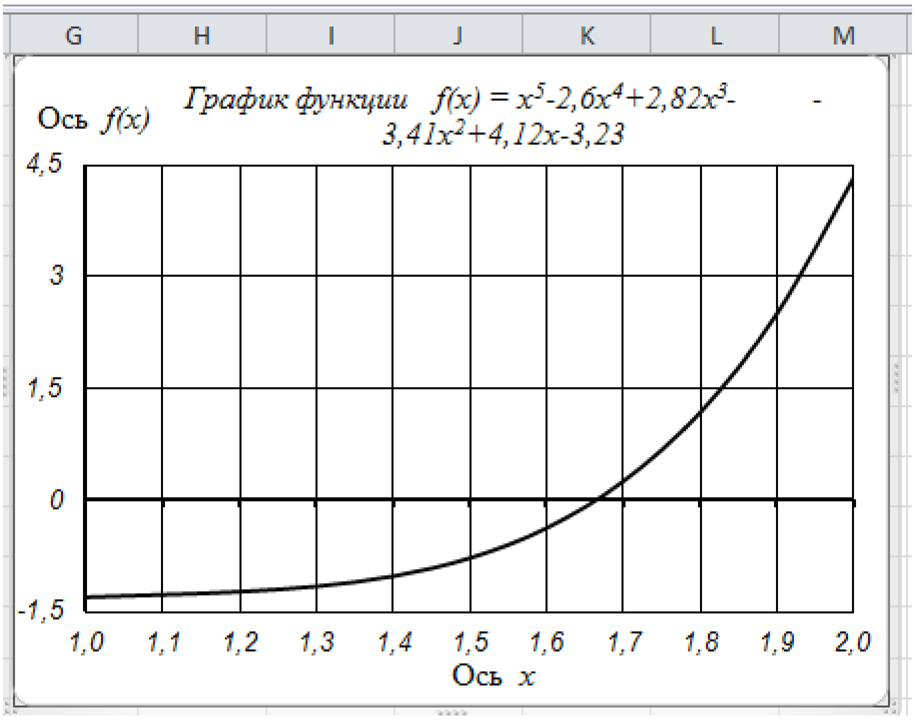
Табулируем функцию на полученном интервале $[-5{,}126;5{,}12]$ и на уточненном интервале $[1;2]$:

	A	B	C	D	E
1	*x*	*f(x)*		*x*	*f(x)*
2	-5	-5211,5800		1,0000	-1,3000
3	-4	-1944,3500		1,1000	-1,2668
4	-3	-576,0200		1,2000	-1,2265
5	-2	-121,2700		1,3000	-1,1543
6	-1	-17,1800		1,4000	-1,0174
7	0	-3,2300		1,5000	-0,7738
8	1	-1,3000		1,6000	-0,3705
9	2	4,3300		1,7000	0,2569
10	3	86,9800		1,8000	1,1858
11	4	497,5700		1,9000	2,5078
12	5	1784,6200		2,0000	4,3300

Построим график функции

$$f(x) = x^5 - 2{,}6x^4 + 2{,}82x^3 - 3{,}41x^2 + 4{,}12x - 3{,}23$$

в Excel для интервала $[1;2]$. Из уточненной таблицы и построенного графика видно, что имеется один корень, который находится на интервале $[1,6;1,7]$:



Уточним корни на интервале $[1,6;1,7]$ методом половинного деления.

Вычисления в Excel произведем следующим образом:

	A	B	C	D	E
1	*a*	*b*	*c*	*f(a)*f(c)*	*ε*
2	1,6	1,7	1,65	0,0331	0,0001
3	1,65	1,7	1,675	-0,0067	продолжаем
4	1,65	1,675	1,6625	0,00083	продолжаем
5	1,6625	1,675	1,6688	-0,0003	продолжаем
6	1,6625	1,6688	1,6656	-0,0001	продолжаем
7	1,6625	1,6656	1,6641	-1E-05	продолжаем
8	1,6625	1,6641	1,6633	3,8E-05	продолжаем
9	1,6633	1,6641	1,6637	6,4E-06	продолжаем
10	1,6637	1,6641	1,6639	3,9E-07	продолжаем
11	1,6639	1,6641	1,664	-1E-07	продолжаем
12	1,6639	1,664	1,6639	-2E-08	конец

В ячейки книги в Excel записаны следующие формулы:

диапазон A1:E1 – строка заголовков;

A2 − a (левая граница интервала локализации корня);

B2 − b (правая граница интервала локализации корня);

C2 – формула = (A2+B2)/2;

D2 – формула = (A2^5-2,6*A2^4+2,82*A2^3-3,41*A2^2+4,12*A2-3,23)*(C2^5-2,6*C2^4+2,82*C2^3-3,41*C2^2+4,12*C2-3,23);

E2 – число 0,0001 (точность вычислений);

A3 − формула =ЕСЛИ(D2<=0;A2;C2);

B3 − формула =ЕСЛИ(D2<=0;C2;B2);

D3 − формула =(A3^5-2,6*A3^4+2,82*A3^3-3,41*A3^2+4,12*A3-3,23)*(C3^5-2,6*C3^4+2,82*C3^3-3,41*C3^2+4,12*C3-3,23);

E3 − формула =ЕСЛИ(ABS(B3-A3)>$E$2;"продолжаем";"конец").

Выделяются ячейки A3:E3 и производится автозаполнение ячеек вниз, пока в столбце «E» не появится сообщение «конец». Вычисленный с заданной точностью корень уравнения будет находиться в последней заполненной ячейке столбца «C».

Таким образом, корень x_1 = 1,6639.

2.3.2. Метод касательных Ньютона

Более сложными и эффективными итерационными методами, чем метод половинного деления, являются методы касательных и хорд Ньютона. В этих методах уточнение корней уравнения основано не на задании начального интервала нахождения корня, а на задании его начального приближения, на каждом шаге итерационного процесса кривая $f(x)$ заменяется касательной к ней, проведенной в предыдущей найденной точке.

Для решения нелинейного уравнения используется рекуррентная формула (каждый член последовательности выражается через один или несколько предыдущих членов) вида

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ (n = 0, 1, 2, ...), \tag{2.3}$$

где x_n, x_{n+1} – текущее и последующее значения переменной;

$f(x)$ – функция, задающая уравнение, корни которого определяются;

$f'(x)$ – ее производная.

Функция $f(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1) быть дважды дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ между начальным приближением и корнем уравнения;

2) обе производные (первая и вторая) должны сохранять постоянный знак на этом отрезке, т. е. функция $f(x)$ должна быть монотонной и не менять характер выпуклости на отрезке $[a; b]$.

За начальное приближение x_0 берется та граница отрезка $[a; b]$, на которой функция $f(x)$ и ее вторая производная имеют одинаковые знаки (выполняется условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$). Это левая граница $[a; b]$, т. е. $x_0 = a$ (при $f(a) \cdot f''(x_0) > 0$), либо правая граница $[a; b]$, т. е. $x_0 = b$ (при $f(b) \cdot f''(x_0) > 0$).

Блок-схема метода Ньютона приведена на рис. 2.2.

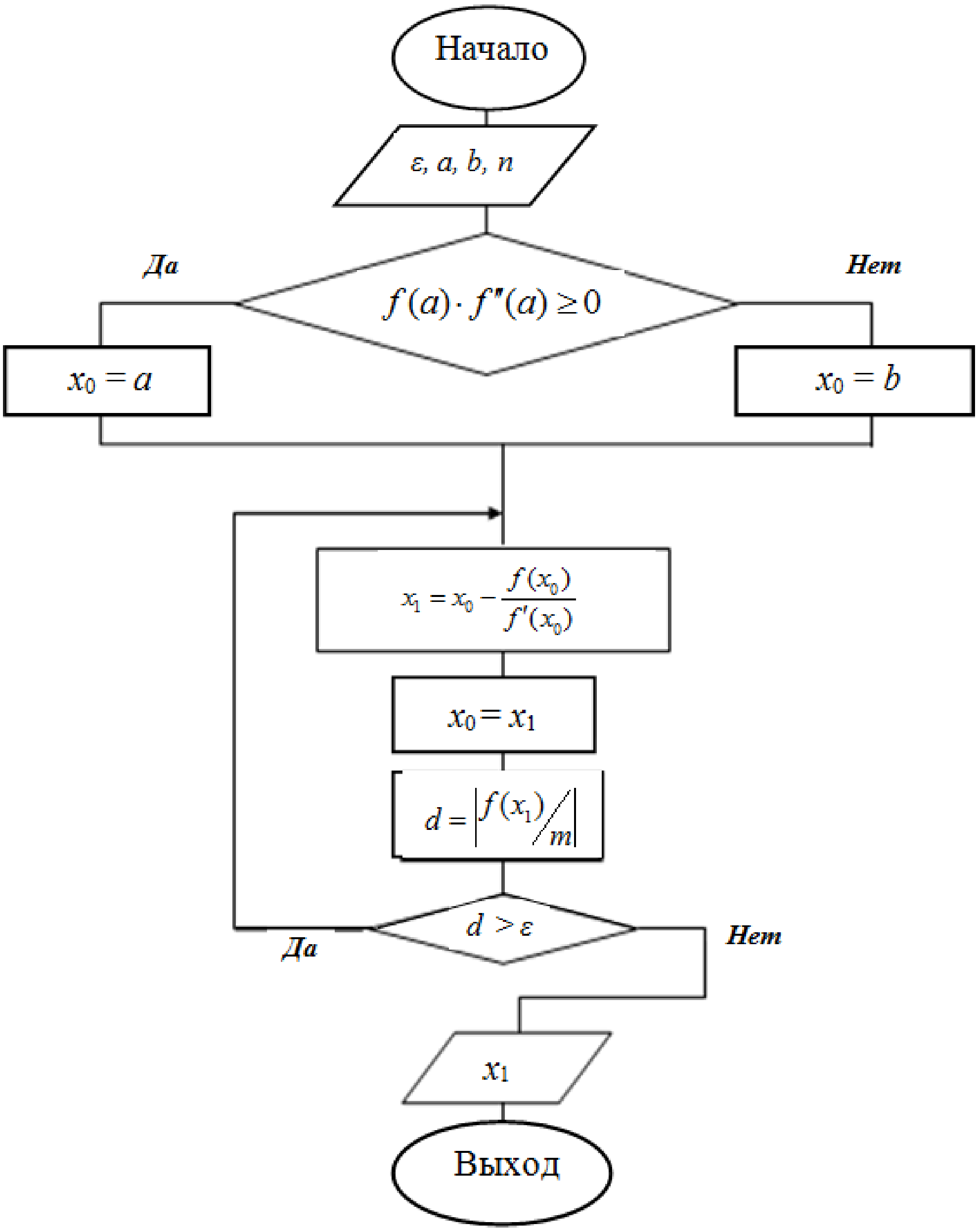


Рис. 2.2

Пример 2.4. Уточнить корень уравнения $\sin 3x - \ln x = 0$ на отрезке [0,9; 1,07] методом касательных с точностью до 0,0001.

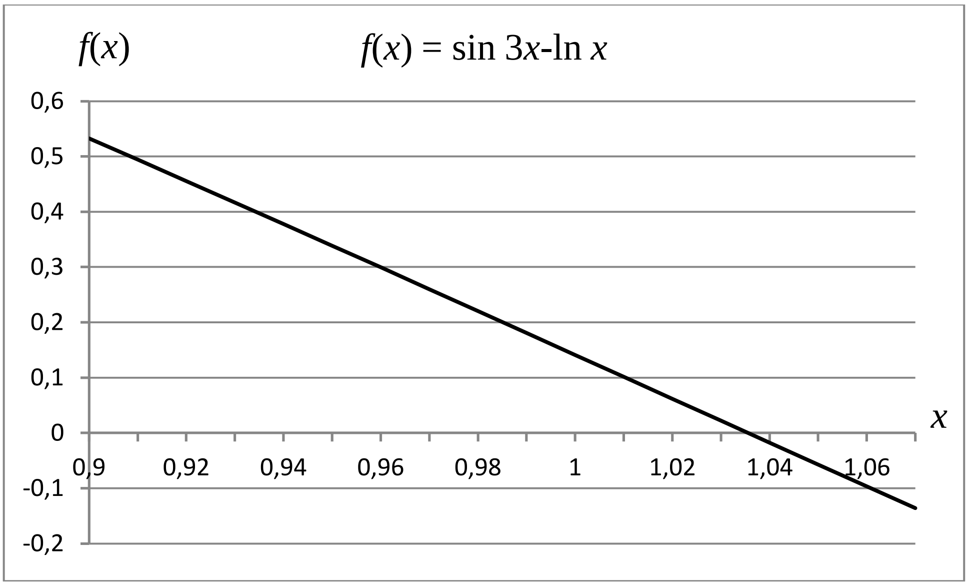
Решение. Формула (2.3) в данном случае имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin 3x_n - \ln x}{3\cos 3x_n - 1/x_n}.$$

Определим знаки $f(x) = \sin 3x - \ln x$ и $f''(x) = -9\sin 3x + 1/x^2$ на концах отрезка [0,9; 1,07].

Получаем $f(0{,}9) = 0{,}532\,7 > 0$, $f(1{,}07) = -0{,}136\,0 < 0$, т. е. функция имеет на концах отрезка различные знаки.

Рассчитаем $f''(0{,}9) = 5{,}081 > 0$, $f''(1{,}07) = 0{,}258\,3 > 0$, т. е. вторая производная положительна на концах отрезка (см. график функции – она не меняет характер выпуклости).



Таким образом, $f(0{,}9)\cdot f''(0{,}9) > 0$, поэтому выбираем $x_0 = a = 0{,}9$.

Вводим формулы в ячейки Excel:

A2: =G2;

B2: =SIN(3*A2)-LN(A2);

C2: =3*COS(3*A2)-(1/A2);

D2: =A2-B2/C2;

E2: =ЕСЛИ(ABS(B2)<=$H$2;A2;"-");

A3: =D2.

Выделим диапазон ячеек B5:E5 и методом протягивания заполним диапазон ячеек B6:E6.

Выделим диапазон ячеек A6:E5 и методом протягивания заполним диапазон нижерасположенных ячеек до получения в одной из ячеек столбца «E» результата (диапазон ячеек A2:E4).

Получаем

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_n	$f(x)$	$f'(x)$	x_{n+1}	Останов		x_0	ε
2	0,9	0,53274	-3,82333	1,039339	-		0,9	0,0001
3	1,039339	-0,01501	-3,96132	1,035549	-			
4	1,035549	4,9E-06	-3,96384	1,035551	1,035549			

В ячейке E4 получаем ответ: корень уравнения cos(2x) + x – 5 = 0 приближенно равен 1,0356.

В задаче рассмотрен признак завершения итерационного процесса $|f(x)| \le \varepsilon$. Возможны и другие признаки, например: $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \le \varepsilon$ или $|x_{n+1} - x_n| \le \sqrt{\dfrac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$, где $m_1 = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|, m_1 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ [1].

Пример 2.5. Уточнить корень уравнения

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 6x - 6 = 0$$

на выбранном самостоятельно отрезке методом касательных с точностью до 0,001.

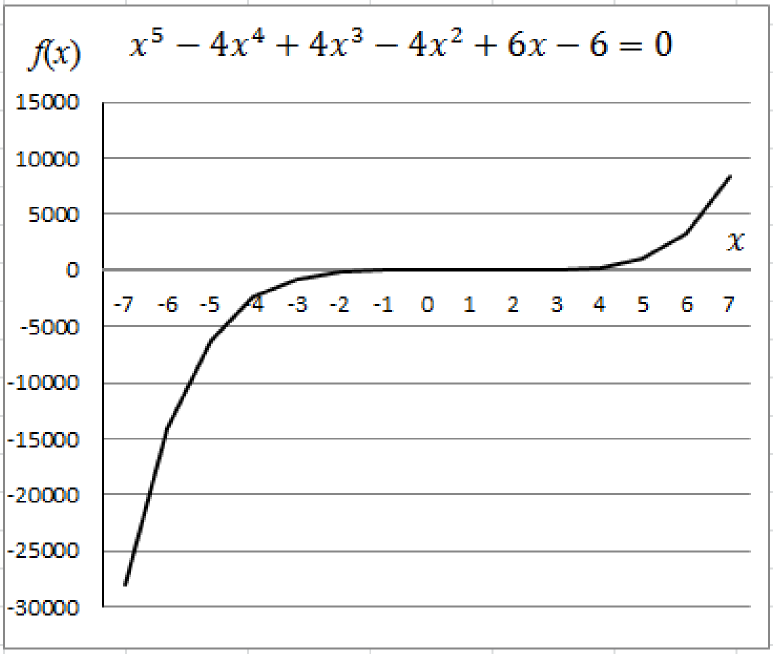
Решение. Значения коэффициентов многочлена равны:

$a_5 = 1$; $a_4 = –4$; $a_3 = 4$; $a_2 = –4$; $a_1 = 6$; $a_0 = –6$.

Получим

B3 f_x =A3^5-4*A3^4+4*A3^3-4*A3^2+6*A3-6

	A	B
1	ТАБУЛИРОВАНИЕ	
2	x	$f(x)$
3	-7	-28027
4	-6	-14010
5	-5	-6261
6	-4	-2398
7	-3	-735
8	-2	-162
9	-1	-25
10	0	-6
11	1	-3
12	2	-10
13	3	3
14	4	210
15	5	1049
16	6	3342
17	7	8415



Определяем по формуле (2.2) отрезок, на котором существуют корни уравнения: $[a;b]=\left[-\left(1+\frac{6}{1}\right);1+\frac{6}{1}\right]=[-7;7]$.

Уточняем интервал табулированием и построением графика. Получаем [2; 3].

Производная функции $f\left(x\right)$ равна $f'(x)=5x^4-16x^3+12x^2-4x+6$.

Формула (2.3) в данном случае имеет вид

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x^5-4x^4+4x^3-4x^2+6x-6}{5x^4-16x^3+12x^2-4x+6}.$$

Определим знаки $f(x)=x^5-4x^4+4x^3-4x^2+6x-6$ и $f''(x)=20x^3-$ $-48x^2+24x-4$ на концах отрезка [2; 3].

Получаем $f(2) = -10 < 0$, $f(3) = 3 > 0$, т. е. функция имеет различные знаки на концах отрезка.

Рассчитаем $f''(2) = 12 > 0$, $f''(3) = 176 > 0$, т. е. вторая производная положительна на концах отрезка.

Таким образом, $f(3)\cdot f''(3)>0$, поэтому выбираем $x_0 = b = 3$.

Вводим формулы в ячейки Excel:

A2: =G2;

B2: =A2^5-4*A2^4+4*A2^3-4*A2^2+6*A2-6;

C2: =5*A2^4-16*A2^3+12*A2^2-4*A2+6;

D2: =A2-B2/C2;

E2: =ЕСЛИ(ABS(D2-A2)<=$H$2;A2;"продолжить");

A3: =D2.

Выделим диапазон ячеек B5:E5 и методом протягивания заполним диапазон ячеек B6:E6.

Выделим диапазон ячеек A6:E5 и методом протягивания заполним диапазон нижерасположенных ячеек до получения в одной из ячеек столбца «E» результата (диапазон ячеек A2:E4).

Получаем

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_n	$f(x)$	$f'(x)$	x_{n+1}	Останов		x_0	ε
2	3	3	75	2,96	продолжить		3	0,000001
3	2,96	0,614684	68,178	2,950984	продолжить			
4	2,950984	0,113266	66,69961	2,949286	продолжить			
5	2,949286	0,020274	66,42355	2,948981	продолжить			
6	2,948981	0,003608	66,37401	2,948926	продолжить			
7	2,948926	0,000641	66,36519	2,948917	продолжить			
8	2,948917	0,000114	66,36363	2,948915	продолжить			
9	2,948915	2,03E-05	66,36335	2,948915	2,948915018			

В ячейке E4 получаем ответ: корень уравнения $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 6x - 6 = 0$ приближенно равен 2,948915.

2.3.3. Метод уточнения корней инструментом «Подбор параметра»

Когда планируемый результат вычислений в Excel по формульным выражениям задан и требуется определить значения переменных задачи, обеспечивающих получение данного результата, используется инструмент «Подбор параметра». С его помощью можно как производить табличные вычисления, так и решать уравнения с одним неизвестным.

Инструмент включается на вкладке «Данные» в группе «Работа с данными» командой «Анализ "что если"». При подборе параметра Excel изменяет значение в заданной ячейке, пока вычисления по формуле, ссылающейся на эту ячейку, не дадут нужного результата.

Для поиска результата работы инструмента «Подбор параметра» используется метод итераций. «Подбор параметра» осуществляет перебор значений переменной до тех пор, пока не будет получен требуемый результат.

Точность подбора параметра можно задать (по умолчанию она равна 0,001) через меню «Файл / Параметры / Формулы / Параметры вычислений / Относительная погрешность». Аналогично задается предельное число итераций (по умолчанию 100).

Если Excel выполняет сложную задачу подбора параметра, можно нажать кнопку «Пауза» в диалоговом окне «Результат подбора параметра» и прервать вычисление, а затем нажать кнопку «Шаг», чтобы выполнить очередную итерацию и просмотреть результат. При решении задачи в пошаговом режиме появляется кнопка «Продолжить» для возврата в обычный режим подбора параметра.

В окне «Подбор параметра» в поле «Установить в ячейке» вводится ссылка на ячейку с формулой, в поле «Значение» − ожидаемый результат, в поле «Изменяя значение ячейки» − ссылка на ячейку, в которой будет находиться значение подбираемого параметра (содержимое этой ячейки не может быть формулой).

Пример 2.6. Решить нелинейное уравнение

$$x^6 + 6{,}5x^5 - 14x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 21x - 22{,}5 = 0$$

с помощью инструмента «Подбор параметра» на интервале [–9; 3].

Решение. Произведем табулирование функции

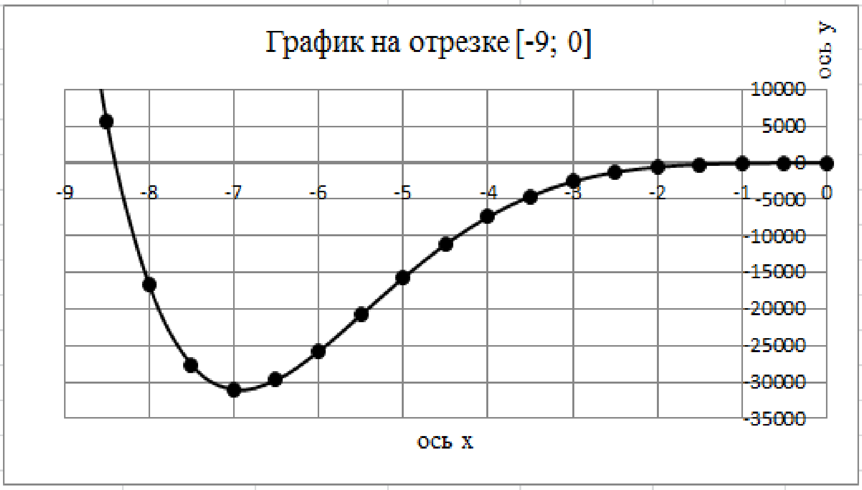
$$x^6 + 6{,}5x^5 - 14x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 21x - 22{,}5$$

на заданном интервале с шагом 0,5. Функция в двух местах меняет знак, т. е. имеет на интервале [–9; 3] два корня.

Это же подтверждается и построенными графиками. Корни находятся на интервалах [–8,5; –8] и [1; 1,5]:

$x^6+6.5x^5-14x^4+14x^3-17x^2+21x-22.5=0$

x	$f(x)$
-9	43974
-8,5	5633,188
-8	-16638,5
-7,5	-27608,9
-7	-31015
-6,5	-29712,9
-6	-25816,5
-5,5	-20825,2
-5	-15740
-4,5	-11168,4
-4	-7418,5
-3,5	-4581,03
-3	-2601
-2,5	-1337,5
-2	-612,5
-1,5	-248,344
-1	-94
-0,5	-40,0625
0	-22,5
0,5	-15,1563
1	-11
1,5	7,875
2	111,5
2,5	474,5313
3	1440



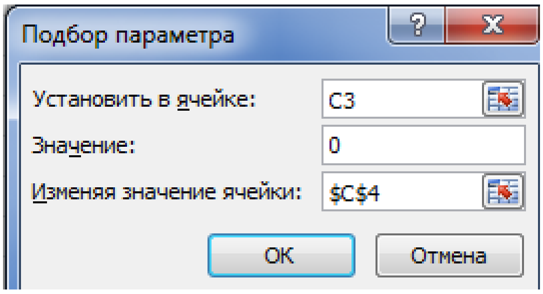
В каждом интервале выбираем значение функции, наиболее близкое по абсолютной величине к нулю, и составляем пары ячеек «аргумент – функция». Для первого интервала это ячейки A7, B7, для второго – A26, B26. Уточняем значения корней инструментом «Подбор параметра». Уточненные результаты для наглядности поместим в новые ячейки:

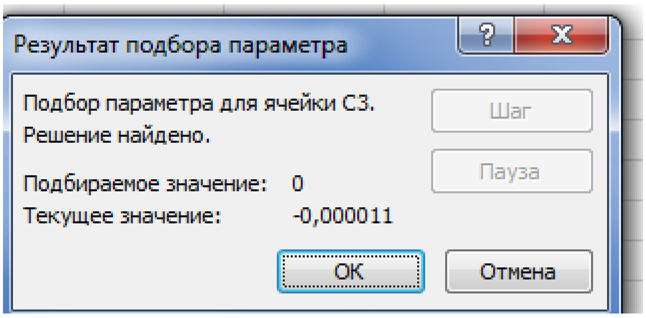
для первого корня y_1 – в C3, x_1 – в C4;

для второго корня y_2 – в E3, x_2 – в E4.

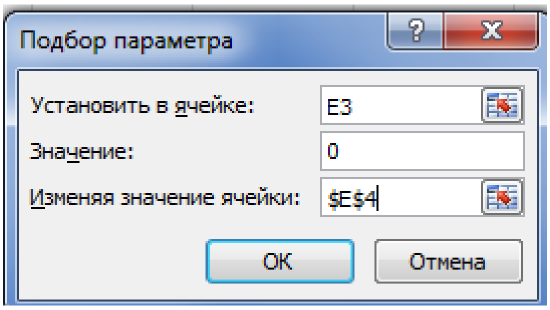
Формат ячеек установим числовой, шесть знаков после запятой.

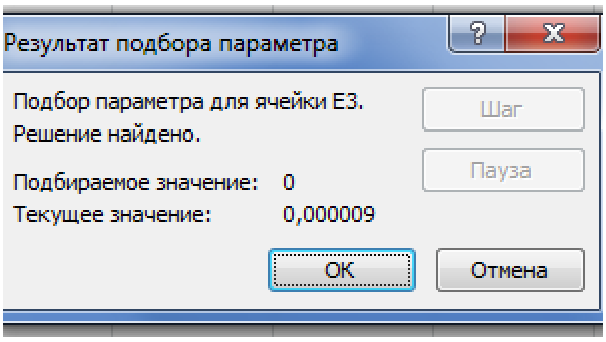
Для первого корня задание исходных данных и результат вычислений представлены ниже:





Для второго корня:





Результаты в ячейках Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поиск двух действительных корней полинома методом "Подбор параметра"						
2							
3		$y_1=$	-0,000011	$y_2=$	0,000009		
4		$x_1=$	**-8,398822**	$x_2=$	**1,387865**		

Получили корни уравнения: $x_1 = -8{,}398822$, $x_2 = 1{,}387865$. Точность решения составляет порядка 10^{-5}.

Точность решения можно повысить, задавая начальное значение ближе к корню. Это может быть обеспечено, например, за счет уменьшения шага табуляции.

2.3.4. Уточнение корней нелинейного уравнения инструментом «Поиск решения»

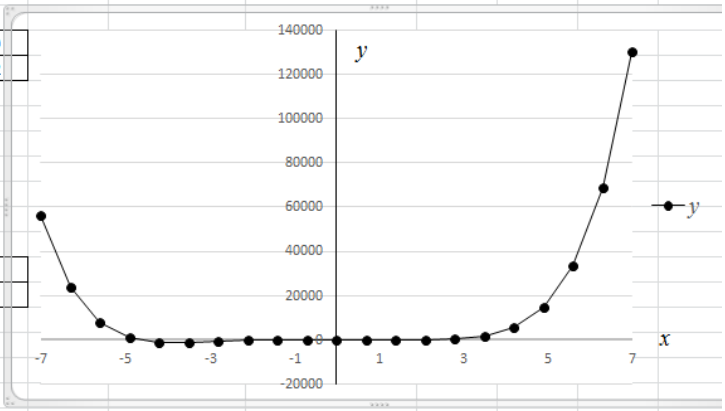
Инструмент «Подбор параметра» подходит для решения простых уравнений. В Excel среди надстроек имеется более общая процедура «Поиск решения», позволяющая учитывать различные дополнительные ограничения, например область допустимых значений (ОДЗ). Рассмотрим, как уточнять корни нелинейного уравнения инструментом «Поиск решения», на следующем примере.

Пример 2.7. Решить нелинейное уравнение $x^6 + 2x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 15x - 17{,}5 = 0$ с помощью инструмента «Поиск решения» на интервале [–7; 7].

Решение. Для определения количества корней произведем табулирование функции $x^6 + 2x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 15x - 17{,}5$ на заданном интервале с шагом 0,7 (таблица расположена в диапазоне A8:C28). Построим график функции. Из таблицы видно, что функция в двух местах меняет знак, т. е. имеет на интервале [–7; 7] два корня. Из графика видно, что на интервале [–5; 3] функция принимает значения, близкие к нулю, поэтому требуется уточнение корней.

Уточним значения двух корней «Поиском решения». Ищем первый корень на интервале [–4,9; –4,2]:

	A	B	C	D
7	№	*x*	*y*	
8	0	-7	56031,50	
9	1	-6,3	23952,13	
10	2	-5,6	7851,95	
11	3	-4,9	943,40	*a*=-4,9
12	4	-4,2	-1216,63	*b*=-4,2
13	5	-3,5	-1321,80	
14	6	-2,8	-826,55	
15	7	-2,1	-371,70	
16	8	-1,4	-125,22	
17	9	-0,7	-38,46	
18	10	1,11E-15	-17,50	
19	11	0,7	-9,93	
20	12	1,4	-6,83	*a*=1,4
21	13	2,1	39,89	*b*=2,1
22	14	2,8	384,90	
23	15	3,5	1741,58	
24	16	4,2	5618,78	
25	17	4,9	14742,39	
26	18	5,6	33561,54	
27	19	6,3	68839,53	
28	20	7	130329,50	



В ячейку, например B32, введем формулу для вычисления $y = f(x)$, а начальное приближение корня поместим в ячейку A32. Возьмем значение корня $a = -4{,}9$ (на этой границе функция ближе к нулю, чем на границе b). При предположении о линейности функции на данном интервале в качестве начального приближения корня можно взять значение $(a + b) / 2$ – середину интервала. В ячейку B32 введем формулу =A32^6+2*A32^5-10*A32^4+10*A32^3-9*A32^2+15*A32-17,5. Получим

	A	B
30	Начальные значения	
31	x	y
32	-4,9	943,401221

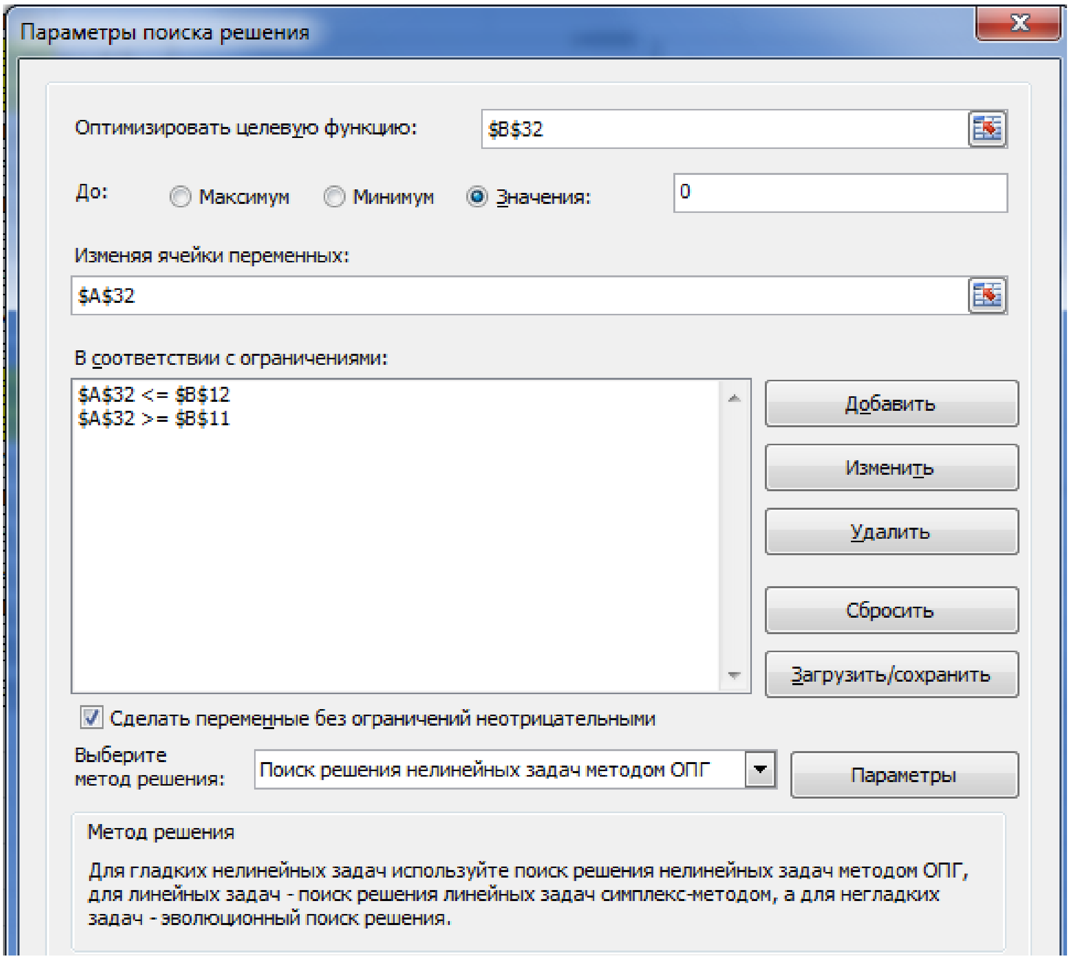
Инструмент «Поиск решения» включается на вкладке «Данные» командой «Поиск решения». После открытия диалогового окна необходимо выполнить следующие действия:

1) в поле «Оптимизировать целевую функцию» ввести адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значения «0» (это B32);

2) в поле «Изменяя ячейки переменных» ввести адреса изменяемых ячеек, т. е. аргументов целевой функции, разделяя их знаком «;» (или щелкая мышью при нажатой клавише «Ctrl» на соответствующих ячейках). Для автоматического поиска всех влияющих на решение ячеек используется кнопка «Предположить»; в рассматриваемом случае имеется одна изменяемая ячейка – A32;

3) в поле «В соответствии с ограничениями» с помощью кнопки «Добавить» ввести ограничения, которым должен отвечать результат поиска; для рассматриваемого примера имеются два ограничения, соответствующие диапазоны поиска корня $x \geq a$ и $x \leq b$ (в Excel представим их в виде \$A\$32>=\$B\$11, \$A\$32Б=\$B\$12); на вкладке «Параметры» задана «Точность ограничений»: 0,000001;

4) для запуска итерационного процесса поиска решения нажать кнопку «Найти решение» (введенные ограничения можно изменить или удалить):



Получаем первый корень x_1 = –4,703118947:

	A	B
30	Поиск решения	
31	*x*	y
32	-4,703118947	-1,46372E-12

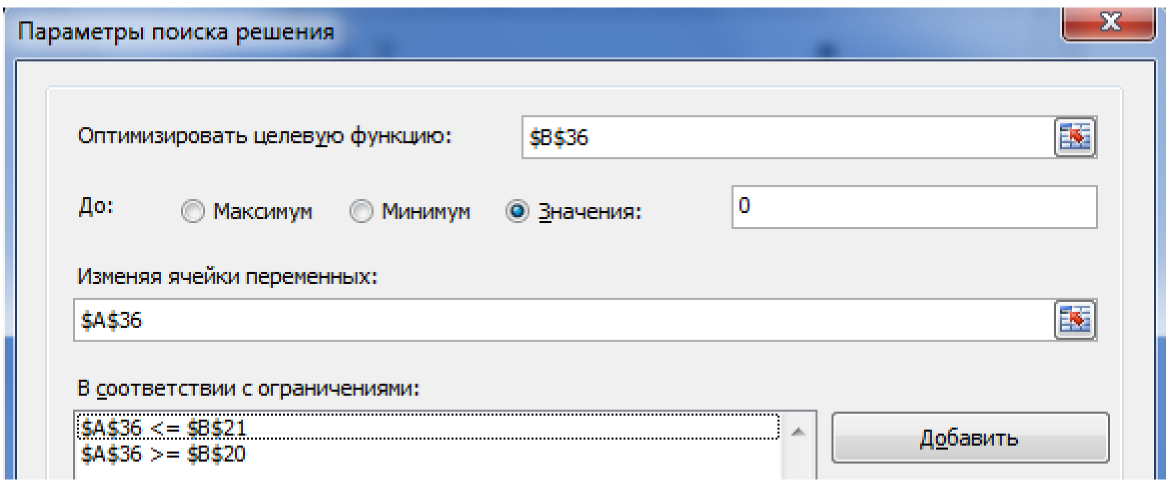
Значение целевой функции *y* = –1,46372E-12= $-1{,}463\,72 \cdot 10^{-12} \approx 0$. В этом можно убедиться, задав числовой формат ячейки B32:

30	Поиск решения	
31	*x*	y
32	-4,703118947	0,000000000

Таким же образом ищем второй корень уравнения на интервале [1,4; 2,1]. Начальное приближение корня поместим в ячейку A36 (*x* = 1,4); значение функции будет в B36:

	A	B
34	Начальные значения	
35	*x*	y
36	1,4	-6,829984

Уточним значения второго корня нелинейного уравнения инструментом «Поиск решения», задав соответствующие параметры поиска решения («оптимизировать целевую функцию до значения 0», «изменяя ячейки переменных в соответствии с ограничениями»):



Получаем x_2 = 1,696890917:

	A	B
34	Поиск решения	
35	x	y
36	1,696890917	-0,000003

Точность вычисления второго корня ниже, чем первого. На точность влияет близость задания начального значения корня к его истинному значению и поведение функции на исследуемом интервале. В ряде случаев точность можно повысить, сменив метод решения (например, «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ» на «Эволюционный поиск решения» или наоборот).

При использовании инструмента «Поиск решения» без задания ограничений (т. е. при использовании его как инструмента «Подбор параметра») в обоих случаях нахождения корней будет выдаваться только значение второго корня, а первый корень теряется:

	A	B
30	Поиск решения для первого корня	
31	x	y
32	1,696902153	0,00047705

Нахождение только одного корня нелинейного уравнения – это недостаток итерационных методов. Для нахождения других корней можно брать новые начальные условия и применять метод заново, но нет гарантии, что при этом итерации сойдутся к новому корню, а не к уже найденному (если вообще сойдутся). Поэтому корни ищутся на интервале такой величины, чтобы туда попадал только один корень.

Для поиска других корней можно использовать математический метод удаления корней уравнения, который заключается в следующем.

Пусть x_1 – известный корень уравнения $f(x) = 0$ ($x_1 \neq 0$). Получим новую функцию $f_1(x) = f(x) / (x - x_1)$. Значение x_1 будет являться корнем уравнения $f_1(x) = 0$. Его кратность в этом уравнении на единицу меньше кратности в уравнении $f(x) = 0$. Все остальные корни уравнений $f(x) = 0$ и $f_1(x) = 0$ с учетом их кратности совпадают.

Применяя итерационный метод уточнения корней к уравнению $f_1(x) = 0$, находим новый корень x_2 (который может в случае кратных корней совпадать с x_1). Аналогично можно рассмотреть функцию

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{(x - x_2)} = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)} \ (x_2 \neq 0)$$

и уточнить ее корни.

При многократном повторении данной процедуры можно определить все корни исходного уравнения $f(x) = 0$ с учетом их кратности.

При использовании итерационных методов деление производится не на истинное значение корня, а на найденное его приближенное значение. В этом случае корни вспомогательных уравнений могут быть сдвинуты относительно истинных корней уравнения $f(x) = 0$. Это может привести к значительным погрешностям, если описанная процедура применялась неоднократно.

Чтобы избежать вышеуказанного, с помощью вспомогательных функций вычисляются лишь первые итерации, а окончательные вычисления проводятся по исходной функции $f(x)$ с использованием в качестве начального приближения последней итерации, полученной по вспомогательной функции.

Метод деления пополам не позволяет найти корни четной кратности [34]. Корень нечетной кратности можно определить данным методом, но без определения. При исключении корня делением $f(x)$ на $(x - x_1)$ после первого исключения останется корень четной кратности. Далее метод перестает замечать этот корень и не позволяет найти его вторично и исключить. Метод характеризуется существенными ограничениями на область сходимости: два начальных приближения к корню должны быть такими, что значения функции в этих точках должны иметь разный знак. Кроме того, если внутри указанной области находится более одного корня, нельзя указать точно, к какому именно корню сойдется метод.

Метод Ньютона сходится в достаточно малой окрестности корня любой кратности. Поэтому после первого исключения найденного кратного корня он может снова сходиться к этому значению корня. Однако на практике находят не точное, а приближенное значение корня, поэтому второй раз находим корень с меньшей точностью. В связи с этим для корней кратности порядка 5 и выше может возникнуть значительная погрешность.

Задания для самостоятельной работы

1. Задано полиномиальное уравнение $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}=0$. Требуется:

1) определить отрезок $[a;b]$ локализации всех корней многочлена, число положительных и отрицательных корней;

2) используя табулирование и график функции, определить положение корней уравнения;

3) найти корни многочлена с погрешностью ε = 10^{-5} методом половинного деления (дихотомии).

Варианты заданий:

1) $x^3 + 2x + 1 = 0$	2) $x^3 + 4x^2 + 2x – 1 = 0$
3) $x^4 + 6x + 2 = 0$	4) $x^9 – 2x^8 + 9x – 10 = 0$
5) $x^3 + x – 10\ 000 = 0$	6) $x^6 + 2x^5 + 10x^3 – 9x^2 + 15x – 17{,}5 = 0$
7) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$	8) $x^5 – 2{,}8x^4 + 3x^3 – 3x^2 + 4{,}4x – 5 = 0$
9) $x^4 – 4x – 1 = 0$	10) $x^4 – 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 = 0$
11) $2x^4 – 3x^2 + 75x – 1\ 000 = 0$	12) $x^5 – 1{,}8x^4 – 1{,}9x^3 – 2{,}3x^2 + 2{,}8x – 3 = 0$
13) $x^5 – x – 0{,}2 = 0$	14) $x^5 – 3x^4 + 3{,}2x^3 – 3{,}5x^2 + 4{,}6x – 5 = 0$
15) $x^5 + x^4 + x – 1 = 0$	16) $x^5 – 2x^4 + 2{,}9x^3 – 2{,}44x^2 + 4{,}2x – 5 = 0$
17) $x^5 – 10x + 128 = 0$	18) $x^5 – 4x^4 + 4x^3 – 4{,}33x^2 + 6x – 6{,}67 = 0$
19) $x^7 – 2x^6 + 7x – 8 = 0$	20) $x^5 – 1{,}6x^4 + 2{,}5x^3 – 2{,}7x^2 + 3{,}6x – 4 = 0$
21) $x^4-12x^2+6=0$	22) $x^3+0{,}4x^2+0{,}6x-1{,}6=0$
23) $3x^4+8x^3+6x^2-9=0$	24) $x^3+0{,}1x^2+0{,}4x-1{,}2=0$
25) $x^3-2x^2+2x-4=0$	26) $2x^4-8x^3+7x^2-1=0$
27) $2x^4-3x^3+x^2-10=0$	28) $3x^4+4x^3-12x^2-6=0$
29) $x^3 – 2{,}9x^2 + 1{,}4x + 0{,}8 = 0$	30) $x^3 – 0{,}01x^2 – 0{,}705x + 0{,}139 = 0$
31) $x^3 – 2{,}5x^2 – 1{,}4x + 4{,}4 = 0$	32) $x^3 + 1{,}4x^2 – 5{,}4x – 7{,}384 = 0$

33) $x^6 + x^5 – 18x^4 + 22x^3 – 17x^2 + 31x – 37{,}5 = 0$
34) $x^6 + 9x^5 – 18x^4 + 19x^3 – 19x^2 + 30x – 35 = 0$
35) $x^6 + 10{,}5x^5 – 24x^4 + 28x^3 – 29x^2 + 39x – 45 = 0$
36) $x^5 – 2x^4 + 2{,}25x^3 – 2{,}58x^2 + 3{,}25x – 3{,}54 = 0$
37) $x^6 + 9{,}5x^5 – 20x^4 + 22x^3 – 25x^2 + 32x – 35 = 0$
38) $x^5 – 2x^4 + 2{,}09x^3 – 2{,}52x^2 + 3x – 3{,}26 = 0$
39) $x^6 + 4{,}5x^5 – 18x^4 + 22x^3 – 17x^2 + 31x – 37{,}5 = 0$
40) $x^6 + 3{,}5x^5 – 14x^4 + 14x^3 – 17x^2 + 21x – 22{,}5 = 0$
41) $x^6 + 7{,}5x^5 –1\ 8x^4 + 20x^3 – 11x^2 + 19x – 32{,}6 = 0$

42)	$x^6 + 6{,}5x^5 - 14x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 21x - 22{,}5 = 0$
43)	$x^5 - 2{,}6x^4 + 2{,}82x^3 - 3{,}41x^2 + 4{,}12x - 3{,}23 = 0$
44)	$x^6 + 6{,}5x^5 - 20x^4 + 21x^3 - 21x^2 + 31x - 32{,}5 = 0$
45)	$x^6 + 8{,}5x^5 - 16x^4 + 19x^3 - 15x^2 + 27x - 36{,}5 = 0$
46)	$x^6 + 6{,}5x^5 - 20x^4 + 21x^3 - 21x^2 + 31x - 22{,}5 = 0$
47)	$x^6 + 8{,}5x^5 - 16x^4 + 19x^3 - 15x^2 + 27x - 31{,}5 = 0$

2. Задано трансцендентное уравнение $f(x) = 0$. Требуется:

1) используя табулирование и график функции, определить положение корней уравнения;

2) найти корни уравнения с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$ методом половинного деления (дихотомии) с помощью инструментов «Подбор параметра» и «Поиск решения».

Варианты заданий:

1)	$(\cos(x) - 3\sin(x))^2 - e^x = 0$	2)	$e^x + x = 0$
3)	$2\cos(x) + 2x^2 - 1 = 0$	4)	$x\ln x - 1 = 0$
5)	$\ln(x+1) - x^2 + 1 + 5\cos(x)^2 = 0$	6)	$\mathrm{tg}x - x = 0$
7)	$3\cos(x)^2 + 2{,}3\sin(x) - 0{,}5\ln(x - 0{,}5) = 0$	8)	$x - \sin x - 0{,}25 = 0$
9)	$x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = 0$	10)	$2x - e^{-0{,}1x} = 0$
11)	$x^9 - 2x^8 + 9x - 10 = 0$	12)	$x + \ln x = 0$
13)	$10x - e^x = 0$	14)	$x\sin x - e^{-0{,}1x} = 0$
15)	$\ln x - 0{,}125e^x + x = 0$	16)	$x - 5\ln x = 0$
17)	$\sin x + \cos 2x = 0$	18)	$x^7 \sin x - 2x^6 \sin x + 7x - 8 = 0$
19)	$e^x - (2x - 1)^2 = 0$	20)	$3\cos 2x - e^x \sin x = 0$
21)	$x - 2\sin(x + 0{,}5) = 0$	22)	$x^3 - 2\sin x - 0{,}5 = 0$
23)	$0{,}8x^2 - \sin(10x) = 0$	24)	$x^2 - \ln(x + 2) = 0$
25)	$x - \sin x - 0{,}25 = 0$	26)	$2e^x + 1 - (x-2)^2 = 0$
27)	$x - \sqrt{\ln(x+2)} = 0$	28)	$\mathrm{arctg}(x-1) + 2x = 0$
29)	$x\lg(x+1) - 1 = 0$	30)	$2\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) - 0{,}5x^2 - 1 = 0$
31)	$(x+2)\log_2 x - 1 = 0$	32)	$e^{-2x^2} - 2x + 1 = 0$
33)	$\sin(2x)e^{-2x} = 0$	34)	$e^x - 20x = 0$
35)	$0{,}9x = \sin x + 1$	36)	$3\ln\lvert 21 - x\rvert + 2\cos x = 0$
37)	$x^2 + \sin x - 0{,}5 = 0$	38)	$\sin x - (2 - x)^2 = 0$
39)	$3\cos^2 x - 5x + 6 = 0$	40)	$0{,}9x = \sin x + 1$

3. Решить уравнения методом Ньютона (касательных) с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ на заданном интервале.

Варианты заданий:

1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-0,6=0$, [0,2; 1]	2) $\ln(x+1)-\sqrt{2-x^2}=0$, [1; 2]
3) $x\sin x+\cos x=0$, [2,6; 2,9]	4) $x^5+2x-7=0$, [1; 1,5]
5) $e^x-1,1/\sqrt{x}=0$, [0,3; 0,8]	6) $\sqrt{x}-\cos x=0$, [0,5; 0,7]
7) $4\sin x + 1 - x = 0$, [–10; 10]	8) $\sin x + x^3 - 2 = 0,\ x \in [0; \pi]$
9) $e^x+e^{-x}-2+\sqrt{x}=0$, [1; 1,5]	10) $x^2-\mathrm{tg}x=0$, [1; 2]
11) $\mathrm{tg}x-\mathrm{e}^{-x}=0$, [3; 3,3]	12) $\ln x-4+x^2=0$, [1,5; 2]
13) $\cos x-\sin(2x^2)=0$, [1,5; 2]	14) $x^4-x^3-1=0$, [–1; –0,5]
15) $e^x-1/\sqrt{x}=0$, [2,5; 3]	16) $\mathrm{e}^{2\sin x}-x=0$, [2,5; 3]
17) $5\ln\|3-x\|+2\cos x=0,\ x\in\left[0,9;\ \frac{\pi}{2}\right]$	18) $x^2+sinx-1=0, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
19) $\lg x-\frac{3}{x^2}=0,\ x\in[1;3]$	20) $\ln x-\frac{3}{x^2}=0,\ x\in[1;3]$
21) $x^2+\sin x-0,1=0,\ x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$	22) $5\lg x-\frac{2}{x^2}=0,\ x\in[1;3]$

4. Решить уравнения с помощью инструментов «Подбор параметра» и «Поиск решения».

Варианты заданий:

1) $e^{-2x}-2x+1=0$	2) $2\sin(x+\frac{\pi}{3})=0,5x^2-1$
3) $\mathrm{arctg}(x-1)+2x=0$	4) $x-\sin x=0,25$
5) $2e^x+1=(x-2)^2$	6) $(x+2)\log_2 x=1$
7) $x=\sqrt{\lg(x+2)}$	8) $x\lg(x+1)=1$
9) $\sqrt{2x^2+1,2-\cos x}-1$	10) $0,1x^2-x\ln(x)$
11) $\cos\left(\frac{2}{x}\right)-2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}$	12) $1-x+\sin x-\ln(1+x)$

ГЛАВА 3
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 3.1. Системы нелинейных уравнений

Система нелинейных уравнений в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \\ f_2(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ – неизвестные переменные, которые требуется найти;

$f_i\ \ (i = \overline{1,n})$ – нелинейные функции.

Решением системы (3.1) являются такие значения $x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0$, которые обращают эту систему в тождество.

Задача решения системы нелинейных уравнений (3.1) возникает в случае ряда прикладных задач, например поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью проверки необходимых условий, при применении неявных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д.

Функции $f(x)$ могут быть алгебраическими (многочлены) или трансцендентными.

Нахождение решений систем нелинейных уравнений – это существенно более трудная задача, чем решение нелинейного уравнения вида $f(x) = 0$.

В отличие от систем линейных уравнений, универсальных аналитических методов решения нелинейных систем не существует. Лишь в частных случаях можно решить нелинейную систему непосредственно. Например, для случая двух уравнений иногда удается выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного уравнения относительно одного неизвестного. Применяются методы решения систем нелинейных уравнений, известные из школьного курса алгебры: разложение на множители, исключение переменных, алгебраическое сложение, замена переменных, метод введения новых переменных и др. [31].

Для решения систем нелинейных уравнений обычно используют итерационные методы (простой итерации, Ньютона).

Корни некоторых систем из двух нелинейных уравнений можно приближенно найти графическим способом, определив точки пересечения кривых, задаваемых уравнениями $f_1(x_1,\ x_2) = 0$ и $f_2(x_1,\ x_2) = 0$ на плоскости $(x_1,\ x_2)$.

§ 3.2. Решение систем нелинейных уравнений графическим методом

Система двух уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Для нахождения всех корней уравнений необходимо выполнить последовательность действий:

1. Привести уравнения системы к виду $y = \varphi(x)$, т. е.

$$\begin{cases} y=\varphi_1(x), \\ y=\varphi_1(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

2. Определить границы изменения аргумента для каждого из уравнений. Создать последовательность значений аргумента x в заданном диапазоне.

3. Рассчитать значения функций для каждого значения аргумента (табулировать функции).

4. Построить графики уравнений функций в границах изменения аргумента. В этих границах находятся решения уравнений.

5. Найти точку (или точки) пересечения построенных графиков, определить количество корней.

6. Подвести указатель мыши к точке на графике одной из функций, которая расположена ближе других к точке пересечения графиков функций. Снять значение отобразившихся координат точки и с помощью инструмента «Подбор параметра» определить значение корня. Если корней несколько, то повторить процедуру для каждого из них.

Пример 3.1. Решить систему нелинейных уравнений на интервале [–1; 1] графическим методом (определить количество корней и их значения):

$$\begin{cases} x^4-2x^3-3x^2+x=y+5, \\ x^4-3x^2+2x^2=y+9x+6. \end{cases}$$

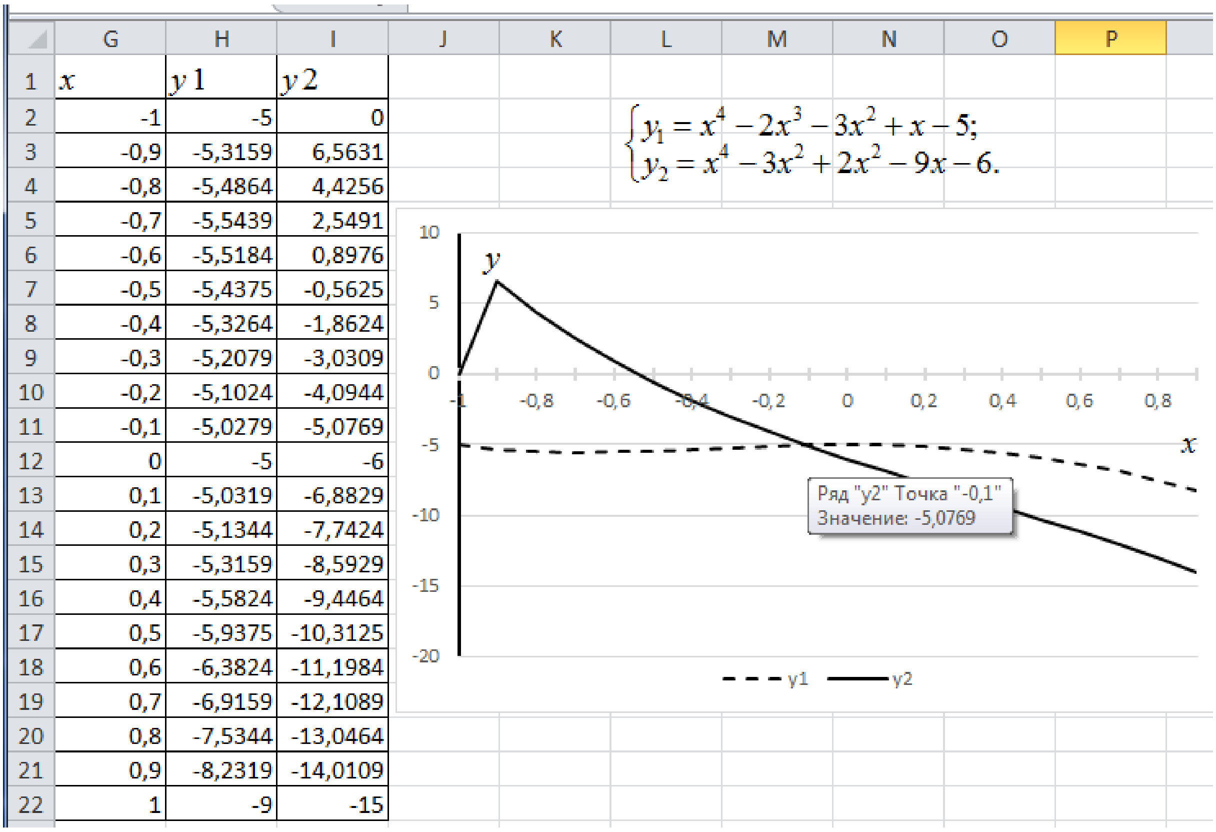
Решение. Выразим y из первого y_1 и второго y_2 уравнений системы через x:

$$\begin{cases} y_1=x^4-2x^3-3x^2+x-5, \\ y_2=x^4-3x^2+2x^2-9x-6. \end{cases}$$

Протабулируем каждое из уравнений системы.

В диапазон ячеек G2:G22 введем значения x, в ячейку H1 введем формулу вычисления y_1 =G2^4-2*G2^3-3*G2^2+G42-5, в ячейку I1 – формулу вычисления y_2 =G2^4-3*G2^3+2*G2^2-9*G2-6.

Подведем указатель мыши к точке пересечения графиков функций на уравнении y_2 (можно сделать аналогично и для y_1). Отобразится значение функции $y_2 = -5{,}0769$. Из пересечения графиков видно, что система имеет только одно решение:

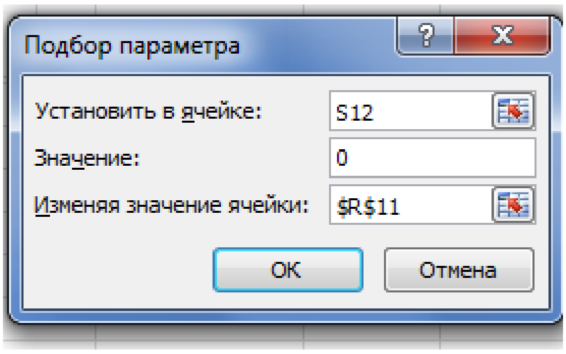


	G	H	I
1	x	y 1	y 2
2	-1	-5	0
3	-0,9	-5,3159	6,5631
4	-0,8	-5,4864	4,4256
5	-0,7	-5,5439	2,5491
6	-0,6	-5,5184	0,8976
7	-0,5	-5,4375	-0,5625
8	-0,4	-5,3264	-1,8624
9	-0,3	-5,2079	-3,0309
10	-0,2	-5,1024	-4,0944
11	-0,1	-5,0279	-5,0769
12	0	-5	-6
13	0,1	-5,0319	-6,8829
14	0,2	-5,1344	-7,7424
15	0,3	-5,3159	-8,5929
16	0,4	-5,5824	-9,4464
17	0,5	-5,9375	-10,3125
18	0,6	-6,3824	-11,1984
19	0,7	-6,9159	-12,1089
20	0,8	-7,5344	-13,0464
21	0,9	-8,2319	-14,0109
22	1	-9	-15

$$\begin{cases} y_1 = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 5; \\ y_2 = x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 9x - 6. \end{cases}$$

Скопируем ячейки G11:I11 в диапазон R11:T11. В ячейку S12 введем формулу разности $y_1 - y_2$, т. е. формулу =S11-T11.

С помощью инструмента «Подбор параметра» добиваемся, чтобы $y_1 - y_2 = 0$:



В ячейке R11 получаем значение корня $x = -0{,}104883$, в ячейках S11, T11 – приближенно равные значения функций $y_1 - y_2$, точность решения составляет 10^{-4}:

	R	S	T
11	-0,104883	-5,03057	-5,03047
12		-0,0001	

§ 3.3. Решение систем нелинейных уравнений с помощью табулирования функции и инструмента «Поиск решения»

Пункты 1–6 предыдущего параграфа дополняются следующими:

7. Привести систему к одному равносильному уравнению для дальнейшего поиска корней.

Пара (x, y) является решением системы тогда и только тогда, когда она является решением следующего равносильного уравнения с двумя неизвестными:

$$(f_1(x,y))^2 + (f_2(x,y))^2 = 0. \tag{3.4}$$

8. Протабулировать функцию по двум переменным, заполнив двумерную таблицу. Найти в таблице точки минимума по двум переменным.

9. Уточнить значения корней с помощью инструмента «Подбор параметра».

Для пояснения изложенной методики рассмотрим пример.

Пример 3.2. Решить систему нелинейных уравнений графическим методом, протабулировать функцию, уточнить значения корней инструментом «Поиск решения»:

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 4, \\ 2x + 7y = 1. \end{cases}$$

Решение

Шаг 1. Для определения существования корней построим графики двух уравнений системы, представив их в виде приведенной системы (3.3).

Первое уравнение распадается на два и имеет вид $y_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{4-5x^2}}{2}$. Границы изменения аргумента x [–0,894427; 0,894427]. Второе уравнение: $y_3 = \dfrac{1-2x}{7}$. Границы изменения аргумента x [–∞; +∞].

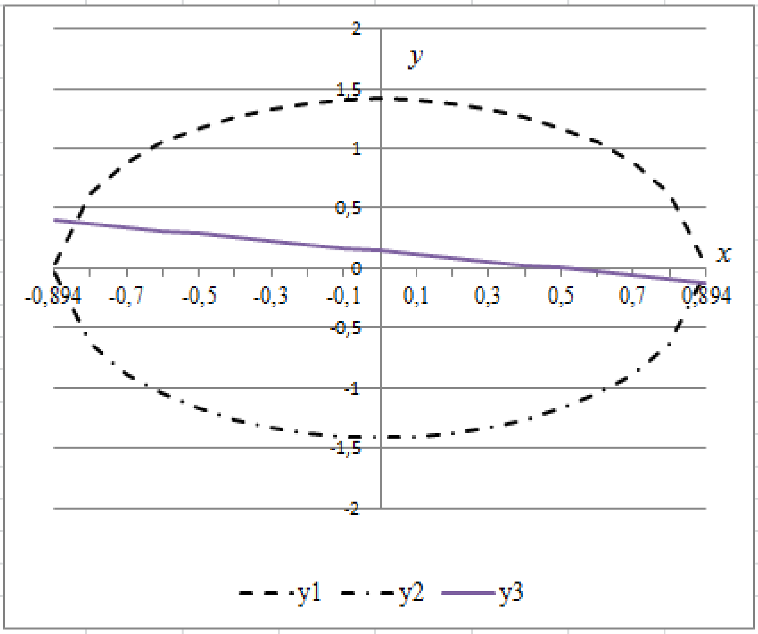
Шаг 2. Построим графики уравнений y_1, y_2 и y_3 в диапазоне [–0,894; 0,894] на рабочем листе Excel. В граничных точках изменения аргумента x функции y_1, y_2 не существуют, поэтому в диапазоне взято меньшее значение аргумента.

В ячейки A6:A24 вводим значения аргумента. Для наглядности делений оси абсцисс производим автозаполнение ячеек A7:A23 от –0,8 до 0,8 с шагом 0,1. В ячейки A6 и A24 вводим соответственно граничные значения диапазона [–0,894; 0,894]. В ячейки B6:D6 вводим формулы для вычисления y_1, y_2 и y_3. В ячейку B6 вводим формулу =–КОРЕНЬ((4-5*A6^2)/2), в ячейку C6 – формулу =КОРЕНЬ((4-5*A6^2)/2), в ячейку D6 – формулу =(1-2*A6)/7. Введенные формулы копируем до 24-й строки. Выделяем диапазоны B6:B24; C6:C24 и D6:D24. Строим график.

Решением системы уравнений являются точки пересечения дуг двух окружностей и прямой, что показано ниже:

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 4; \\ 2x + 7y = 1. \end{cases}$$

x	y_1	y_2	y_3
-0,894	0,043704	-0,043704	0,398286
-0,8	0,632456	-0,632456	0,371429
-0,7	0,880341	-0,880341	0,342857
-0,6	1,048809	-1,048809	0,314286
-0,5	1,172604	-1,172604	0,285714
-0,4	1,264911	-1,264911	0,257143
-0,3	1,332291	-1,332291	0,228571
-0,2	1,378405	-1,378405	0,2
-0,1	1,405347	-1,405347	0,171429
0	1,414214	-1,414214	0,142857
0,1	1,405347	-1,405347	0,114286
0,2	1,378405	-1,378405	0,085714
0,3	1,332291	-1,332291	0,057143
0,4	1,264911	-1,264911	0,028571
0,5	1,172604	-1,172604	0
0,6	1,048809	-1,048809	-0,02857
0,7	0,880341	-0,880341	-0,05714
0,8	0,632456	-0,632456	-0,08571
0,894	0,043704	-0,043704	-0,11257



Шаг 3. Для дальнейшего поиска корней приведем систему к одному равносильному уравнению вида (3.4). Получим

$$L = (5x^2 + 2y^2 - 4)^2 + (2x + 7y - 1)^2 = 0.$$

Шаг 4. Для решения равносильного уравнения находим начальные приближения корней, а затем уточняем их с помощью инструмента «Поиск решения».

Табулируем выражение, стоящее в левой части равносильного уравнения, как функцию переменных x и y. Для табуляции функции из рисунка определяем отрезки табуляции по переменным x [−0,9; 0,9] и y [−0,5; 0,5] и выполняем следующие действия:

1) на новом рабочем листе в столбец «A», начиная с ячейки A2, вводим последовательность значений x с шагом 0,1, а в строку «1», начиная с ячейки B1, вводим последовательность значений y с шагом 0,1;

2) диапазонам ячеек A2:A15 и B1:P1 присваиваем имена «x» и «y» соответственно (выделяем диапазон, которому нужно присвоить имя; нажимаем по нему правой кнопкой мыши; в появившемся контекстном меню выбираем пункт «Присвоить имя…»);

3) в ячейку B2 вводим формулу

=(5*x^2+2*y^2-4)^2+(5*x + 2*y-1)^2

и копируем ее по всем переменным, заполнив ею диапазон B2:P15.

Шаг 5. Находим начальные приближения. Поскольку ищем нули функции, то начальные приближения следует искать в точках, где функция принимает наименьшие значения.

Для удобства поиска наименьших значений вводим в ячейку B16 формулу =МИН(B2:B15), копируем ее по диапазону C16:P16. В ячейку Q2 вводим формулу =МИН(C2:P2) и копируем ее по диапазону Q3:Q15.

В диапазонах B16:P16 и Q3:Q15 отмечаем по два наименьших значения. Для возможности представления формат ячеек выбран числовым, число десятичных знаков – два:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		-1,20	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	
2	-0,60	41,42	36,04	32,21	29,23	26,57	23,85	20,84	17,45	13,77	10,03	6,61	4,04	3,02	4,40	9,17	3,02
3	-0,50	34,83	30,81	28,17	26,21	24,39	22,34	19,81	16,74	13,19	9,41	5,77	2,81	1,23	1,86	5,71	1,23
4	-0,40	29,26	26,44	24,85	23,79	22,73	21,29	19,24	16,49	13,13	9,39	5,65	2,44	0,46	0,56	3,73	0,46
5	-0,30	24,46	22,65	21,96	21,70	21,32	20,45	18,85	16,45	13,32	9,70	5,96	2,65	0,46	0,23	2,95	0,23
6	-0,20	20,21	19,24	19,31	19,73	19,95	19,60	18,44	16,40	13,55	10,13	6,51	3,24	1,01	0,65	3,18	0,65
7	-0,10	16,35	16,05	16,74	17,72	18,47	18,59	17,85	16,19	13,67	10,52	7,14	4,05	1,95	1,69	4,26	1,69
8	0,00	12,81	13,00	14,16	15,60	16,78	17,33	17,00	15,73	13,58	10,80	7,76	5,00	3,21	3,25	6,09	3,21
9	0,10	9,55	10,05	11,54	13,32	14,87	15,79	15,85	14,99	13,27	10,92	8,34	6,05	4,75	5,29	8,66	4,75
10	0,20	6,61	7,24	8,91	10,93	12,75	14,00	14,44	14,00	12,75	10,93	8,91	7,24	6,61	7,85	11,98	6,61
11	0,30	4,06	4,65	6,36	8,50	10,52	12,05	12,85	12,85	12,12	10,90	9,56	8,65	8,86	11,03	16,15	4,65
12	0,40	2,06	2,44	4,05	6,19	8,33	10,09	11,24	11,69	11,53	10,99	10,45	10,44	11,66	14,96	21,33	2,44
13	0,50	0,83	0,81	2,17	4,21	6,39	8,34	9,81	10,74	11,19	11,41	11,77	12,81	15,23	19,86	27,71	0,81
14	0,60	0,62	0,04	1,01	2,83	4,97	7,05	8,84	10,25	11,37	12,43	13,81	16,04	19,82	26,00	35,57	0,04
15	0,70	1,78	0,45	0,88	2,38	4,40	6,57	8,65	10,57	12,40	14,38	16,88	20,45	25,78	33,71	45,23	0,45
16		0,62	0,04	0,88	2,38	4,40	6,57	8,65	10,25	11,19	9,39	5,65	2,44	0,46	0,23	2,95	

Найденные на данном шаге значения корней поместим в таблицу. Число десятичных знаков возьмем равным шести:

	O	P	Q	R
1	Первый корень		Второй корень	
2		0,400000		-0,100000
3	-0,900000	0,136900	0,900000	0,014900

Для целевой ячейки P3 (первый корень) значение *x* находится в O3, значение *y* – в P2; для целевой ячейки R3 (второй корень) значение *x* находится в O3, значение *y* – в R2.

Шаг 6. Уточним найденные значения корней с помощью инструмента «Поиск решения».

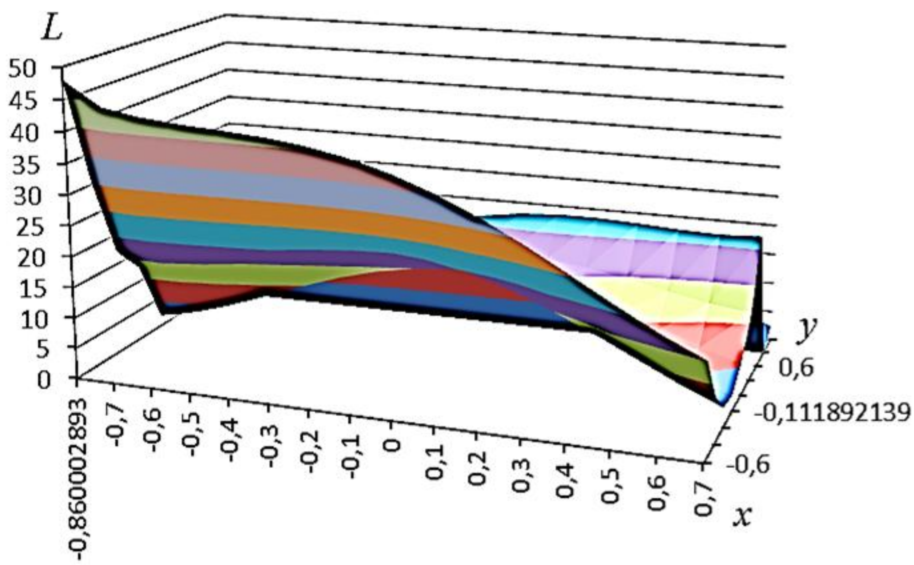
Зададим точность ограничения 0,000001. Для целевой ячейки P3 изменяем ячейки O3 и P2. Для целевой ячейки R3 изменяем ячейки Q3 и R2:

	O	P	Q	R
1	Первый корень		Второй корень	
2		0,388572		-0,111892
3	-0,860003	0,000000	0,891623	0,000000

Решением рассматриваемой в примере системы нелинейных уравнений являются пары (*x*, *y*):

[−0,860005; 0,388572] и [0,891623; –0,111892].

Равносильное уравнение системы нелинейных функций изображается поверхностью с двумя минимумами:



Пример 3.3. Решить систему нелинейных уравнений графическим методом, протабулировать функцию, уточнить значения корней инструментом «Поиск решения»:

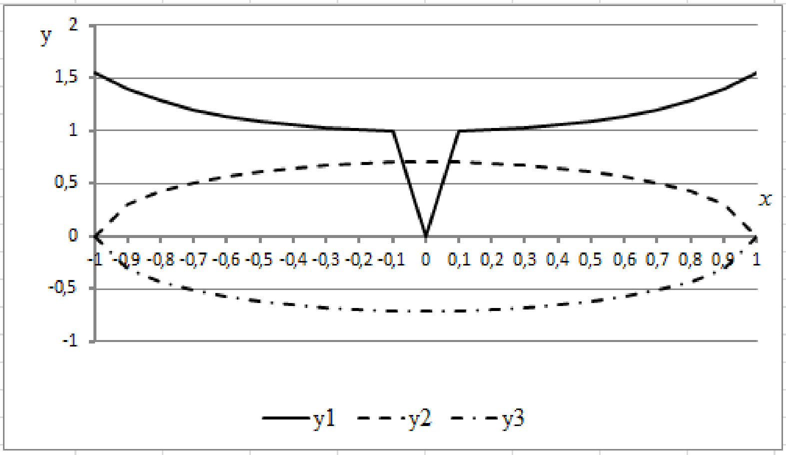
$$\begin{cases} tg(x) - xy = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Для выяснения наличия корней построим графики двух уравнений системы. Границы изменения аргумента для первого уравнения $tg(x) - xy = \frac{tg(x)}{x}$ составляют x $[-\infty; +\infty]$. Второе уравнение распадается на два и имеет вид $y_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$. Границы изменения аргумента x для второго и третьего уравнений: x $[-1; 1]$.

Построим графики уравнений y_1, y_2 и y_3 в диапазоне $[-1; 1]$ на рабочем листе Excel. Возьмем шаг табуляции 0,1.

Из графика видно, что система нелинейных уравнений имеет два корня:

x	y 1	y 2	y 3
-1	1,55741	0	0
-0,9	1,40018	0,30822	-0,3082
-0,8	1,28705	0,42426	-0,4243
-0,7	1,20327	0,50498	-0,505
-0,6	1,14023	0,56569	-0,5657
-0,5	1,0926	0,61237	-0,6124
-0,4	1,05698	0,64807	-0,6481
-0,3	1,03112	0,67454	-0,6745
-0,2	1,01355	0,69282	-0,6928
-0,1	1,00335	0,70356	-0,7036
0	0	0,70711	-0,7071
0,1	1,00335	0,70356	-0,7036
0,2	1,01355	0,69282	-0,6928
0,3	1,03112	0,67454	-0,6745
0,4	1,05698	0,64807	-0,6481
0,5	1,0926	0,61237	-0,6124
0,6	1,14023	0,56569	-0,5657
0,7	1,20327	0,50498	-0,505
0,8	1,28705	0,42426	-0,4243
0,9	1,40018	0,30822	-0,3082
1	1,55741	0	0



Приведем систему к одному равносильному уравнению вида (3.4).

Получим $\text{tg}(x) - xy)^2 + (x^2 + 2y^2 - 1)^2 = 0$.

Для табуляции данной функции определяем отрезки табуляции по переменным x $[-0{,}1; 0{,}1]$ и y $[-0{,}5; 1]$:

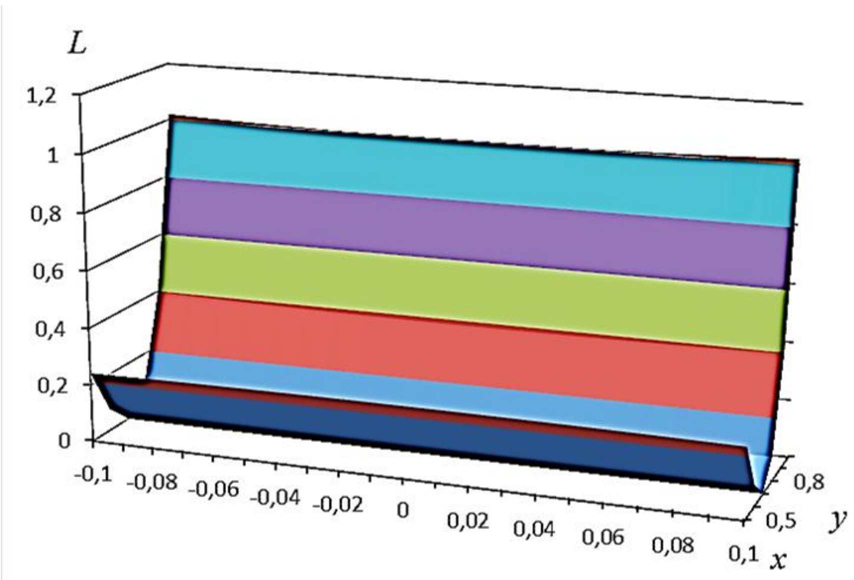
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		0,5	0,6	0,707	0,8	0,9	1	мин
2	-0,1	0,242633579	0,074526886	0,000972265	0,084513	0,397006805	1,020100112	0,000972
3	-0,09	0,244012611	0,075243222	0,000769103	0,083334	0,394595058	1,016265669	0,000769
4	-0,08	0,245254678	0,07589194	0,00059467	0,082286	0,392443727	1,012840989	0,000595
5	-0,07	0,246357042	0,076470438	0,000446514	0,081367	0,390550627	1,009824023	0,000447
6	-0,06	0,247317291	0,076976426	0,000322474	0,080575	0,38891383	1,007212965	0,000322
7	-0,05	0,248133337	0,07740792	0,000220677	0,079907	0,387531669	1,005006252	0,000221
8	-0,04	0,248803414	0,077763244	0,000139544	0,079363	0,386402731	1,00320256	0,00014
9	-0,03	0,24932608	0,078041026	7,77801E-05	0,078941	0,385525864	1,00180081	7,78E-05
10	-0,02	0,249700213	0,078240203	3,43805E-05	0,07864	0,384900171	1,00080016	3,44E-05
11	-0,00221	0,249996333	0,078398044	5,08032E-07	0,078403	0,384406112	1,000009779	5,08E-07
12	0	0,25	0,0784	9,1204E-08	0,0784	0,3844	1	9,12E-08
13	0,002211	0,249996333	0,078398044	5,08032E-07	0,078403	0,384406112	1,000009779	5,08E-07
14	0,02	0,249700213	0,078240203	3,43805E-05	0,07864	0,384900171	1,00080016	3,44E-05
15	0,03	0,24932608	0,078041026	7,77801E-05	0,078941	0,385525864	1,00180081	7,78E-05
16	0,04	0,248803414	0,077763244	0,000139544	0,079363	0,386402731	1,00320256	0,00014
17	0,05	0,248133337	0,07740792	0,000220677	0,079907	0,387531669	1,005006252	0,000221
18	0,06	0,247317291	0,076976426	0,000322474	0,080575	0,38891383	1,007212965	0,000322
19	0,07	0,246357042	0,076470438	0,000446514	0,081367	0,390550627	1,009824023	0,000447
20	0,08	0,245254678	0,07589194	0,00059467	0,082286	0,392443727	1,012840989	0,000595
21	0,09	0,244012611	0,075243222	0,000769103	0,083334	0,394595058	1,016265669	0,000769
22	0,1	0,242633579	0,074526886	0,000972265	0,084513	0,397006805	1,020100112	0,000972
23	мин	0,242633579	0,074526886	9,1204E-08	0,0784	0,3844	1	

Уточняем найденные значения корней с помощью инструмента «Поиск решения».

Решением рассматриваемой в примере системы нелинейных уравнений являются пары (x, y): [−0,002; 0,707] и [0,002; –0,707].

Построим повехность согласно табуляции равносильного уравнения.

Имеем поверхность с двумя минимумами:



Пример 3.4. Решить систему нелинейных уравнений графическим методом, протабулировать функцию, уточнить значения корней инструментом «Поиск решения»:

$$\begin{cases} \sin(2x+y)+1{,}2x=0{,}2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Решение. Для определения существования корней построим графики двух уравнений системы, представив их в виде приведенной системы (3.3):

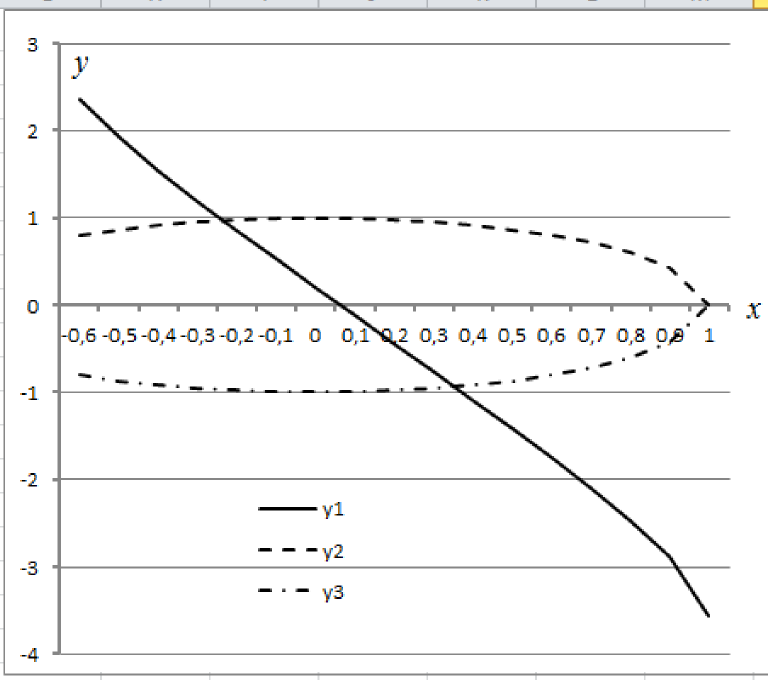
$$\begin{cases} y=\arcsin(0{,}2-1{,}2x)-2x, \\ y=\pm\sqrt{1-x^2}. \end{cases}$$

Границы изменения аргумента для первого уравнения из области определения функции $y=\arcsin(z)$ равны $-1 \le z \le 1$, т. е. $-1 \le 0{,}2 - 1{,}2x \le 1$. Таким образом, диапазон изменения аргумента x для первого уравнения системы равен [–0,667; 1].

Второе уравнение распадается на два и имеет вид $y_{2,3}=\pm\sqrt{1-x^2}$. Границы изменения аргумента x для второго и третьего уравнений: x [–1; 1].

Построим графики уравнений y_1, y_2 и y_3 в диапазоне [–0,6; 1] на рабочем листе Excel. Возьмем шаг табуляции 0,1:

	C	D	E	F
1	x	$y1$	$y2$	$y3$
2	-0,6	2,36808	0,8	-0,8
3	-0,5	1,927295	0,866025	-0,86603
4	-0,4	1,547763	0,916515	-0,91652
5	-0,3	1,194386	0,953939	-0,95394
6	-0,2	0,855599	0,979796	-0,9798
7	-0,1	0,525729	0,994987	-0,99499
8	0	0,201358	1	-1
9	0,1	-0,11991	0,994987	-0,99499
10	0,2	-0,44001	0,979796	-0,9798
11	0,3	-0,76069	0,953939	-0,95394
12	0,4	-1,08379	0,916515	-0,91652
13	0,5	-1,41152	0,866025	-0,86603
14	0,6	-1,74685	0,8	-0,8
15	0,7	-2,0945	0,714143	-0,71414
16	0,8	-2,46331	0,6	-0,6
17	0,9	-2,87586	0,43589	-0,43589
18	1	-3,5708	0	0
19				
20				



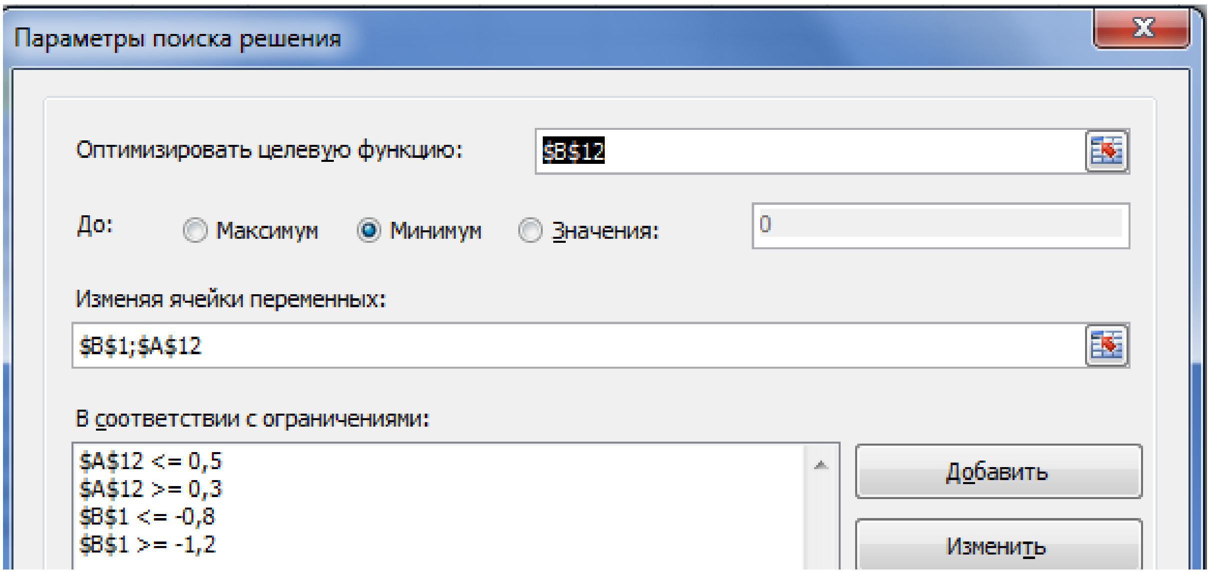
Из графика видно, что система нелинейных уравнений имеет два корня.

Приведем систему к одному равносильному уравнению вида (3.4). Получим $(\sin(2x + y) + 1{,}2x - 0{,}2)^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$.

Отрезки табуляции по переменным x $[-0{,}6;\ 1]$ и y $[-1;\ 1]$:

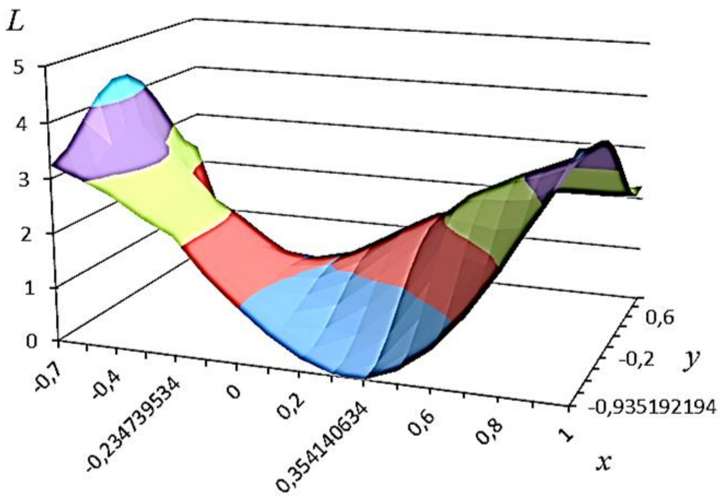
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		-0,9352	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,97206	МИН
2	-0,7	3,23686	3,43384	3,82226	4,17808	4,38076	4,36255	4,10984	3,66243	3,1108	2,59178	2,30616	2,30616
3	-0,5	3,02345	3,15864	3,39057	3,53593	3,50406	3,25693	2,80647	2,21035	1,56682	1,00944	0,72347	0,72347
4	-0,4	2,77848	2,86097	3,00412	3,06107	2,95487	2,6582	2,18913	1,60606	1,00246	0,5024	0,26987	0,26987
5	-0,3	2,43288	2,46131	2,52868	2,52662	2,38854	2,09292	1,6583	1,13808	0,6161	0,20346	0,03982	0,03982
6	-0,2347	2,15973	2,15688	2,188	2,16778	2,03383	1,76539	1,37822	0,91979	0,46568	0,11766	1,6E-17	1,6E-17
7	-0,1	1,51791	1,47151	1,47301	1,47149	1,40577	1,24912	1,0049	0,70362	0,40172	0,18235	0,14462	0,14462
8	0	1,02518	0,97114	0,99428	1,05301	1,08054	1,04	0,9216	0,74148	0,54256	0,39726	0,39497	0,39497
9	0,1	0,57692	0,53806	0,61725	0,76656	0,9089	0,99418	0,99824	0,92378	0,80312	0,70234	0,71024	0,53806
10	0,2	0,2282	0,22449	0,38518	0,6416	0,90336	1,106	1,21199	1,21359	1,13699	1,04726	1,04127	0,22449
11	0,3	0,0298	0,0744	0,3281	0,69114	1,05876	1,35321	1,52665	1,56544	1,49505	1,38496	1,34682	0,0298
12	0,35414	3,2E-15	0,07282	0,37571	0,78983	1,20297	1,53139	1,72354	1,76481	1,68259	1,5508	1,49084	3,2E-15
13	0,5	0,23153	0,3705	0,77528	1,27864	1,75258	2,10375	2,27843	2,26757	2,11091	1,89956	1,78189	0,23153
14	0,6	0,66612	0,82704	1,25485	1,76145	2,2136	2,51802	2,62638	2,5395	2,30998	2,04289	1,90097	0,66612
15	0,7	1,31721	1,46806	1,86492	2,31726	2,69221	2,90219	2,9091	2,727	2,42282	2,11504	1,9735	1,31721
16	0,8	2,16067	2,26098	2,56471	2,903	3,14899	3,2257	3,10863	2,82655	2,46018	2,13895	2,03013	2,03013
17	0,9	3,16144	3,16596	3,31239	3,4808	3,5553	3,47285	3,22409	2,85192	2,44837	2,14992	2,1104	2,1104
18	1	4,27938	4,14238	4,07161	4,02389	3,89767	3,64542	3,27226	2,83278	2,42634	2,19179	2,25875	2,19179
19	МИН	3,2E-15	0,07282	0,3281	0,6416	0,90336	0,99418	0,9216	0,70362	0,40172	0,11766	1,6E-17	

Уточняем найденные значения корней с помощью инструмента «Поиск решения»:



Решением рассматриваемой в примере системы нелинейных уравнений являются пары (x, y): $[-0{,}2347;\ 0{,}97206]$ и $[0{,}35414;\ -0{,}9352]$.

Построим поверхность для равносильного уравнения:



Видно, что исследуемая функция графически представляет собой поверхность с двумя минимумами. Таким образом, система нелинейных уравнений данного примера имеет два корня.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти решение системы алгебраических нелинейных уравнений.

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
1	$\begin{cases} 2x^2+5y^2=3, \\ 5x+9y=3 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x^2+y^2=14, \\ x-y=4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x^2+4y^2=4, \\ 3x+4y=2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x^2+4y^2=17, \\ 5x-2y=9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5x^2+2y^2=4, \\ 2x+7y=1 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x^2+3y^2=6, \\ 2x-7y=6 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 4x^2+5y^2=3, \\ 5x+3y=1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 6x^2+7y^2=4, \\ 4x-3y=3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5x^2+6y^2=3, \\ 7x+3y=1 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 5x^2+4y^2=7, \\ 6x-4y=3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x^2+5y^2=4, \\ 5x+2y=2 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x^2+6y^2=4, \\ 2x-6y=2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 7x^2+6y^2=3, \\ 5x+3y=2 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x^2+6y^2=4, \\ 2x-4y=2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 5x^2+6y^2=3, \\ 3x+2y=2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 6x^2+8y^2=7, \\ 6x-3y=3 \end{cases}$

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
9	$\begin{cases} 3x^2+2y^2=2, \\ 2x+7y=3 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 6x^2+5y^2=5, \\ 2x-6y=5 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x^2+y^2=3, \\ 3x+5y=2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 4x^2+5y^2=6, \\ 2x-3y=4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x^2-3,2y=12,3, \\ 3,5x+1,7y=6,4 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 1,3y-6,5x^2=2,4x-7,8, \\ xy+3,6y=13,2x+5,9 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x+2y=13,5, \\ xy=15,5 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x^2-y=-2,3, \\ 3x+y=1,7 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-3y=-18,4, \\ xy=-12,3 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 3,1x^2+2y=13,4, \\ 2,7x^2-y=-1,5 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x+45,6=-2y, \\ xy=44,9 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x^2+y=4,1, \\ x+y=2,6 \end{cases}$

2. Найти решение системы трансцендентных нелинейных уравнений.

Вариант	Уравнения	Вариант	Уравнения
1	$\begin{cases} \sin(x+1)-y=1,2, \\ 2x+\cos y=2 \end{cases}$	13	$\begin{cases} \sin(2x+y)+x=1, \\ x^2+y=1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(y-1)+x=1,3, \\ y-\sin(x+1)=0,8 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \operatorname{tg}xy=x^2, \\ 0,5x^2+2y^2=1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \sin(y-1)+x=1,3, \\ y-\sin(x+1)=0,8 \end{cases}$	15	$\begin{cases} \sin(x+1)-y=1,2, \\ 2x+\cos y=2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin(y-1)+x=1,3, \\ y-\sin(x+1)=0,8 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \operatorname{tg}xy=x^2, \\ 0,5x^2+2y^2=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin x+2y=2, \\ \cos(y-1)+x=0,7 \end{cases}$	17	$\begin{cases} \sin(x+0,5)-y=1, \\ \cos(y-2)+x=0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \cos x+y=1,5, \\ 2x-\sin(y-0,5)=1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \cos(x+0,5)+y=0,8, \\ \sin y-2x=1,6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \cos(x+0,5)+y=0,8, \\ \sin y-2x=1,6 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \sin(x-1)=1,3-y, \\ x-\sin(y+1)=0,8 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \cos(x+0,5)+y=1, \\ \sin y-2x=2 \end{cases}$	20	$\begin{cases} -\sin(x+1)+y=0,8, \\ \sin(y-1)+x=1,3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \sin(x)-2y=1, \\ \sin(y-1)+x=1,3 \end{cases}$	21	$\begin{cases} \sin y+x=-0,4, \\ 2y-\cos(x+1)=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \sin(x+2)-y=1,5, \\ \cos(y-2)+x=0,5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \cos(x+0,5)-y=2, \\ \sin y-2x=1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \cos(x-2)+y=0, \\ \sin(y+0,5)-x=1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} \cos(x+0,5)+y=1, \\ \sin(y+0,5)-x=1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2y-\sin(x-0,5)=1, \\ \cos(y)+x=1,5 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \cos(x-2)+y=0, \\ \sin(y+0,5)-x=1 \end{cases}$

ГЛАВА 4
ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 4.1. Методы численного дифференцирования

В инженерном деле и научной работе часто приходится сталкиваться с проблемой вычисления производных от функций, заданных в виде таблицы, или алгоритмом вычисления в произвольной точке. Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Вычисление производных в численном виде и аналитическое вычисление не совсем одно и то же, однако эти операции связаны друг с другом.

Вычисление производной в численном виде в ряде случаев связано с проблемами принципиального характера.

Во-первых, если функция представлена в табличном виде (т. е. ее значения заданы только в некоторых точках, называемых узлами), вычисление значения производной между узловыми точками (равно как и значения самой функции) подразумевает, как правило, использование специальных методов **интерполирования** или **аппроксимации**.

Во-вторых, многое зависит от особенностей самой функции. Для корректного вычисления производной по значениям функции в точках количество табулированных значений функции на интервале ее существенного изменения должно быть достаточно большим (чтобы можно было выстроить адекватную картину поведения функции). Без такой детальной информации процесс поиска производных может не привести к желаемому результату. Поэтому при вычислении производной следует учитывать полноту данных о функции (и связанные с этим проблемы), а также выбор метода расчета производных.

Формулы численного дифференцирования широко применяются при разработке вычислительных методов решения многих задач (для решения дифференциальных уравнений, поиска решения нелинейных уравнений, поиска точек экстремума функций и т. д.). Разрабатываются новые методы численного дифференцирования и сглаживания экспериментальных зависимостей. Например, рассмотренный в статье [20] метод основан на многократном осреднении экспериментальных данных и дает гладкие оценки производной, сохраняющие характеристики зависимостей в целом.

Рассмотрим методы, которые могут использоваться для вычисления производной в численном виде по известным значениям в узлах, а также кратко проанализируем ситуации, при которых используются те или иные методы.

Методы правой, левой и центральной конечных разностей

Существует несколько способов вычисления производной функции, которая задана в виде таблицы значений. Для большей конкретности будем в дальнейшем (если не оговорено другое) рассматривать неизвестную функцию $f(x)$, для которой на множестве значений аргумента $\{x_i\}$ заданы значения функции $\{f_i\}$ ($i = 1, \dots, n$). По определению полагаем $f(x_i) = f_i$. Для вычисления производной f_i' в точке x_i можно использовать, например, формулу $f_i' = (f_{i+1} - f_i) / (x_{i+1} - x_i)$. Эта формула называется **правой конечной разностью**. Она может быть проиллюстрирована графически.

Для вычисления производной в точке x функция получает конечное приращение, вызванное увеличением ее аргумента до значения x_{i+1}. Производная вычисляется как отношение приращения функции к приращению аргумента. В этом случае неявно предполагается, что между точками x и x_{1+1}, где заданы ее значения, эта функция линейно зависит от аргумента (т. е. соответствующие точки соединяются прямой) (рис. 4.1). Чем меньше приращение последнего, тем, по идее, выше должна быть точность.

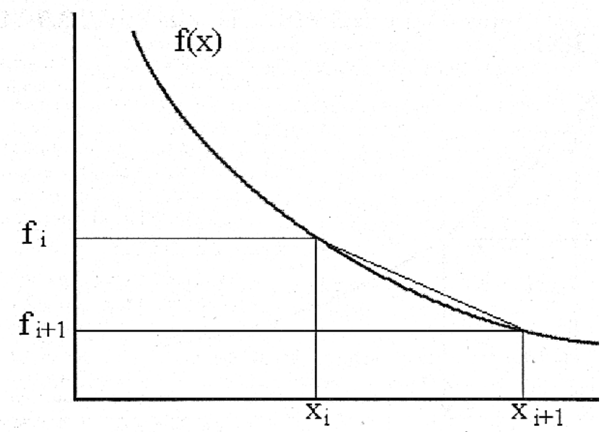


Рис. 4.1

Точность при вычислении производных – это сложная и значимая проблема. Неточности, возникающие в процессе вычисления производных, могут быть обусловлены следующими обстоятельствами: неточностью исходных данных, неточностью используемых алгоритмов или формул, ошибками округления на промежуточных этапах вычислений и т. д. Как правило, когда речь идет о численных методах, имеют в виду погрешность, возникающую из-за использования приближенных формул.

Для вычисления производной можно изменять аргумент не вправо (в сторону увеличения), а влево (в сторону уменьшения). Графически эта ситуация представлена на рис. 4.2.

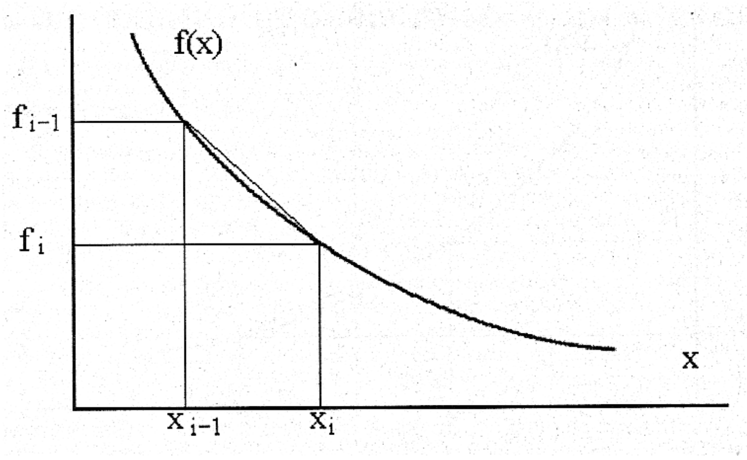


Рис. 4.2

В этом случае применима формула для левых конечных разностей: $f_i' = (f_i - f_{i-1}) / (x_i - x_{i-1})$. Если сравнить формулы для правых и левых разностей, можно заметить, что они определяют фактически один и тот же набор значений для производной (за исключением граничных точек), только эти значения смещены на одну позицию.

Помимо рассмотренных формул, используется также формула вычисления производной по центральным разностям. Она имеет вид

$$f_i' = (f_{i+1} - f_{i-1}) / (x_{i+1} - x_{i-1}).$$

Для вычисления производной в этом случае используются значения функции в соседних точках (справа и слева от той, в которой вычисляется производная) (рис. 4.3).

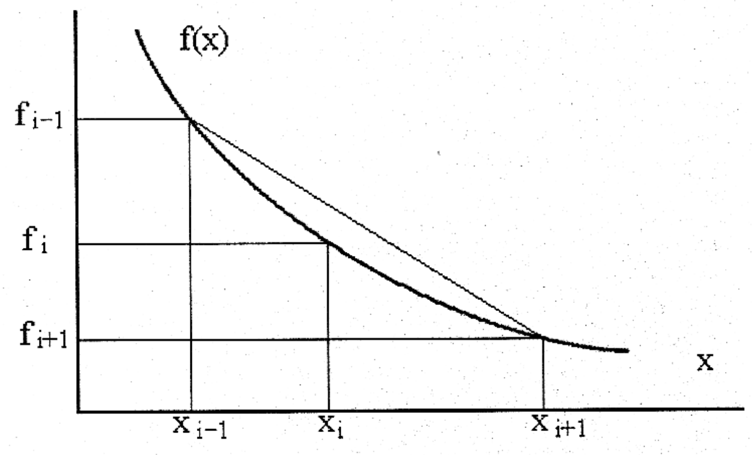


Рис. 4.3

Что касается производных более высоких порядков, то следует учесть, что, например, вторая производная – это производная от первой производной и т. д. Значит, если посчитана первая производная, то, используя приведенные выше формулы, можно посчитать и вторую. По известной второй производной можно посчитать третью и т. д.

Вычисление производных на границе интервала, где задана функция, имеет свои особенности. Например, если вычислять производные согласно формуле для правых разностей, то на правой границе диапазона производную вычислить не удастся. Для формулы левых разностей проблемы возникают соответственно на левой границе. Что касается центральных разностей, то формула не может использоваться на обеих границах диапазона.

Пример 4.1. Найти производную функции $y = \cos^3 \frac{x}{3}$ на интервале [0; π] методами правых, левых и центральных разностей, сравнить полученные результаты с точным значением $y' = -\cos^2 \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$.

Решение. Результаты решения задачи поместим в таблицу, содержащую значения аргумента, функции, результаты вычисления производной тремя методами. В таблице приводятся точные значения для производной в соответствующих точках. При изменении шага численного дифференцирования таблица будет автоматически перестраиваться:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	Функция, $f(i)$	Правые разности, $f(i+1)$	Левые разности, $f(i-1)$	Центральные разности, $f(i+1,i-1)$	Точное значение		h, шаг
2	0,00	1,00	-0,05			0,00		0,31
3	0,31	0,98	-0,15	-0,05	-0,10	-0,10		
4	0,63	0,94	-0,24	-0,15	-0,20	-0,20		
5	0,94	0,86	-0,31	-0,24	-0,28	-0,28		
6	1,26	0,76	-0,36	-0,31	-0,34	-0,34		
7	1,57	0,65	-0,38	-0,36	-0,37	-0,38		
8	1,88	0,53	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38		
9	2,20	0,41	-0,35	-0,38	-0,37	-0,37		
10	2,51	0,30	-0,31	-0,35	-0,33	-0,33		
11	2,83	0,20	-0,25	-0,31	-0,28	-0,28		
12	3,14	0,13		-0,25		-0,22		

Примем шаг численного дифференцирования на интервале [0; π] равным π/ 10 = 3,14. Это значение поместим в ячейку H2.

В диапазон ячеек A2:A12 вводятся значения аргумента для функции и производной начиная с нуля с шагом 0,31. Для заполнения диапазона A2:A12 вводится начальное значение «0» в ячейку A2, в ячейку A3 помещается формула =A2+$H$2 и осуществляется автозаполнение диапазона A2:A12.

Для табуляции функции в ячейку B2 вводится формула =COS(A2/3)^3, после чего она копируется во все ячейки диапазона B2:B12. Точное значение производной заносится в диапазон F2:F12. Поскольку производная $y' = -\cos^2 \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$, то в ячейку F2 нужно ввести формулу =-(COS(A2/3)^2)*SIN(A2/3) и затем путем автозаполнения поместить значения производной в остальные ячейки диапазона B2:B12.

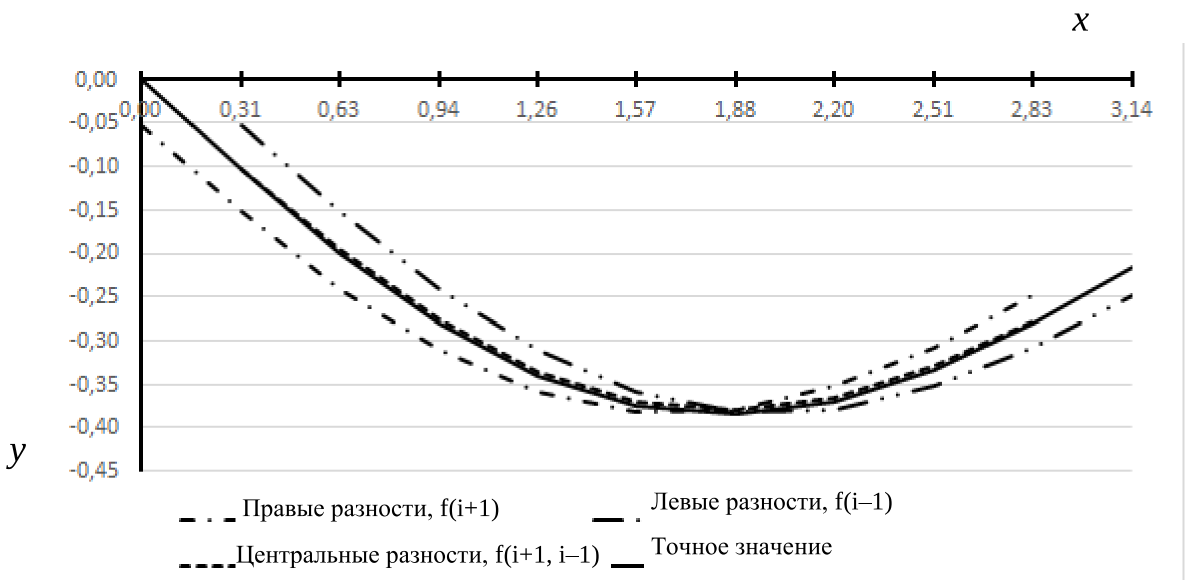
В ячейках диапазона C2:C11 представлены данные для производной, вычисленные на основе формулы для правых разностей. В ячейку C2 вводится формула =(B3-B2)/(A3-A2), после чего ячейка выделяется и осуществляется автозаполнение диапазона C3:C11.

Следует иметь в виду, что на правой границе (ячейка B12), как это уже отмечалось, данная формула неприменима. Тем не менее, если в ячейку все же скопировать формулу, значение будет вычислено. Дело в том, что при копировании в ячейку B12 формула содержит ссылку на пустую ячейку (B13). В этом случае по умолчанию значение этой ячейки интерпретируется как нулевое, что недопустимо. Поэтому упомянутая ячейка с некорректными данными в таблице примера 4.1 пустая.

Для вычисления производной по формуле для левых разностей в ячейку D3 вводится формула =(B3-B2)/(A3-A2), которая затем копируется в ячейки из диапазона D4:D12. В этом случае на правой границе проблем не возникает, но приходится оставить незаполненной ячейку D3, соответствующую левой границе диапазона значений аргумента.

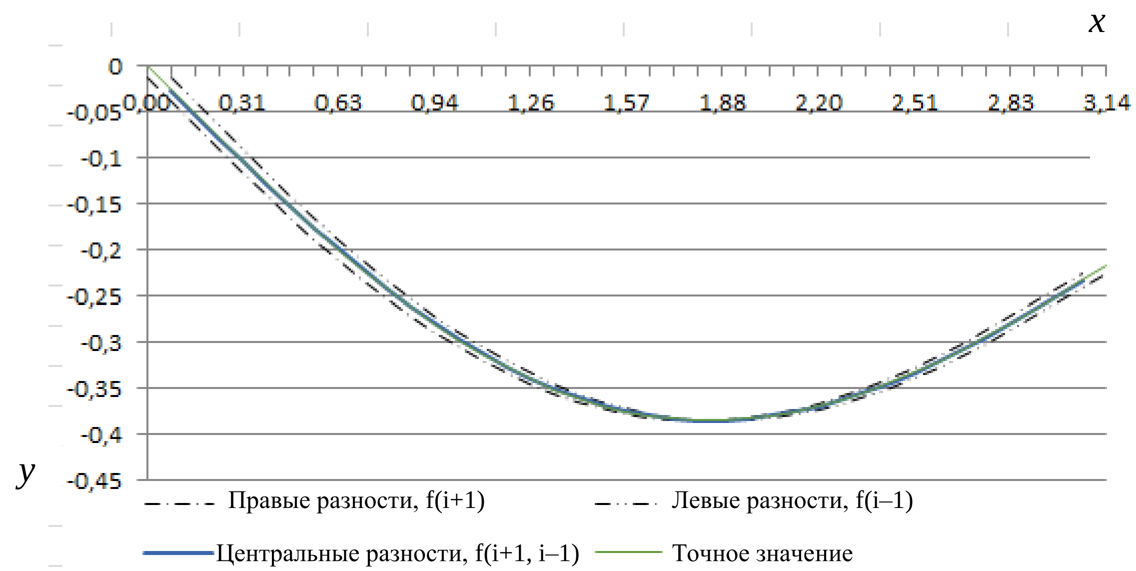
Вводим формулу для определения производной через центральные разности =(B4-B2)/(A4-A2) в ячейку E3. Путем копирования соответствующая формула заполняет ячейки диапазона E4:E11. При этом значения не вычисляются для двух граничных точек диапазона изменения аргумента функции (это ячейки E2; E12).

Построим графики значений производной от функции $y = \cos^3(x/3)$, вычисленные методами правых, левых, центральных разностей, и аналитического (точного) значения производной:



Как видно из анализа данных, наилучшее приближение дает формула центральных разностей (в таблице не совпадают значения тольно по одной точке, а графики центральных разностей и точного значения сливаются).

В рассматриваемом примере выбран достаточно большой шаг для изменения аргумента. Если вместо шага 0,1 выбрать шаг 0,025, т. е. уменьшить шаг в четыре раза, то, как видно из представленного ниже графика, получим значительно более точные результаты:



Все рассмотренные в данном параграфе методы дают близкие по точности результаты.

Еще более точные результаты будут при дальнейшем уменьшении шага на данном интервале, однако в этом случае возрастает количество итераций.

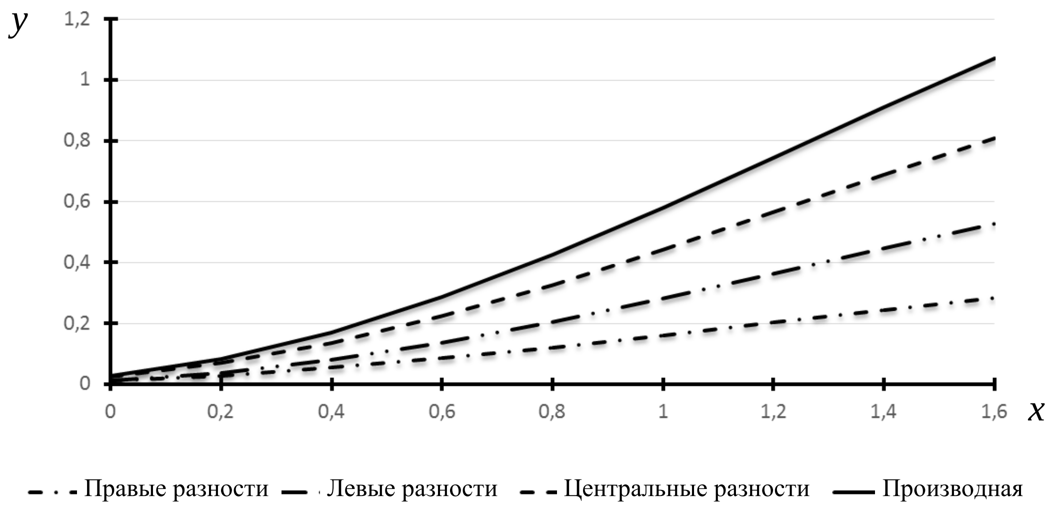
Можно построить исследовательский график зависимости точности (разности между численным и точным значением) вычисления производной от числа итераций.

Пример 4.2. Найти производную функции $y = \sin^3 \dfrac{x}{3}$ на интервале [0; 2] методами правых, левых и центральных разностей, сравнить полученные результаты с точным значением $y' = \sin^2 \dfrac{x}{3} \cos \dfrac{x}{3}$.

Решение. Вид таблицы в данном случае несколько изменен по сравнению с примером 4.1: введен столбец «№» и указано местоположение ячейки, где располагается шаг:

№	h	x [0;2]	$y = sin^3\frac{x}{3}$	Правые разности	Левые разности	Центральные разности	$y' = \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$
1		0	0	0,001478192	-	-	0
2		0,2	0,000295638	0,010268714	0,001478192	0,010268714	0,004428006
3		0,4	0,002349381	0,027459992	0,010268714	0,027459992	0,01751582
4		0,6	0,00784138	0,052288204	0,027459992	0,052288204	0,038682741
5		0,8	0,018299021	0,083646279	0,052288204	0,083646279	0,066986984
6	0,2	1	0,035028276	0,120128544	0,083646279	0,120128544	0,10116366
7		1,2	0,059053985	0,160087463	0,120128544	0,160087463	0,13967581
8		1,4	0,091071478	0,201700173	0,160087463	0,201700173	0,180776453
9		1,6	0,131411512	0,243042174	0,201700173	0,243042174	0,222579173
10		1,8	0,180019947	0,282165241	0,243042174	0,282165241	0,263134427
11		2	0,236452996	-	0,282165241	-	0,300508524

Из представленного ниже графика производной видно, что наилучшее приближение, как и в предыдущем примере, дает метод центральных разностей:



Возвращаясь к проблеме неопределенности производной на границе, можно предложить, например, такой выход: в случае если используемая формула для вычисления производной не работает на одной или обеих границах, целесообразно использовать другую формулу. Скажем, если применяется формула для центральных разностей, то производную на правой границе можно вычислять по формуле для левых разностей, а на левой границе – по формуле для правых разностей.

Предложенный выше метод вычисления производных функции может быть адаптирован и для вычисления производных в более сложных случаях. В качестве примера рассмотрим процедуру вычисления производной для функции, заданной в параметрическом виде.

§ 4.2. Методы вычисления параметрической производной

Функция задана в **параметрическом виде**, если зависимость $y(x)$ задается посредством системы уравнений $\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases}$ $a \le t \le b$.

Производная такой функции также задается в параметрическом виде и может быть найдена как решение системы уравнений $\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, \\ x = x(t). \end{cases}$

Аналогично вычисляются и последующие производные.

Пример 4.3. Найти производную параметрически заданной функции, если $x(t) = \sin(\pi t / 2)$ и $y(t) = \cos(\pi t / 2)$, при условии $0 \le t \le 1$.

Решение. Производная, вычисленная аналитически, равна

$$x'(t) = (\pi / 2)\cos(\pi t / 2) \text{ и } y'(t) = (-\pi / 2)\sin(\pi t / 2),$$

поэтому согласно формуле вычисления параметрической производной получаем $y'_x = y'(t) / x'(t)$, т. е.

$$y(t) = \cos(\pi t / 2) \;\; y'(t) = -\frac{\sin(\pi t / 2)}{\cos(\pi t / 2)}.$$

Можно заметить, что уравнения задают часть окружности единичного радиуса (с центром в начале координат). Окружность размещена в первом квадранте. Действительно, независимо от значения параметра t выполняется соотношение $x^2 + y^2 = 1$.

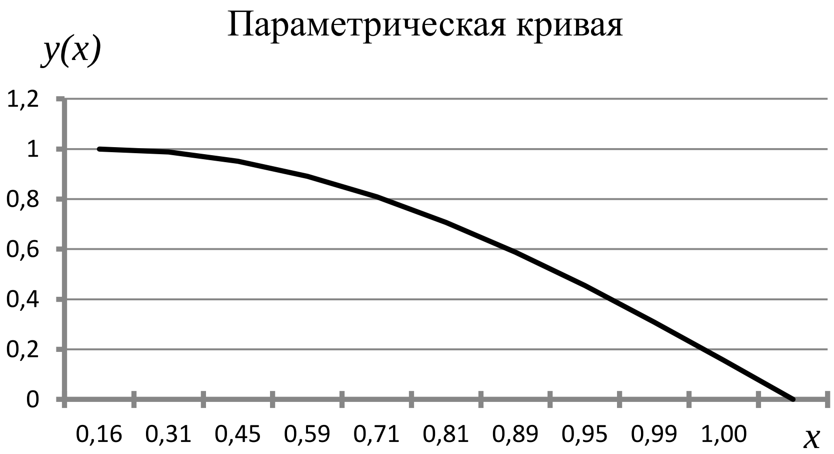
Заполняем таблицу с данными для аргумента и значений функции. В ячейки диапазона C3:M3 вводим (лучше путем автозаполнения) значения параметра начиная с ячейки C3 с шагом 0,1 до значения 1 (ячейка M3). В ячейку C4 вводим формулу =SIN(ПИ()*B3/2), а в ячейку C5 – формулу =COS(ПИ()*B3/2). Диапазон C4:C5 выделяется и автозаполнением ячеек расширяется до диапазона C4:M5:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Параметрическая производная												
2													
3	Параметр	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
4	Аргумент	x	0	0,156434	0,309017	0,45399	0,587785	0,707107	0,809017	0,891007	0,951057	0,987688	1
5	Функция	y	1	0,987688	0,951057	0,891007	0,809017	0,707107	0,587785	0,45399	0,309017	0,156434	6,13E-17

Построим график зависимости $y(x)$ по приведенным данным.

Выделяем диапазон ячеек C4:M5, выбираем команду «Вставка / Диаграмма». Задаем тип создаваемой диаграммы (график). С помощью контексного меню «Выбрать данные» удаляем ряд 1 (зависимость $x(x)$), ряд 2 изменяем (даем имя y(x)), изменяем подписи горизонтальной оси (категории), выделив диапазон ячеек C4:M4.

Затем график дорабатывается с помощью вкладки «Макет». Включаем команду «Оси / Основная горизонтальная (вертикальная) ось / Дополнительные параметры оси». Задаем интервал между делениями, единицу измерения интервала. Если подписи данных идут слишком часто (они в этом случае размещаются вертикально), то увеличиваем единицу измерения интервала. Положение оси задаем «по делениям». Определяем тип и цвет линии оси. Задаем «число – числовой формат / число десятичных знаков» (например, 2). Определяем: «Основные (деления) пересекают ось». На вкладке «Макет / Подписи» задаем название осей. Чтобы назвать график, в поле «Подписи / Название диаграммы» введем текст «Параметрическая кривая». На вкладке «Макет / Сетка» отобразим вертикальные линии сетки:



На приведенной выше диаграмме не видно, что отображаемая кривая представляет собой часть окружности. Причина в том, что по горизонтальной и вертикальной осям выбраны разные масштабы, поэтому окружность растянута вдоль горизонтали.

Вычислим производную заданной в параметрическом виде функции $x(t) = \sin(\pi t / 2)$ и $y(t) = \cos(\pi t / 2)$ по методу центральных разностей.

В ячейку D6 вводим формулу =(E5-C5)/(E4-C4) и распространяем ее на диапазон C6:L6. В ячейку D7 помещаем формулу производной, вычисленной аналитически: =–SIN(ПИ()*D3/2)/COS(ПИ()*D3/2. По вычисленному значению в ячейке D7 автозаполнением получим значения ячеек диапазона E7:L7. Результат вычисления производной, заданной аналитически, приведен ниже:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Параметрическая производная												
2													
3	Параметр t		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
4	Аргумент x		0	0,156434	0,309017	0,45399	0,587785	0,707107	0,809017	0,891007	0,951057	0,987688	1
5	Функция y		1	0,987688	0,951057	0,891007	0,809017	0,707107	0,587785	0,45399	0,309017	0,156434	6,13E-17
6	Производная $y'(x)$			-0,15838	-0,32492	-0,50953	-0,72654	-1	-1,37638	-1,96261	-3,07768	-6,31375	
7	Точное значение			-0,15838	-0,32492	-0,50953	-0,72654	-1	-1,37638	-1,96261	-3,07768	-6,31375	

В рассматриваемом примере удалось избежать процесса вычисления производных непосредственно по параметру. Сначала для изменений параметра были вычислены изменения аргумента функции, а уже по изменениям аргумента определено значение производной.

Значение производной, полученное с помощью метода центральных разностей, в данном примере полностью совпадает со значением производной, вычисленной аналитически (точным значением). Следует отметить, что чем более плавная функция, тем точнее определяется производная (с помощью приведенных разностных формул).

В случае линейной зависимости эти формулы дают точные значения для производных (в пределах погрешности вычислений). Для быстро изменяющихся функций следует выбирать по возможности меньший шаг приращения аргумента. Это обычно не составляет проблемы, если известна аналитическая зависимость функции от аргумента.

Подобные ситуации довольно часто встречаются на практике. Обычно это имеет место, когда, например, известна функция (т. е. аналитическая зависимость), но она слишком громоздка, а вычислять производную аналитически, подставляя затем нужные значения, представляется утомительным и малопродуктивным занятием. В этом случае можно представить функцию в виде таблицы значений и вычислить производные сразу в численном виде. Если правильно подобрать шаг изменения аргумента функции, можно добиться хорошей точности вычислений.

Ситуация принципиально усложняется, когда приходится работать только со значениями функции, не зная наперед, какова эта функция. Однако часто даже в подобных ситуациях можно проводить вычисления, используя нейронные сети, метод случайного леса, бутстреп и другие методы исследования свойств функций.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить производные функций на заданном интервале методами правых, левых и центральных разностей, сравнить с точным (аналитическим) значением.

Шаг табулирования функции внутри интервала выбрать по формуле (максимальное значение − минимальное значение) / 10.

Вариант	Функция	Производная	Интервал
1	$y = x\sqrt{x}$	$y' = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$	[10; 110]
2	$y = 2x^2 + 2x + 2$	$y' = 4x + 2$	[1; 20]
3	$y = 3x^3 \ln x - x^3$	$y' = 9x^2 \ln x$	[0; 10]
4	$y = \dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$	$y' = \left(\dfrac{8}{9}\right)^x \ln\dfrac{8}{9}$	[0; 3]
5	$y = \ln\left(2x^3 + 3x^2\right)$	$y' = \dfrac{6\left(x+1\right)}{2x^2 + 3x}$	[4; 12]
6	$y = \sqrt{1 - 3x^2}$	$y' = -\dfrac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}$	[0; 0,5]
7	$y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$	$y' = -\cos x$	[0; π]
8	$y = \cos^3\dfrac{x}{3}$	$y' = -\cos^2\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$	[0; π]
9	$y = \ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$	$y' = \dfrac{6x}{\sqrt{9x^4 + 1}}$	[1; 8]
10	$y = arctg\sqrt{4x^2 - 1}$	$y' = \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$	[2; 6]
11	$y = \sqrt{\arcsin x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}\arcsin x}$	[1; 4]
12	$y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x} - 1\right)$	$y' = e^{\sqrt{2x}}$	[0; 10]
13	$y = \sin^3\dfrac{x}{3}$	$y' = \sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$	[0; 2]
14	$y = \left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$	$y' = \dfrac{2\sin x}{\left(1 + \cos x\right)^2}$	[1; 5]

15	$y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}$	$y'=\frac{1}{x^2\left(x-1\right)}$	[10; 80]
16	$y=\ln\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$	$y'=\frac{1}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$	[1; 5]
17	$y=\operatorname{arctg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$	$y'=\frac{3}{1+x2}$	[0; 3]
18	$y=2\left(tg\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)$	$y'=\frac{tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	[0; 1]
19	$y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$	$y'=8\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x+1\right)^5}$	[2; 12]
20	$y=x^x$	$y'=x^x\left(1+\ln x\right)$	[1; 2]

2. Вычислить производные функций, заданных параметрически на интервале, методами правых, левых и центральных разностей.

Вариант	Функция	Производная	Интервал для t
1	$\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=t^2-2t^3 \end{cases}$	$y'_x=\frac{t(1-3t)}{1+t}$	[0; 1]
2	$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\operatorname{arctg} t \end{cases}$	$y'_x=\frac{1}{2t}$	[0; π/2]
3	$\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2 \end{cases}$	$y'_x=\frac{2}{3t}$	[1; 10]
4	$\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=\cos^3 t \end{cases}$	$y'_x=-\operatorname{ctg} t$	[–π/2; π/2]
5	$\begin{cases} x=t-4, \\ y=t^2-16 \end{cases}$	$y'_x=2t$	[0; 1]
6	$\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t \end{cases}$	$y'_x=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$	[0; 1]
7	$\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=t \end{cases}$	$y'_x=\frac{1}{2t}$	[1; 10]
8	$\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t^3 \end{cases}$	$y'_x=t^2$	[1; 10]
9	$\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin(t-1) \end{cases}$	$y'_x=\frac{1}{1-t}$	[2; 6]

ГЛАВА 5
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Решение ряда инженерных задач, задач физики, геометрии и многих других областей человеческой деятельности предполагает вычисление определенного интеграла вида $S = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$.

В случаях если интеграл от данной функции не может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница либо функция $f(x)$ задана графически или таблицей, для вычисления определенного интеграла применяют приближенные формулы. Для приближенного вычисления интеграла используются численные методы (трапеций, Симпсона и др.).

Как правило, большинство концепций вычисления интегралов (в численном виде) апеллируют к геометрической интерпретации интеграла. Так, если нужно вычислить интеграл от функции *f(x)* на интервале изменения аргумента функции от a до b (обозначается как $\int_a^b f(x)dx$), то это все равно что найти площадь под графиком функции *f(x)* на данном интервале изменения аргумента. Имеется в виду площадь фигуры, ограниченной сверху кривой *f(x)*, а снизу – координатной осью абсцисс (т. е. осью аргумента функции). Если график функции находится ниже координатной оси абсцисс, площадь считается отрицательной. Эти утверждения и лежат в основе описываемых ниже процедур вычисления интегралов от функций.

§ 5.1. Методы численного интегрирования

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx, \tag{5.1}$$

где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция.

С геометрической точки зрения интеграл (5.1) при $f(x) > 0$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$. Найдя приближенно площадь криволинейной трапеции, мы получим значение интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла показан на рис. 5.1.

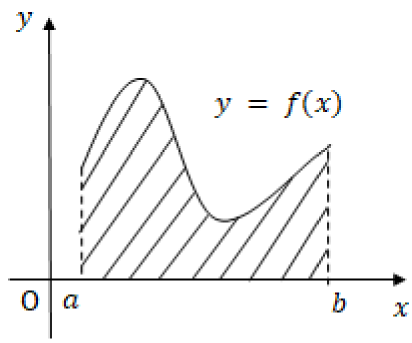


Рис. 5.1

Формально процедура численного интегрирования состоит в том, что отрезок $[a,\ b]$ разбивается на n частичных отрезков, а затем подынтегральная функция заменяется на нем легко интегрируемой функцией, по определенной зависимости интерполирующей значения подынтегральной функции в точках разбиения. Во многих случаях, когда подынтегральная функция задана в аналитическом виде, определенный интеграл может быть вычислен непосредственно с помощью неопределенного интеграла (вернее, первообразной) по формуле Ньютона – Лейбница, согласно которой определенный интеграл равен приращению первообразной $F(x)$ на отрезке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (5.2)$$

Однако на практике этой формулой часто нельзя воспользоваться по следующим основным причинам:

1) вид функции $f(x)$ не допускает непосредственного интегрирования, т. е. первообразную нельзя выразить в элементарных функциях;

2) значения функции $f(x)$ заданы только на фиксированном конечном множестве точек x_i, т. е. функция задана в виде таблицы.

В этих случаях применяются методы численного интегрирования, основанные на аппроксимации подынтегральной функции с помощью интерполяционных многочленов. В дальнейшем будем использовать метод кусочной (локальной) интерполяции. Это позволит приближенно заменить определенный интеграл интегральной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получаются разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол и др.).

Численные методы интегрирования позволяют вычислить значение определенного интеграла непосредственно по значениям подынтегральной функции $f(x)$, независимо от способа ее задания или вида аналитического выражения.

Стандартный подход к решению проблемы вычисления интеграла в общих чертах состоит в следующем. Во-первых, диапазон изменения аргумента функции (или переменной интегрирования) разбивается на достаточно большое (чем больше, тем лучше) число интервалов. Обычно эти интервалы имеют равную длину. Что касается их количества, то оно выбирается из тех соображений, чтобы на каждом из таких интервалов интегрируемая функция была бы достаточно плавной. Если диапазон интегрирования (a, b) разбит на n равных интервалов, это значит, что указан $n + 1$ узел x_i $(i = 0,\ldots, n)$ длины $h = (b - a)/n$ и эти узлы определяются, очевидно, равенством $x_i = a + ih$. Само собой разумеется, что значения интегрируемой функции в этих узлах $f(x_i) = f_i$ предполагаются известными.

Затем интегрируемую функцию можно заменить интерполяционным полиномом на всем диапазоне интегрирования или на конечном числе интервалов из данного диапазона.

5.1.1. Квадратурные формулы прямоугольников

Простейшим методом численного интегрирования является метод прямоугольников. Он непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой. В качестве точек могут выбираться левые или правые границы элементарных отрезков.

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и требуется вычислить ее интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Составим интегральную сумму для $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Для этого разобьем сегмент $[a, b]$ на n равных между собой частей с помощью точек $x_1,\ x_2, \ldots\ ,\ x_k, \ldots\ ,\ x_{n-1}$.

Если длину каждой части обозначим через Δx, так что $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, то положим $y_k = f(a + k\Delta x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда суммы $\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x$ и $\sum_{k=1}^{n} y_k\Delta x$ будут интегральными для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. При составлении первой суммы рассматриваем значения функции $y = f(x)$ в точках, являющихся левыми концами частичных сегментов, а при составлении второй суммы – в точках, являющихся правыми концами этих сегментов.

По определению интеграла имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_k\Delta x.$$

Таким образом, в качестве приближенного значения $\int_a^b f(x)dx$ естественно взять интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x$ и $\sum_{k=1}^{n} y_k\Delta x$, т. е. положить

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\Delta x,$$

а также

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_k\Delta x,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \qquad (5.3)$$

и

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n). \qquad (5.4)$$

Приближенные равенства (5.3), (5.4) называются *формулами прямоугольников*.

В том случае, когда $f(x) \geq 0$, формулы (5.3) и (5.4) с геометрической точки зрения означают, что площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной дугой кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, принимается приближенно равной площади ступенчатой фигуры, образованной из n прямоугольников с основаниями $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ и высотами $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ – в случае формулы (5.3) и $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ – в случае формулы (5.4).

На основе приведенного выше геометрического смысла формул (5.3) и (5.4) способ приближенного вычисления определенного интеграла по этим формулам принято называть методом прямоугольников.

Всякое приближенное вычисление имеет определенную ценность лишь тогда, когда оно сопровождается оценкой допущенной при этом погрешности. Поэтому формулы прямоугольников будут практически пригодны для приближенного вычисления интегралов лишь в том случае, если будет существовать удобный способ оценки получающейся при этом погрешности (при заданном n), позволяющий к тому же находить и число частей n разбиения сегмента, гарантирующее требуемую степень точности приближенного вычисления.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на сегменте $[a, b]$, так что существует такое число $M > 0$, что для всех значений x из $[a, b]$ выполняется неравенство $|f'(x)| \leq M$. Качественный смысл этого неравенства заключается в том, что скорость изменения значения функции ограничена. В реальных природных системах это требование практически всегда выполняется. В этих условиях абсолютная величина погрешности R_n, которую мы допускаем, вычисляя интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по формуле прямоугольников, может быть оценена по формуле

$$|R_n| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

При неограниченном возрастании n выражение $M(b-a)^2/2n$, а следовательно, и абсолютная величина погрешности R_n будут стремиться к нулю, т. е. точность приближения будет тем больше, чем на большее число равных частей будет разделен сегмент $[a,\ b]$. Абсолютная погрешность результата будет заведомо меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, если взять $n > M(b-a)^2/2\varepsilon$.

Следовательно, для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с указанной степенью точности достаточно разбить сегмент $[a,\ b]$ на число частей, большее числа $M(b-a)^2/2\varepsilon$.

5.1.2. Методы левых, правых и средних прямоугольников

Разобьем интервал интегрирования на n равных частей длиной

$$h = \frac{b-a}{n}. \tag{5.5}$$

Получаем следующие формулы метода прямоугольников.

1. Для «левых» прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = hy_0 + hy_1 + \cdots + hy_{n-1}, \tag{5.6}$$

т. е. формула численного интегрирования имеет вид

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i. \tag{5.7}$$

Геометрическая интерпретация метода «левых» прямоугольников показана на рис. 5.2.

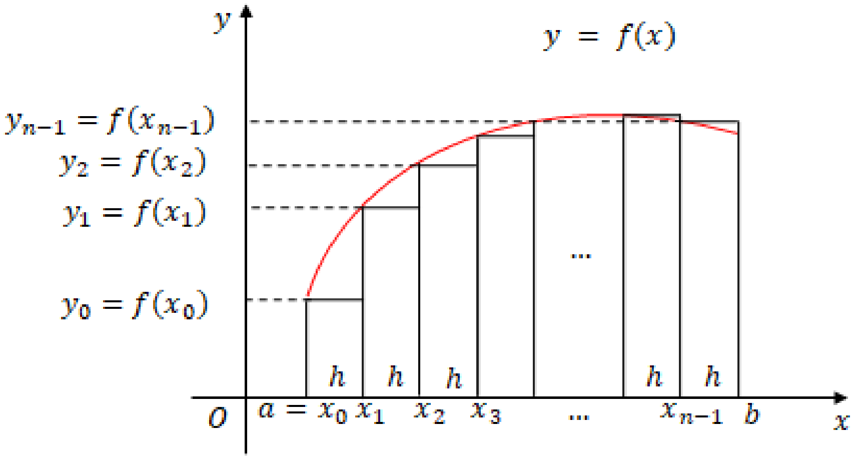


Рис. 5.2

2. Для «правых» прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = hy_1 + hy_2 + \cdots + hy_n, \tag{5.8}$$

т. е. формула численного интегрирования имеет вид

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{5.9}$$

Геометрическая интерпретация метода «правых» прямоугольников показана на рис. 5.3.

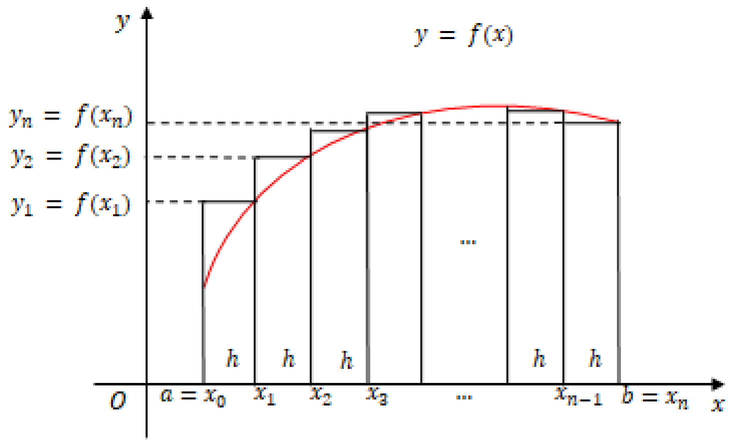


Рис. 5.3

Широко распространенным и более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках элементарных отрезков (в полуцелых узлах).

Геометрическая интерпретация метода «средних» прямоугольников показана на рис. 5.4.

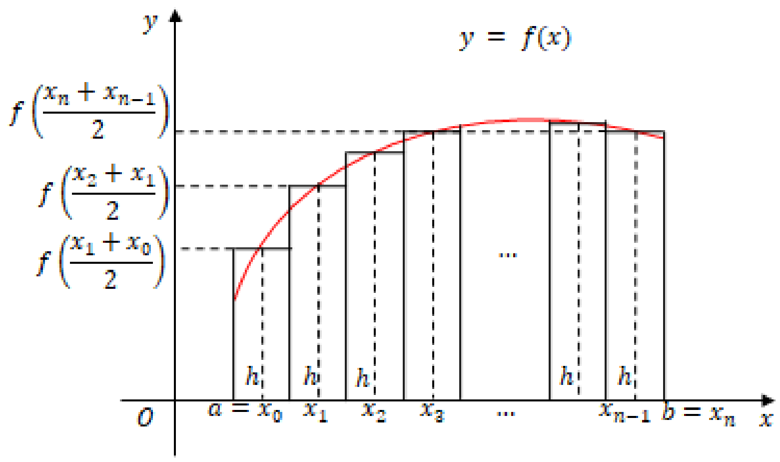


Рис. 5.4

Тогда формула численного интегрирования имеет вид

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right). \tag{5.10}$$

Метод прямоугольников – самый простой и вместе с тем наиболее грубый метод приближенного интегрирования. Очевидно, что чем больше будет число n отрезков разбиения, тем более точный результат дадут формулы (5.6)–(5.8). Однако увеличение числа отрезков разбиения промежутка интегрирования возможно не всегда. Поэтому большой интерес представляют формулы, дающие более точные результаты при том же числе точек разбиения. Заметно меньшую погрешность дает другой метод – метод трапеций.

§ 5.2. Методы трапеций и Симпсона

5.2.1. Метод трапеций

В этом методе отрезок $[a; b]$ также разбивается на n равных частей, после чего криволинейная трапеция аппроксимируется линейной функцией на каждом элементарном отрезке. Высоты всех трапеций найдены по формуле (5.5).

Геометрическая интерпретация метода трапеций показана на рис. 5.5.

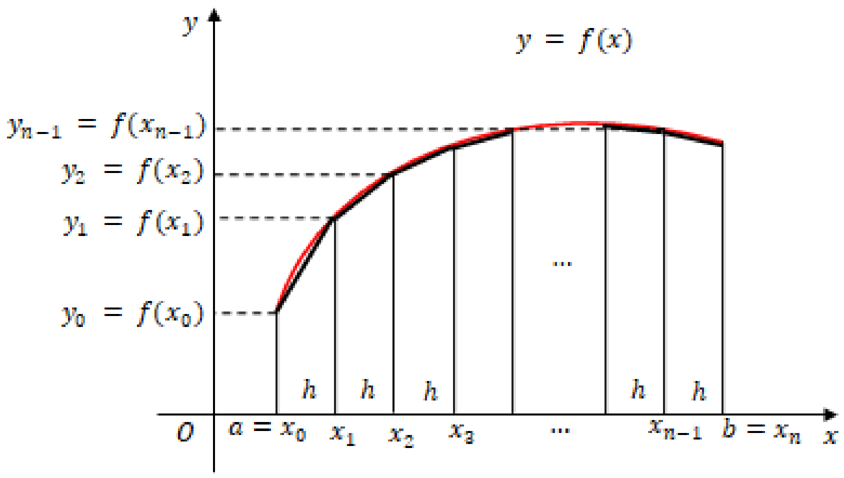


Рис. 5.5

В итоге искомая площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой площадей элементарных геометрических трапеций. Площадь трапеции с высотой h и основаниями a, b вычисляется по формуле

$$S = h\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{5.11}$$

Тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \approx$$

$$\approx h \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right). \quad (5.12)$$

В общем случае формула для решения интеграла методом трапеций имеет вид

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right). \quad (5.13)$$

Остаточный член пропорционален длине интервала $[a, b]$ и квадрату шага h:

$$R = -\frac{(b-a)h^2}{12} \cdot f^n(\varepsilon),\ \varepsilon \in [a,\ b],$$

где f^n – производная порядка n.

Метод трапеций можно реализовать в виде процедуры или даже функции, поскольку результатом вычисления определенного интеграла является скалярная величина. Параметры программного модуля – границы интервала (a и b) и число шагов разбиения на малые интервалы n. Для составления универсальной функции целесообразно предусмотреть вычисление подынтегральной функции *f(x)* во внешней процедуре – функции.

Если подынтегральная функция на интервале $[a, b]$ задана таблично в равноотстоящих узлах, то формула трапеций не изменяется: в формулу подставляются табличные значения *f(x)*. При других вариантах табличного значения функции *f(x)* (неравноотстоящие узлы, точки a и b не совпадают с узлами таблицы) можно воспользоваться подходящим алгоритмом интерполирования табличной функции для приближенной оценки подынтегральной функции *f(x)* при произвольном значении аргумента x.

5.2.2. Метод Симпсона

Формула трапеций дает результат, сильно зависящий от величины шага h, что сказывается на точности вычисления определенного интеграла (особенно в тех случаях, когда функция имеет немонотонный характер). Можно предположить повышение точности вычислений, если вместо отрезков прямых, заменяющих криволинейные фрагменты графика функции *f(x)*, использовать, например, фрагменты парабол, проводимых через три соседние точки графика. Подобная геометрическая интерпретация лежит в основе метода Симпсона для вычисления определенного интеграла.

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на четное число n равных частей с шагом h. На каждом отрезке $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, …, $[x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}. \tag{5.14}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена в точках x_i соответствующим табличным данным y_i. В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i-1} + \\ + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} y_{i+1}. \tag{5.15}$$

Элементарная площадь s_i (рис. 5.6) может быть вычислена с помощью определенного интеграла.

Остаточный член формулы Симпсона пропорционален уже четвертой степени шага:

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\varepsilon), \ \varepsilon \in [a,b].$$

Геометрическая интерпретация метода Симпсона показана на рис. 5.6.

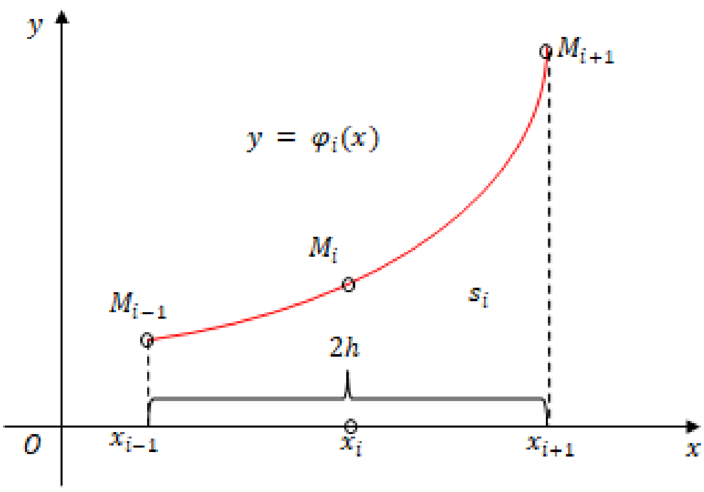


Рис. 5.6

С учетом равенств $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$ получим

$$s_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} (x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1} - 2\,(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot \\ \cdot y_i + (x-x_{i-1})(x-x_i)y_{i+1} \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}). \qquad (5.16)$$

После проведения таких вычислений для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ суммируем полученные выражения:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n 2y_{n-2} +$$
$$+2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \qquad (5.17)$$

Данное выражение для S принимается в качестве значения определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) +$$

$$+2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n]. \qquad (5.18)$$

Полученное соотношение называется **формулой Симпсона**. Для запоминания удобен следующий вид формулы:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(Y_{\text{кр}} + 4Y_{\text{неч}} + 2Y_{\text{чет}}\right), \qquad (5.19)$$

где $Y_{\text{кр}} = y_0 + y_n$; $Y_{\text{неч}} = y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}$;
$Y_{\text{чет}} = y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}$.

§ 5.3. Правило Рунге

Для определения n удобно применять правило Рунге: пусть ε – заданная точность вычисления интеграла, тогда шаг h должен удовлетворять условию

$$h \le \sqrt[4]{\varepsilon}. \qquad (5.20)$$

По этому значению h из выражения (5.5) определяется n. При этом для метода Симпсона в качестве n берется ближайшее четное целое число, превосходящее $\frac{b-a}{h}$, а для методов прямоугольников и трапеций – ближайшее целое, превосходящее $\frac{b-a}{h}$.

Оценку погрешности можно провести следующим методом Рунге. Пусть I_h – приближенное значение интеграла, вычисленное с шагом h, а I_{2h} – значение этого интеграла, вычисленное с шагом $2h$. Заметим, что чем меньше шаг h (а следовательно, больше n), тем точнее получается приближенное значение интеграла.

Если

$$\frac{|I_h - I_{2h}|}{15} < \varepsilon, \tag{5.21}$$

где I_h и I_{2h} вычислены по методу Симпсона, или

$$\frac{|I_h - I_{2h}|}{3} < \varepsilon, \tag{5.22}$$

где I_h и I_{2h} вычислены по методу прямоугольников или трапеций, то в качестве приближенного значения интеграла принимается значение I_h.

Для того чтобы оценить точность найденного значения интеграла по правилу Рунге, необходимо, чтобы первоначальное значение n было кратно четырем.

Пример 5.1. Определить точность вычислений по методу Рунге для численного интегрирования по методу Симпсона $\int_0^{\pi/4} \sin(4x)\,dx$ с $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Определим величину шага h по формуле (5.20):

$$h \le \sqrt[4]{\varepsilon} = \sqrt[4]{0{,}0001} = 0{,}1.$$

Выберем

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{0{,}785 - 0}{0{,}1} = 7{,}85,$$

где $\pi / 4 = 0{,}785$.

Так как в методе Симпсона значение n обязательно должно быть четным и его следует округлять в сторону увеличения, то принимаем $n = 8$ и определяем шаг $h = \dfrac{0{,}785 - 0}{8} = 0{,}09818$.

По методу Симпсона получаем $\int_0^{\pi/4} \sin(4x)\,dx = 0{,}48998$.

Проведем контроль точности вычислений по методу Рунге. Обозначим найденное значение интеграла с шагом $h = 0{,}09818$ через I_h. Увеличим шаг интегрирования в два раза и с этим новым шагом $2h = 0{,}19635$ вычислим искомый интеграл (при этом $n = 4$):

$$I_{2h} .= \int_0^{\pi/4} \sin(4x)\,dx = 0{,}48878.$$

По формуле (5.21) получим

$$\frac{|I_h - I_{2h}|}{15} = \frac{|0{,}48998 - 0{,}48878|}{15} = \frac{0{,}0012}{15} = 0{,}00008 < \varepsilon\ .$$

Условие выполняется, следовательно, приближенное значение интеграла с точностью 0,0001 равно $I_h = 0{,}48998$.

Если неравенство для соответствующего метода не выполняется, то найденное значение интеграла не удовлетворяет заданной точности. Тогда проводят новые вычисления с шагом $\frac{h}{2}$ и вновь проверяют выполнение неравенства (5.21) или (5.22). Этот прием многократного уменьшения шага применяют до тех пор, пока соответствующее неравенство не станет истинным.

Вычисление определенных интегралов с помощью квадратурных формул дает лишь приближенное значение.

Чтобы максимально приблизиться к достоверному значению интеграла, нужно уметь правильно выбирать метод и расчетную формулу.

Большое значение имеет и то, какой будет взят шаг интегрирования. Хотя численные методы и не дают очень точного значения интеграла, но они очень важны, так как не всегда можно решить задачу интегрирования аналитическим способом.

Описанные формулы численного интегрирования легко обобщить на случай для применения многочленов более высоких степеней и тем самым повысить точность решения задачи (подобный метод широко применяют, при этом, в частности, получаются так называемые квадратурные формулы Ньютона – Котеса). Однако более перспективен другой способ, основанный на кусочной аппроксимации подынтегральной функции многочленами невысокой (первой или второй) степени.

Идея метода состоит в том, чтобы разбить отрезок $[a, b]$ на n частей и на каждой части применить формулу трапеций или Симпсона. Из формул для методов видно, что при $h < 1$ погрешность этих вычислений уменьшается.

§ 5.4. Методы вычисления определенных интегралов в MS Excel

В MS Excel могут быть несложно реализованы численные методы правых, левых, центральных прямоугольников, трапеций, Симпсона. Покажем на конкретных примерах, как производятся вычисления.

Для вычисления определенных интегралов необходимо задать подынтегральную функцию $f(x)$, а также верхний и нижний пределы интегрирования a и b.

Пример 5.2. Вычислить интеграл $\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx$ методами правых, левых прямоугольников и трапеций. Построить график изменения приближений f_i для каждого из методов в зависимости от значения аргумента x.

Решение. Данный интеграл не выражается в элементарных функциях. Для его вычисления воспользуемся разложением в ряд функции

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \ .$$

Возьмем три первых члена ряда:

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx \approx \int_0^{0,25} (1 - x^2 + \frac{x^4}{4!})dx = \int_0^{0,25} dx + \int_0^{0,25} (-x^2)dx + \int_0^{0,25} \frac{x^4}{4!}dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} \right)\Bigg|_0^{0,25} = 0,25 - \frac{0,25^3}{3} + \frac{0,25^5}{120} =$$

$$= 0,25 - 0,005208333 + 0,000008138 \approx 0,2448.$$

Именно это значение нужно получить в результате интегрирования с использованием численных методов.

В таблице сделаем пять столбцов, в которых будут отображаться значение переменной интегрирования (аргумента функции x) в узловых точках (столбец «Переменная x»), значения функции в узловых точках (столбец «Функция y»), площадь базового прямоугольника в правостороннем приближении (столбец «Правое приближение»), площадь прямоугольника в левостороннем приближении (столбец «Левое приближение») и, наконец, площадь базовой трапеции в методе трапеций (столбец «Трапеции»).

В ячейку A4 вводим число 0 как начальное значение для переменной интегрирования. В ячейку B4 нужно ввести формулу =EXP(–A4^2) для определения значения подынтегральной функции в данном узле. Кроме того, вводятся формулы для вычисления площадей элементарных (базовых) прямоугольников или трапеций. Так, в ячейку C4 вводим формулу =(A5-A4)*B5, в ячейку D4 – практически такую же формулу: =(A5-A4)*B4; для метода трапеций в ячейку E4 вводится формула =(A5-A4)*(B5+B4)/2.

После этого в ячейку A5 вводится формула =A4+(0,25-0)/10, согласно которой значение последующего узла получается прибавлением к предыдущему узлу десятой части от длины диапазона интегрирования (команда (0,25-0)/10). В ячейку B5 копируется формула из ячейки B4.

Затем в каждую из ячеек диапазона A6:A14 копируем формулу из ячейки A5 (удобно сделать автозаполнение ячеек). Для диапазона ячеек B4:B14 базовой формулой является та, что ранее была введена в ячейку B4. Заполнять данные для элементарных площадей следует вплоть до предпоследней строки (т. е. диапазон C14:E14 заполнять не следует – для этих ячеек введенные ранее формулы определения элементарных площадей не работают). Так, достаточно выделить ячейки C4:E4 и маркером расширить диапазон до размеров C4:E13.

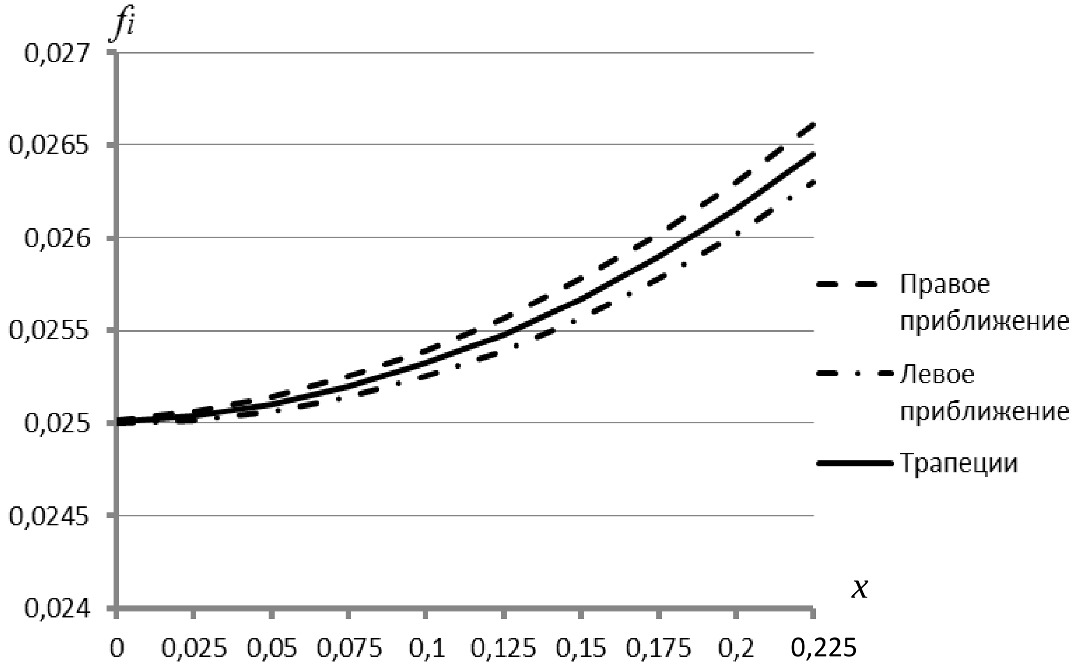
Осталось вычислить сумму значений в столбцах «C», «D» и «E». Для этого выделяем ячейку C15 и вводим туда формулу =СУММ(C4:C13).

Чтобы не вводить формулу, можно щелкнуть на кнопке автоматического суммирования на панели инструментов (кнопка с изображением знака суммы). В ячейку C15 будет автоматически вставлена формула =СУММ(C4:C14). Поскольку ячейка C14 пустая, то можно оставить эту формулу без изменений – значение ячейки будет рассматриваться как равное нулю.

Кроме того, в ячейку D15 вводится формула =СУММ(D4:D13), а в ячейку E15 – формула =СУММ(E4:E13). Окончательный результат показан ниже. Как видно, рассчитанные суммы для всех трех методов одинаковы:

	A	B	C	D	E
2	**Вычисление интеграла** $\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx$				
3	**Переменная** x	**Функция** y	**Правое приближение**	**Левое приближение**	**Трапеции**
4	0	1	0,02501563	0,025	0,025007815
5	0,025	1,000625195	0,025062578	0,02501563	0,025039104
6	0,05	1,002503128	0,025141021	0,025062578	0,0251018
7	0,075	1,00564085	0,025251254	0,025141021	0,025196138
8	0,1	1,010050167	0,025393693	0,025251254	0,025322473
9	0,125	1,015747709	0,025568876	0,025393693	0,025481284
10	0,15	1,022755034	0,025777469	0,025568876	0,025673173
11	0,175	1,031098769	0,026020269	0,025777469	0,025898869
12	0,2	1,040810774	0,026298209	0,026020269	0,026159239
13	0,225	1,051928346	0,026612361	0,026298209	0,026455285
14	0,25	1,064494459			
15			0,256141361	0,254528999	0,25533518

Построим график изменения приближений f_i для каждого из методов в зависимости от значения аргумента:



Анализ показывает, что приближения, полученные тремя рассмотренными методами, близки друг к другу. С увеличением интервала интегрирования значения, полученные методами правых, левых прямоугольников и трапеций, расходятся, причем приближения, полученные методом трапеций, находятся между приближениями, полученными с помощью методов правых, левых прямоугольников.

Пример 5.3. Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ методами правых, левых, центральных прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Решение. Этот интеграл может быть вычислен аналитически:

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 2\frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{(x^2+1)^2}d(x^2+1) = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{5}.$$

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = 0{,}4\,.$$

Разобьем отрезок [2; 0] на 10 частей, вычислим значение интеграла по формулам левых, правых, средних прямоугольников, по формуле трапеций и формуле Симпсона. Получим результаты вычислений:

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	$f(x)$	Левых прямоугольников	Средних прямоугольников	Правых прямоугольников	Трапеций	Симпсона
2	0	0	0,036982249	0,098029605	0	0,018491124	0,034563671
3	0,2	0,184911	0,059453032	0,252503998	0,036982249	0,04821764	0,056612212
4	0,4	0,297265	0,064878893	0,32	0,059453032	0,062165962	0,063076167
5	0,6	0,324394	0,0594884	0,315301113	0,064878893	0,062183646	0,058805415
6	0,8	0,297442	0,05	0,274716889	0,0594884	0,0547442	0,049966691
7	1	0,25	0,040311744	0,225220614	0,05	0,045155872	0,040534102
8	1,2	0,201559	0,031957633	0,179654786	0,040311744	0,036134689	0,032231936
9	1,4	0,159788	0,025249337	0,142011834	0,031957633	0,028603485	0,02549665
10	1,6	0,126247	0,02002492	0,112343958	0,025249337	0,022637129	0,017558169
11	1,8	0,100125	0		0,02002492	0,01001246	0,003337487
12	2						
13	Интеграл:		0,388346208	0,383956559	0,388346208	0,388346208	0,3821825

Формулы в ячейках:
B2: =A2/(A2^2+1)^2; C2: =(A3-A2)*B3;
D2: =((A2+A3)/2)/(((A2+A3)/2)^2+1)^2; E2: =(A3-A2)*B2;
F2: =(A3-A2)*(B3+B2)/2; G2: =(B2+4*B3+B4)*(A3-A2)/6.

В ячейках C11–G11 значения интегралов вычисляются путем суммирования соответствующих диапазонов ячеек.

Как показывают результаты расчетов для заданной функции, значения интеграла, полученные численными методами, существенно отличаются от точного (аналитического) значения.

§ 5.5. Исследование численных методов вычисления определенных интегралов в MS Excel

5.5.1. Исследование метода прямоугольников в MS Excel

Оформим таблицу для вычисления интеграла методами правых, средних и левых прямоугольников так, как показано ниже. В ячейке C7 будет отражаться количество точек деления отрезка *n*, а в ячейку E7 введем формулу =($C$3-$C$4)/C7, которая будет определять шаг интегрирования:

	A	B	C	D	E
7		n=	64	h=	=($C$3-$C$4)/C7
8	N	Переменная X	Правые прямоугольники	Средние прямоугольники	Левые прямоугольники
9	0	0			=COS(B9/2)
10	1	=B9+$E$7	=COS(B10/2)	=COS(((B10+B9)/2)/2)	=COS(B10/2)

В ячейку B9 вводим «0» как начальное значение интегрирования. После этого в ячейку B10 вводим формулу =B9+$E$7, которая прибавляет шаг интегрирования к предыдущему значению, после чего протягивается до ячейки B73. В ячейки C10 и E9 вводится формула заданной функции =COS(B10/2) и =COS(B9/2) соответственно. В ячейку D10 вносим формулу =COS(((B10+B9)/2)/2), которая высчитывает середину отрезка шага и находит значение функции в этой точке.

Заполнять данные для правых и средних прямоугольников следует вплоть до последней строки диапазона, кроме метода левых прямоугольников (т. е. ячейку E73 заполнять не следует – формулы для нее не работают).

Теперь вычислим сумму значений в столбцах «C», «D» и «E». Для этого выделяем ячейку C74 и вводим туда формулу =СУММ(C10:C73). В ячейку D74 вводим формулу =СУММ(D10:D73), а в ячейку E74 – формулу =СУММ(E9:E72). Осталось высчитать интеграл, для чего вводим в столбцы «C», «D» и «E» формулы =E7*C74, =D74*E7 и =E74*E7 соответственно:

	A	B	C	D	E
72	63	=B71+$E$7	=COS(B72/2)	=COS(((B72+B71)/2)/2)	=COS(B72/2)
73	64	=B72+$E$7	=COS(B73/2)	=COS(((B73+B72)/2)/2)	
74		Сумма	=СУММ(C10:C73)	=СУММ(D10:D73)	=СУММ(E9:E72)
75		**Интеграл**	=E7*C74	=D74*E7	=E74*E7

Окончательный результат:

	A	B	C	D	E
72	63	6,18501	-0,99880	-0,99729	-0,99880
73	64	6,28319	-1	-0,99970	
74		Сумма	-1,00000	0,00000	1
75		**Интеграл**	-0,09817	-1,4496E-15	0,09817

Проведем оценку погрешности по правилу Рунге. Для этого вычислим интеграл, увеличив шаг интегрирования в два раза. Заметим, что при этом количество точек деления станет равным 32:

40	31	6,08684	-0,99518	-0,98918	-0,99518
41	32	6,28319	-1,00000	-0,99880	
42		Сумма	-1,00000	-1,15463E-14	1,00000
43		Интеграл	-0,19635	-2,26711E-15	0,19635

Теперь, когда найден интеграл с шагом $2h$, произведем оценку погрешности. Для этого в свободном месте документа создадим три таблицы для вычисления методами правых, средних и левых прямоугольников соответственно. Оформление представлено ниже:

	A	B	C	D	E
82		Оценка погрешности по прави/			
83		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
84		=C7	=C75	=ABS(C75-I43)/3	=D84<$D$5
94					
95					
96		Оценка погрешности по прави/			
97		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
98		=A73	=D75	=ABS(C98-J43)/3	=D98<$D$5
108					
109					
110		Оценка погрешности по прави/			
111		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
112		=A73	=E75	=ABS(C112-K43)/3	=D112<$D$5
122					
123					

Окончательный результат:

	A	B	C	D	E
82		Оценка погрешности по правилу Рунге для метода правых прямоугольников			
83		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
84		64	-0,09817	0,03272	ЛОЖЬ
85					
86					
87		Оценка погрешности по правилу Рунге для метода средних прямоугольников			
88		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
89		64	-1,44965E-15	2,7249E-16	ИСТИНА
90					
91					
92		Оценка погрешности по правилу Рунге для метода левых прямоугольников			
93		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
94		64	0,09817	0,03272	ЛОЖЬ

Из приведенных данных видно, что для метода средних прямоугольников условие (5.21) выполняется, следовательно, интеграл, найденный по методу средних прямоугольников, равен –1,44965E-15. Для методов правых и левых прямоугольников условие (5.21) не выполняется, поэтому вычисление интеграла производится дальнейшим уменьшением шага интегрирования в два раза до тех пор, пока условие не будет выполнено:

	A	B	C	D	E
82		Оценка погрешности по правилу Рунге для метода правых прямоугольников			
83		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
84		64	-0,09817	0,03272	ЛОЖЬ
85		128	-0,04909	0,01636	ЛОЖЬ
86		256	-0,02454	0,00818	ЛОЖЬ
87		512	-0,01227	0,00409	ЛОЖЬ
88		1024	-0,00614	0,00205	ЛОЖЬ
89		2048	-0,00307	0,00102	ЛОЖЬ
90		4096	-0,00153	0,00051	ЛОЖЬ
91		8192	-0,00077	0,00026	ЛОЖЬ
92		16384	-0,00038	0,00013	ЛОЖЬ
93		32768	-0,00019	0,00006	ИСТИНА
94					
109					
110		Оценка погрешности по правилу Рунге для метода левых прямоугольников			
111		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
112		64	0,09817	0,03272	ЛОЖЬ
113		128	0,04909	0,01636	ЛОЖЬ
114		256	0,02454	0,00818	ЛОЖЬ
115		512	0,01227	0,00409	ЛОЖЬ
116		1024	0,00614	0,00205	ЛОЖЬ
117		2048	0,00307	0,00102	ЛОЖЬ
118		4096	0,00153	0,00051	ЛОЖЬ
119		8192	0,00077	0,00026	ЛОЖЬ
120		16384	0,00038	0,00013	ЛОЖЬ
121		32768	0,00019	0,00006	ИСТИНА
122					

Видно, что для нахождения интеграла методами правых и левых прямоугольников потребовалось разделить шаг интегрирования на 32768 частей, что крайне неудобно по сравнению с методом средних прямоугольников.

5.5.2. Исследование метода трапеций в MS Excel

Оформим таблицу для вычисления интеграла методом трапеций так, как показано ниже. В ячейке B7 будет отражаться количество точек деления отрезка *n*, а в ячейку D7 введем формулу =($C$3-$C$4)/B7, которая будет определять шаг интегрирования:

	A	B	C	D
7	n=	64	h=	=($C$3-$C$4)/B7
8	N	X	Y_0, Y_n	Y_i
9	0	0	=COS(B9/2)	
10	=A9+1	=B9+$D$7		=COS(B10/2)

В ячейку B9 вводим 0 как начальное значение интегрирования. Затем в ячейку B10 вводим формулу =B9+$D$7, которая прибавляет шаг интегрирования к предыдущему значению, после чего протягивается до ячейки B73. В ячейки C9 и D9 вводим формулы заданных функций =COS(B9/2) и =COS(D10/2) соответственно. Заполнять данные для столбца «D» следует вплоть до предпоследней строки диапазона. Для столбца «C» заполняем только ячейку C73.

Вычислим сумму значений в столбцах «C», «D». Для этого выделим ячейку C74 и введем туда формулу =СУММ(C9:C73). В ячейку D74 введем формулу =СУММ(D9:D72). Осталось сосчитать интеграл, для чего введем в ячейку C75 формулу =D7*(C74/2+D74):

	A	B	C	D
71	=A70+1	=B70+$D$7		=COS(B71/2)
72	=A71+1	=B71+$D$7		=COS(B72/2)
73	=A72+1	=B72+$D$7	=COS(B73/2)	
74		Сумма	=СУММ(C9:C73)	=СУММ(D9:D72)
75		Интеграл	=D7*(C74/2+D74)	

Получим окончательный результат для метода трапеций:

	A	Имя	C	D
71	62	6,08684		-0,99518
72	63	6,18501		-0,99880
73	64	6,28319	-1,00000	
74		Сумма	0,00000	-1,92069E-14
75		Интеграл	-1,8856E-15	

Проведем оценку погрешности по правилу Рунге. Для этого вычислим интеграл, увеличив шаг интегрирования в два раза. Окончательный результат показан ниже:

	F	G	H	I
39	30	5,89049		-0,98079
40	31	6,08684		-0,99518
41	32	6,28319	-1,00000	
42		Сумма	0,00000	-8,65974E-15
43		Интеграл	-1,7E-15	

Теперь, когда найден интеграл с шагом $2h$, произведем оценку погрешности. Для этого в свободном месте документа создадим таблицу для вычисления методом трапеций:

	A	B	C	D	E
78		Оценка погрешности по			
79		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
80		=A73	=C75	=ABS(C75-H43)/3	=D80<$D$5

Окончательный результат представлен ниже:

	A	B	C	D	E
78		Оценка погрешности по правилу Рунге для метода трапеций			
79		n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
80		64	-1,88563E-15	6,17643E-17	ИСТИНА

Метод трапеций позволяет при малом количестве повторений получить более точный результат, а также имеет меньшую погрешность по сравнению с методом прямоугольников.

5.5.3. Исследование метода Симпсона в MS Excel

Для вычисления интеграла оформляем таблицу так, как показано ниже:

	A	B	C	D
7	n=	64	h=	=($C$3-$C$4)/B7
8	N	Переменная X	Функция Y	Четность
9	0	0	=COS(B9/2)	=ОСТАТ(A9;2)=0
10	=A9+1	=B9+$D$7	=COS(B10/2)	=ОСТАТ(A10;2)=0

В ячейке B7 будет отражаться количество точек деления отрезка *n*, а в ячейку D7 введем формулу =($C$3-$C$4)/B7, которая будет определять шаг интегрирования.

В ячейку B9 вводим 0 как начальное значение интегрирования. Затем в ячейку B10 вводим формулу =B9+$D$7 и протягиваем ее до ячейки B73. В ячейку C9 вводим формулу заданной функции =COS(B9/2). Заполнять данные для столбца «С» следует вплоть до последней строки диапазона. В ячейку D9 вводится формула =ОСТАТ(A9;2)=0, проверяющая четность отрезка, который равен шагу интегрирования. Формула протягивается до ячейки D73. Результат представлен ниже:

	A	B	C	D
7	n=	64	h=	0,09817
8	N	Переменная X	Функция Y	Четность
9	0	0	1	ИСТИНА
10	1	0,09817	0,99880	ЛОЖЬ

Вычислим интеграл по методу Симпсона, для чего необходимо вычислить сумму значений на концах отрезка интегрирования $Y_{кр}$, а также сумму значений на четных и нечетных отрезках интегрирования $Y_{чет}$ и $Y_{неч}$

соответственно. После подсчета необходимых значений находится интеграл по формуле Симпсона:

	A	B	C	D
71	=A70+1	=B70+$D$7	=COS(B71/2)	=ОСТАТ(A71;2)=0
72	=A71+1	=B71+$D$7	=COS(B72/2)	=ОСТАТ(A72;2)=0
73	=A72+1	=B72+$D$7	=COS(B73/2)	=ОСТАТ(A73;2)=0
74	Yкр=	=C9+C73		
75	Yнеч=	=СУММЕСЛИ(D10:D72;"ложь";C10:C72)		
76	Yчет=	=СУММЕСЛИ(D10:D72;"ИСТИНА";C10:C72)		
77		Интеграл	=D7*(B74+(4*B75)+(2*B76))/3	

Окончательный результат:

	A	B	C	D
71	62	6,08684	-0,99518	ИСТИНА
72	63	6,18501	-0,99880	ЛОЖЬ
73	64	6,28319	-1	ИСТИНА
74	Yкр=	0		
75	Yнеч=	-9,4369E-15		
76	Yчет=	-1,29896E-14		
77		Интеграл	-2,08545E-15	

Проведем оценку погрешности по правилу Рунге. Для этого вычислим интеграл с шагом $2h$:

	F	G	H	I
39	30	5,89049	-0,98079	ИСТИНА
40	31	6,08684	-0,99518	ЛОЖЬ
41	32	6,28319	-1	ИСТИНА
42	Yкр=	0		
43	Yнеч=	-5,9952E-15		
44	Yчет=	-4,996E-15		
45		Интеграл	-2,22352E-15	

Произведем оценку погрешности. Для этого создадим таблицу, оформление которой представлено ниже.

	A	B	C	D
79	Оценка погрешности по правилу Рунге для метода Симпсона			
80	n	Интеграл	Погрешность	Выполнение условия
81	64	-2,08545E-15	9,2041E-18	ИСТИНА

При вычислении интеграла методом Симпсона погрешность вычислений оказалась наименьшей, что является важным параметром при расчетах.

5.5.4. Исследование зависимости точности вычисления интеграла от числа шагов

Произведем исследование зависимости точности от числа шагов *n* на примере метода трапеций. Для этого оформляем таблицу так, как показано ниже. В ячейку D84 введем формулу =ABS(C84-$D$2), которая высчитывает модуль разности между численным и аналитическим значением интеграла:

	A	B	C	D
81				
82		Исследование зависимости точности от числа шагов		
83		n	Интеграл	Точность
84		=F41	=H43	=ABS(C84-$D$2)
85		=A73	=C75	=ABS(C85-$D$2)
86		=K137	=M139	=ABS(C86-$D$2)
87		=P265	=R267	=ABS(C87-$D$2)

Окончательный результат:

	A	B	C	D
81				
82		Исследование зависимости точности от числа шагов		
83		n	Интеграл	Точность
84		32	-1,7003E-15	1,70034E-15
85		64	-1,8856E-15	1,88563E-15
86		128	5,4062E-15	5,4062E-15
87		256	1,47608E-14	1,47608E-14

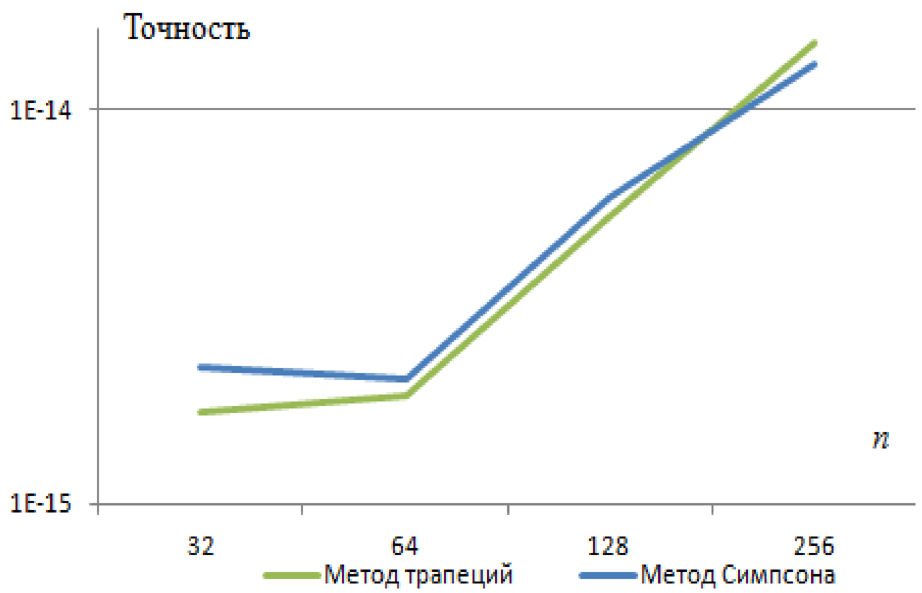
После этого произведем аналогичные расчеты для оставшихся методов. Результаты для метода Симпсона и методов прямоугольников представлены ниже:

	A	B	C	D
83	Исследование зависимости точности от числа шагов			
84	n	Интеграл	Точность	
85	32	-2,22352E-15	2,22352E-15	
86	64	-2,08545E-15	2,08545E-15	
87	128	6,02747E-15	6,02747E-15	
88	256	1,30341E-14	1,30341E-14	

Исследование зависимости точности от числа шагов

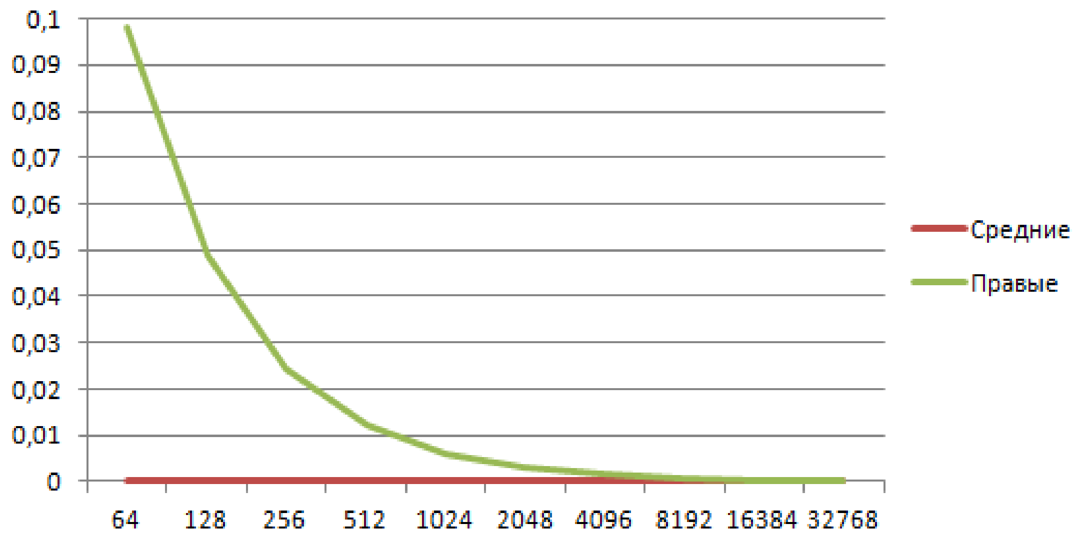
n	Точность		
	Правые	Средние	Левые
64	0,09817	1,44965E-15	0,09817
128	0,04909	8,10929E-15	0,04909
256	0,02454	1,21094E-14	0,02454
512	0,01227	1,09541E-15	0,01227
1024	0,00614	3,84429E-14	0,00614
2048	0,00307	1,75613E-14	0,00307
4096	0,00153	2,25382E-13	0,00153
8192	0,00077	1,54183E-13	0,00077
16384	0,00038	4,2997E-13	0,00038
32768	0,00019	3,96092E-14	0,00019

Сравним полученные данные, отобразив их на графиках. Для методов трапеций и Симпсона полученные результаты будут выглядеть следующим образом:



Делаем вывод, что точность обоих методов сравнима, однако метод Симпсона дает бо́льшую точность при том же количестве вычислений.

Для метода прямоугольников график выглядит следующим образом:

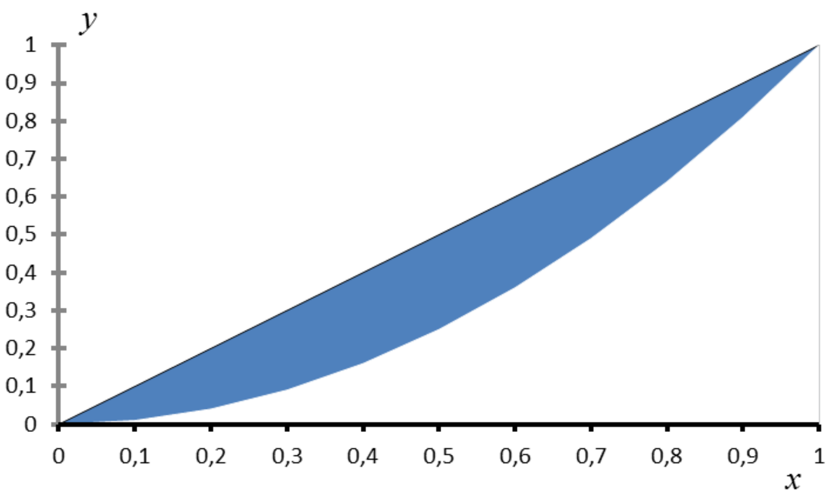


Видно, что наибольшую точность дает метод средних прямоугольников, если сравнивать с методами правых и левых прямоугольников.

§ 5.6. Вычисление двойного интеграла в MS Excel

В MS Excel можно реализовывать алгоритмы вычисления двойных или поверхностных интегралов. В качестве примера вычисления двойного интеграла рассмотрим следующую задачу.

Пример 5.4. Найти площадь фигуры (область D), ограниченной прямой $y(x) = x$ и параболой $y(x) = x^2$.



Решение. Точное значение площади может быть получено, если записать двойной интеграл через повторный:

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 .$$

Сведение двойного интеграла к повторному может быть прокомментировано следующим образом. Во-первых, очевидно, что обе кривые, $y(x) = x$ и $y(x) = x^2$, пересекаются в точках $x = 0$ и $x = 1$. Эти точки определяются как решение уравнения $x = x^2$. Переменная x изменяется в пределах от 0 до 1. При этом переменная y для данного фиксированного x изменяется от x^2 до x. Отсюда и выбор пределов интегрирования по переменной y.

Данный интеграл в MS Excel будем вычислять простым и понятным способом: разобьем единичный квадрат, внутри которого расположена фигура, на более мелкие квадраты со стороной 0,05 каждый. В соответствии с этой разбивкой в таблицу занесем данные для переменных интегрирования (теперь их две – x и y) в соответствующих узлах. Процесс ввода этих данных в таблицу может выглядеть следующим образом:

Y34

Вычисление площади фигуры

x \ y	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,15	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,3	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,35	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,45	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,55	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0,65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0,85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0,95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Площадь =																					0,19

В диапазон ячеек B3:V3 вводим узловые точки для переменной y, в то время как в диапазон ячеек A4:A24 вносим значения для узлов по оси x. Заполняются эти ячейки следующим образом. Сначала, например, в ячейку B3 вводится значение «0», а затем в ячейку C3 – формула =B3+0.05. Далее формула копируется в прочие ячейки диапазона B3:V3. Аналогично заполняется и диапазон A4:A24.

Как показано выше, диапазон ячеек B4:V24 заполняется нулями и единицами. Единица вносится в том случае, если соответствующая узловая точка попадает внутрь или на границу области, площадь которой вычисляется. В противном случае в ячейку вводится нуль. Поскольку диапазон достаточно велик, а вычисления для проверки условия попадания узла в область достаточно трудоемки, процесс необходимо автоматизировать. Для этого в ячейку B4 вводится формула =ЕСЛИ(И(B$3>=$A4^2;B$3<=$A4),1,0). Согласно этой формуле проверяется одновременное (это обеспечивается функцией И()) выполнение двух условий: ордината точки (ячейка B3) не должна быть меньше квадрата абсциссы точки (ячейка A4) и при этом не должна превышать значение самой абсциссы. Тогда значение в ячейке равно единице, в противном случае оно нулевое. Ячейка B4 выделяется, и с помощью маркера заполнения захватывается диапазон B4:B24. Далее этот диапазон посредством маркера заполнения расширяется до пределов B4:V24. При этом в самой формуле в ячейке B4 использованы смешанные ссылки, чтобы при копировании они корректно указывали на узловые точки.

Последующий процесс вычисления площади достаточно прост. Она может быть приближенно вычислена как сумма площадей тех квадратов, которые попадают (хотя бы частично) в область фигуры. Это значит, что нужно найти сумму всех единиц в диапазоне ячеек B4:V24. Это то же самое, что и сумма значений ячеек данного диапазона. Площадь каждого квадрата равна $0{,}05^2$, поэтому в ячейку V25 вводится формула =0,05^2*СУММ(B4:V24), которой и возвращается приближенное выражение для площади фигуры. Как показано выше, оно достаточно точное. Если все же точность невысока, можно уменьшить шаг для узловых точек.

К ячейкам диапазона B4:V24 применено форматирование, при котором единицы выделены жирным шрифтом. Чтобы применить такой формат, следует выделить указанный диапазон и выбрать команду «Формат / Условное форматирование». В открывшемся окне необходимо выбрать условие (равенство единице значения в ячейке) и тип форматирования (выделение жирным шрифтом).

Если внимательно посмотреть на область, занятую единицами, то можно заметить, что она повторяет силуэт фигуры, площадь которой вычисляется.

Существуют более адекватные методы вычисления интегралов подобного рода, позволяющие получать более точные результаты. Этот пример приведен исключительно в качестве иллюстрации возможностей Excel в данной области.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы функций.

Вариант	Интеграл	Вариант	Интеграл
1	$\int_0^{0,25} e^{-x^2/2}dx$	11	$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$
2	$\int_0^{0,25} \cos\frac{x^2}{4}dx$	12	$\int_0^{0,25} \sqrt{x}\sin^2 xdx$
3	$\int_0^{0,25} x^2dx$	13	$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos xdx$
4	$\int_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$	14	$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$
5	$\int_{0,25}^{0,5} \frac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2}dx$	15	$\int_5^{10} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$
6	$\int_0^{0,5} xe^{-x}dx$	16	$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$
7	$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx$	17	$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}dx$
8	$\int_0^{0,2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$	18	$\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}dx$
9	$\int_0^{0,25} \sqrt{1+x^3}dx$	19	$\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx$
10	$\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}dx$	20	$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

2. Исследовать численные методы вычисления определенных интегралов:

1) определить значение интеграла аналитически; вычислить определенный интеграл с заданной точностью ε методами правых, левых, центральных прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сравнить полученные результаты, сделать выводы;

2) исследовать зависимость точности ε вычисления интеграла ε от числа шагов *n* (точность – это модуль разности между численным и аналитическим значением);

3) оценить погрешность вычисления интеграла по правилу Рунге;

4) для наглядности использовать таблицы и графики.

Вариант	Интеграл	Допустимая погрешность	Вариант	Интеграл	Допустимая погрешность
1	$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	0,0001	13	$\int_1^{e} \frac{(1+\ln x)dx}{x}$	0,0001
2	$\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$	0,0001	14	$\int_0^{1} (e^x-1)^4 e^x dx$	0,0001
3	$\int_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2} dx$	0,0001	15	$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$	0,0001
4	$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$	0,0001	16	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$	0,0001
5	$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$	0,0001	17	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$	0,0001
6	$\int_1^{e} \frac{\sin(\ln x)dx}{x}$	0.0001	18	$\int_0^{1} xe^x dx$	0,0001
7	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tgx dx$	0,0001	19	$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$	0,0001
8	$\int_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	0,0001	20	$\int_1^{e} \ln x dx$	0,0001
9	$\int_0^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$	0,0001	21	$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$	0,0001
10	$\int_1^{2} \frac{xdx}{1+x^2}$	0,0001	22	$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$	0,0001
11	$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$	0,0001	23	$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$	0,0001
12	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^4}}$	0,0001	24	$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$	0,0001

ГЛАВА 6
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 6.1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Многие экономические, военные, биологические, технологические процессы следует рассматривать как взаимодействие динамических объектов. Динамические объекты – это объекты, для которых нельзя пренебречь изменением состояния во времени. Динамические объекты описываются дифференциальными уравнениями. Для исследования и моделирования динамических объектов применяются численные методы: метод Эйлера и его модификации, методы Рунге – Кутта и Адамса [35].

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x)$, $y''(x)$, …, $y^{(n)}(x)$.

В общем виде такое уравнение записывается как

$$F(x,\ y(x),\ y^1(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

или

$$y^{(n)}(x) = f(x,\ y(x),\ y^1(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),$$

где уравнение разрешено относительно старшей производной.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. График решения $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой.

Для получения одного конкретного решения необходимо задать так называемые **начальные условия** для x, $y(x)$ и всех производных этой функции до n – 1-го порядка. Для уравнения первого порядка задают одно начальное условие в виде $y\big|_{x=x_0} = y_0$, т. е. для конкретного значения $x = x_0$ указывают соответствующее значение $y_0 = y(x_0)$. Пару чисел (x_0, y_0) называют **начальными данными**. Решение задачи Коши называют частным решением уравнения (6.1) при условии (6.2):

$$y' = f(x, y); \tag{6.1}$$

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{6.2}$$

Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, называют **частным решением** (частным интегралом), а совокупность всех частных решений – **общим решением** (общим интегралом).

Пример 6.1. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{y} = ctgx\ dx,$$

удовлетворяющее начальному условию $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2.$

Решение. Выполняя интегрирование, получим общее решение

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C| \quad \text{или} \quad y = C\cdot\sin x.$$

Здесь для удобства потенцирования мы записали произвольную постоянную в виде $\ln|C|$. Подставив в общее решение начальное условие $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 2$, найдем C:

$$2 = C\cdot\sin\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$C = 2.$$

Таким образом, функция $y = 2\sin x$ является искомым частным решением данного уравнения.

Пример 6.2. Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и найти его частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$y' = y^2\sin x, \quad y(0) = 1.$$

Решение. Представим y' в виде $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделим переменные, умножив обе части данного уравнения на dx и разделив на y^2:

$$\frac{dy}{dx} = y^2\sin x;$$

$$\frac{dy\cdot dx}{dx\cdot y^2} = \frac{y^2\sin xdx}{y^2},$$

откуда

$$\frac{dy}{y^2} = \sin x dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \sin x dx.$$

Получим общее решение (общий интеграл):

$$-y^{-1} = -\cos x - C,$$

отсюда

$$\frac{1}{y} = \cos x + C, \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{\cos x + C}.$$

(Поскольку постоянная интегрирования задается произвольно, то в данном случае для удобства она взята равной $-C$.)

Найдем частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям. Для этого в общем решении полагаем $x = 0$ и $y = 1$:

$$\frac{1}{1} = \cos 0 + C,$$

т. е. $C = 0$ и частное решение запишется в виде

$$y_{част} = \frac{1}{\cos x}.$$

Пример 6.3. Решить однородное уравнение первого порядка. Найти частное решение:

$$y' = \frac{x+3y}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Решение. Поскольку $\dfrac{x+3y}{x} = 1 + 3\dfrac{y}{x}$, то правая часть исходного уравнения имеет вид $g\left(\dfrac{y}{x}\right) = 1 + 3\dfrac{y}{x}$. Положим $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда $g(z) = 1 + 3z$, $y = xz$ и $y' = z + xz'$. Отсюда $z + xz' = 1 + 3z$ (или $z'x = 1 + 2z$) – уравнение с разделяющимися переменными, которое преобразуется к виду

$$\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем $\frac{1}{2}\ln\left|1+2z\right| = \ln\left|x\right| + \ln C$ или $\left(1+2z\right)^{\frac{1}{2}} = \pm Cx$, т. е.

$$1+2\frac{y}{x} = C_1 x^2 \text{ (здесь } C_1 = C^2\text{)}.$$

Подставив $x = 1$ и $y = 2$ в найденное общее решение, получим частное решение:

$$1+2\frac{2}{1} = C_1 \cdot 1,$$

откуда $C_1 = 5$ и $1+2\frac{y}{x} = 5x^2$ (т. е. $y = \frac{5x^3 - x}{2}$) – частное решение.

§ 6.2. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами

6.2.1. Метод Эйлера решения задачи Коши

Простейшим численным методом решения задачи Коши является метод Эйлера.

Результат численного решения дифференциального уравнения – таблица вида

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
y_1	y_2	y_3	...	y_{n-1}	y_n

Метод Эйлера заключается в вычислении нескольких значений функции y по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1},$$

где h – шаг, который может быть как переменным, так и постоянным; $f(x, y)$ – правая часть дифференциального уравнения.

Модифицированный метод Эйлера заключается в том, что вычисление значения y_{i+1} состоит из двух этапов:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1};$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = \overline{0, n-1}.$$

6.2.2. Методы Рунге – Кутта

В методах Рунге – Кутта решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y|_{x=x_0} = y_0$ на отрезке $[a, b]$ ($x_0 = a$, x_1, x_2,…, $x_n = b$) с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ вычисления производятся по следующим формулам:

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \quad (i = \overline{1,n}) \ ; \tag{6.3}$$

$$\Delta y_{i-1} = \sum_{j=1}^{p} d_j k_j^{[i-1]}, \quad k_j^{(i-1)} = hf \ \ (x_{i-1} + c_j h, \quad y_{i-1} + c_j k_{j-1}^{[i-1]}).$$

При $p = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$ формулы (6.3) преобразуются к виду:

$$x_i = x_{i-1} + h; \ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}; \ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\Delta y_{i-1} = d_1 k_1^{[i-1]} = k_1^{[i-1]}; \quad k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

или

$$x_i = x_{i-1} + h; \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Метод Рунге – Кутта первого порядка назвают методом Эйлера.

Наибольшее распространение получил метод Рунге – Кутта четвертого порядка, называемый классическим: при $p = 4$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$ $c_4 = 1$, $d_1 = d_4 = \frac{1}{6}$, $d_2 = d_3 = \frac{1}{3}$.

Из рекуррентных формул (6.3) получим алгоритм решения задачи Коши классическим методом Рунге – Кутта:

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \quad i = \overline{1,m};$$

$$\Delta y_{i-1} = \frac{1}{6}\left[k_1^{[i-1]} + 2k_2^{[i-1]} + 2k_3^{[i-1]} + k_4^{[i-1]}\right];$$

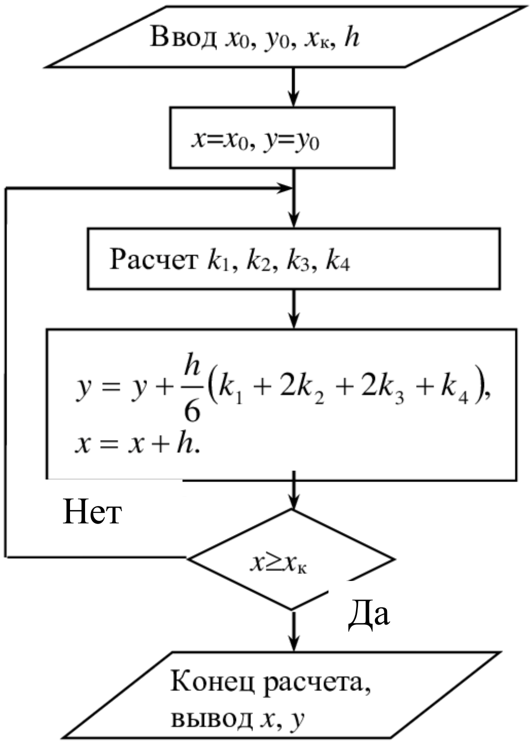
$$k_1^{[i-1]} = hf(x_{i-1}, y_{i-1});$$

$$k_2^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_1^{[i-1]}\right); \tag{6.4}$$

$$k_3^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_2^{[i-1]}\right);$$

$$k_4^{[i-1]} = hf\left(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3^{[i-1]}\right).$$

Блок-схема метода Рунге – Кутта приведена на рисунке. Эта схема обеспечивает порядок ошибки h^4, уменьшение шага в 10 раз снижает общую ошибку приблизительно в 10 000 раз.



6.2.3. Реализация методов Эйлера и Рунге – Кутта в MS Excel

Пример 6.4. Найти решение уравнения из примера 6.1 $\frac{dy}{dx} = y \cdot ctgx$, удовлетворяющее начальному условию $y(\frac{\pi}{2}) = 2$, на отрезке $[\frac{\pi}{2}; 0,9\pi]$ с шагом $h = \frac{\pi}{10}$ методами Эйлера и Рунге – Кутта в MS Excel.

Точное решение: $y = 2\sin x$.

Решение.

1. Метод Эйлера: $x_0 = \frac{\pi}{2}$; $y_0 = 2$; $h = \frac{\pi}{10}$; $x_i = i \cdot h$, $i = \overline{1,n}$;

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i \cdot ctg(x_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

2. Модифицированный метод Эйлера:

$$x_0 = \frac{\pi}{2}; \; y_0 = 2; \; h = \frac{\pi}{10}; \; x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n}; \; \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot y_i \cdot ctg(x_i);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[y_i \cdot ctg(x_i) + \tilde{y}_{i+1} \cdot ctg(x_{i+1})], \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

3. Метод Рунге – Кутта:

$$x_0 = \frac{\pi}{2}; \quad y_0 = 2; \quad h = \frac{\pi}{10}; \quad x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};$$

$$k_1 = y_i \cdot ctg(x_i); \; k_2 = \left(y_i \cdot ctg(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{hk_1}{2} \right);$$

$$k_3 = \left(y_i \cdot ctg(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{hk_2}{2} \right); \; k_4 = \left(y_i \cdot ctg(x_i + h) + \frac{hk_3}{2} \right);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4].$$

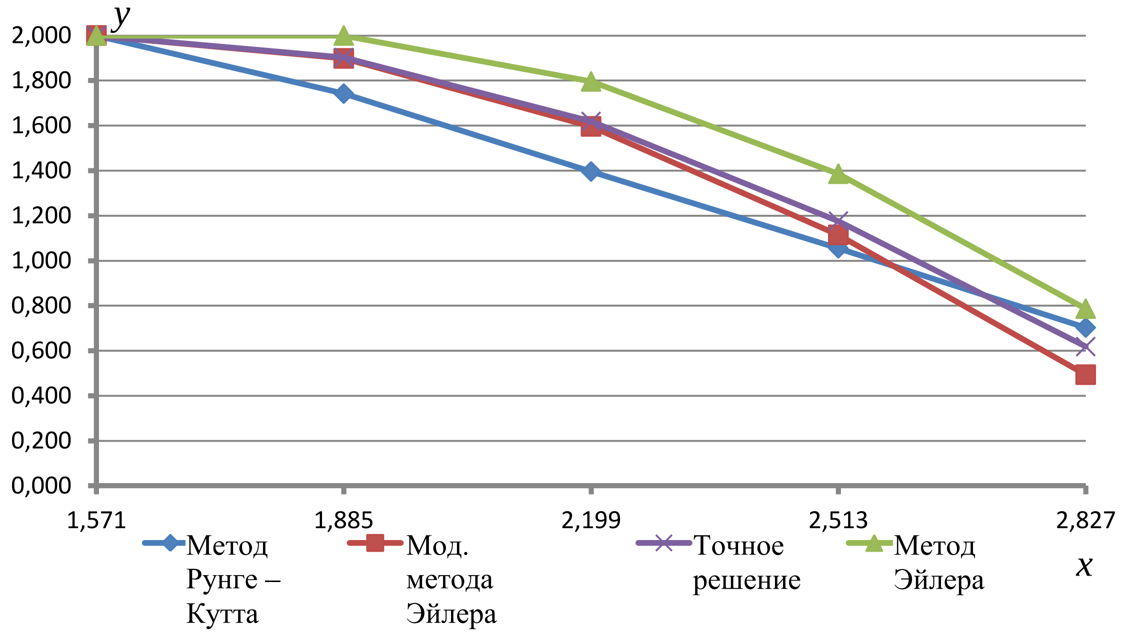
Реализация методов в MS Excel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	Метод Эйлера	$\tilde{y}$	Мод. метода Эйлера	k_1	k_2	k_3	k_4	Метод Рунге – Кутта	Точное решение	h	x_0
2	1,570796	2,000000	2,000000	2,000000					2,000000	2,000000	0,314159	1,570796
3	1,884956	2,000000	2,000000	1,897923	0,000000	-0,316769	-1,378130	-1,544848	1,741623	1,902113		
4	2,199115	1,795847	1,795847	1,596106	-0,565887	-0,976290	-1,310117	-1,469150	1,395636	1,618034		
5	2,513274	1,385945	1,385945	1,114307	-1,013989	-1,554913	-0,805130	-0,776733	1,054731	1,175571		
6	2,827433	0,786658	0,786658	0,493089	-1,451713	-2,298061	-0,331679	-0,019444	0,702316	0,618034		

Формулы в ячейках Excel:

A2=L2; K2=ПИ()/10; L2=ПИ()/2; J3=2*SIN(A3); A3=A2+$K$2; B3=B2+$K$2*B2*(1/TAN(A2)); C3=B2+$K$2/2*B2*(1/TAN(A2)); D3=D2+$K$2/2*(D2*(1/TAN(A2))+C3*(1/TAN(A3))); E3=I2*1/TAN(A2); F3=I2*1/TAN(A2+$K$2/2)+$K$2*E3/2; G3=I2*1/TAN(B2+$K$2/2)+$K$2*F3/2; H3=1/TAN(C2+$K$2/2)+$K$2*G3/2; I3=I2+$K$2/6*(E3+2*F3+2* G3+H3).

Графики приближенного решения дифференциального уравнения $y' = y \cdot ctgx$ методами Эйлера и Рунге – Кутта, а также точное (аналитическое) решение показаны ниже:



Пример 6.5. Найти решение уравнения из примера 6.2 $y' = y^2 \sin x$, $y(0) = 1$ на отрезке [0; 1,35] с шагом h = 0,15 методами Эйлера и Рунге – Кутта в MS Excel. Точное решение: $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение.

1. Метод Эйлера:

$$x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ h = 0{,}15;\ x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i^2 \cdot \sin(x_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

2. Модифицированный метод Эйлера:

$$x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ h = 0{,}15;\ x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};\ \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot y_i^2 \cdot \sin(x_i);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[y_i^2 \cdot \sin(x_i) + \tilde{y}_{i+1}^2 \cdot \sin(x_i)], \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

3. Метод Рунге – Кутта:

$$x_0 = 0;\quad y_0 = 1;\quad h = 0{,}15;\quad x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};$$

$$k_1 = y_i^2 \cdot \sin(x_i);\ k_2 = \left(y_i^2 \cdot \sin(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{hk_1}{2} \right);$$

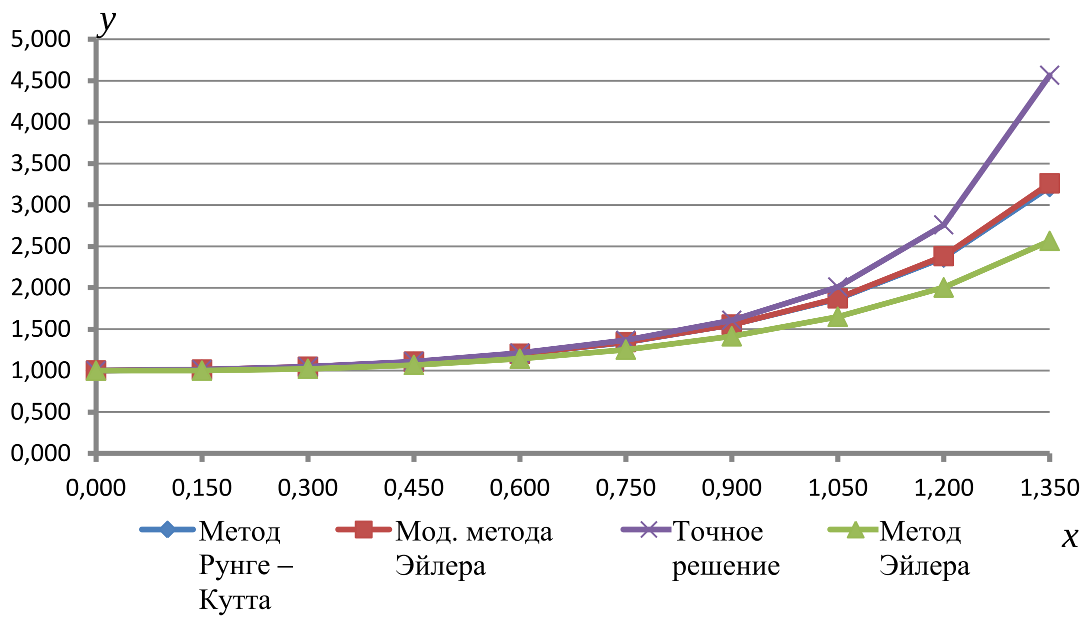
$$k_3 = \left(y_i^2 \cdot \sin(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{hk_2}{2} \right);$$

$$k_4 = \left(y_i^2 \cdot \sin(x_i + h) + \frac{hk_3}{2} \right);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4].$$

Реализация методов в MS Excel представлена ниже:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	Метод Эйлера	$\boxed{\tilde{y}}$	Мод. метода Эйлера	k_1	k_2	k_3	k_4	Метод Рунге – Кутта	Точное решение	h	x_0
2	0,000000	1,000000	1,000000	1,000000					1,000000	1,000000	0,150000	0,000000
3	0,150000	1,000000	1,000000	1,011208	0,000000	0,074930	0,080549	0,080971	1,009798	1,011356		
4	0,300000	1,022416	1,022416	1,045837	0,152381	0,238928	0,245420	0,245906	1,043973	1,046752		
5	0,450000	1,068753	1,068753	1,107342	0,322081	0,423349	0,430944	0,431514	1,105527	1,110559		
6	0,600000	1,143278	1,143278	1,202697	0,531611	0,652449	0,661512	0,662191	1,201070	1,211628		
7	0,750000	1,253984	1,253984	1,344342	0,814536	0,962548	0,973649	0,974482	1,342606	1,366701		
8	0,900000	1,414762	1,414762	1,554324	1,228715	1,416242	1,430307	1,431362	1,551435	1,608726		
9	1,050000	1,649943	1,649943	1,873363	1,885429	2,133645	2,152261	2,153657	1,866708	2,009763		
10	1,200000	2,004152	2,004152	2,382453	3,022621	3,370736	3,396844	3,398802	2,365622	2,759704		
11	1,350000	2,565700	2,565700	3,260954	5,215847	5,744317	5,783952	5,786925	3,217105	4,566071		



Пример 6.6. Найти решение уравнения из примера 6.3: $y' = \dfrac{x+3y}{x}$, $y(1)=2$ на отрезке [1; 5,5] с шагом h = 0,5 методами Эйлера и Рунге – Кутта в MS Excel.

Точное решение: $y = \dfrac{5x^3 - x}{2}$.

Решение.

1. Метод Эйлера:

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 2; \quad h = 0{,}5; \quad x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{x_i + 3y_i}{x_i}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

2. Модифицированный метод Эйлера:

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 2; \quad h = 0{,}5; \quad x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{x_i + 3y_i}{x_i}; \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[\frac{x_i + 3y_i}{x_i} + \frac{x_i + 3\tilde{y}_{i+1}}{x_{i+1}}\right], \quad i = \overline{0, n-1}.$$

3. Метод Рунге – Кутта:

$$x_0 = 1; \; y_0 = 2; \; h = 0{,}5; \; x_i = i \cdot h, \quad i = \overline{1,n};$$

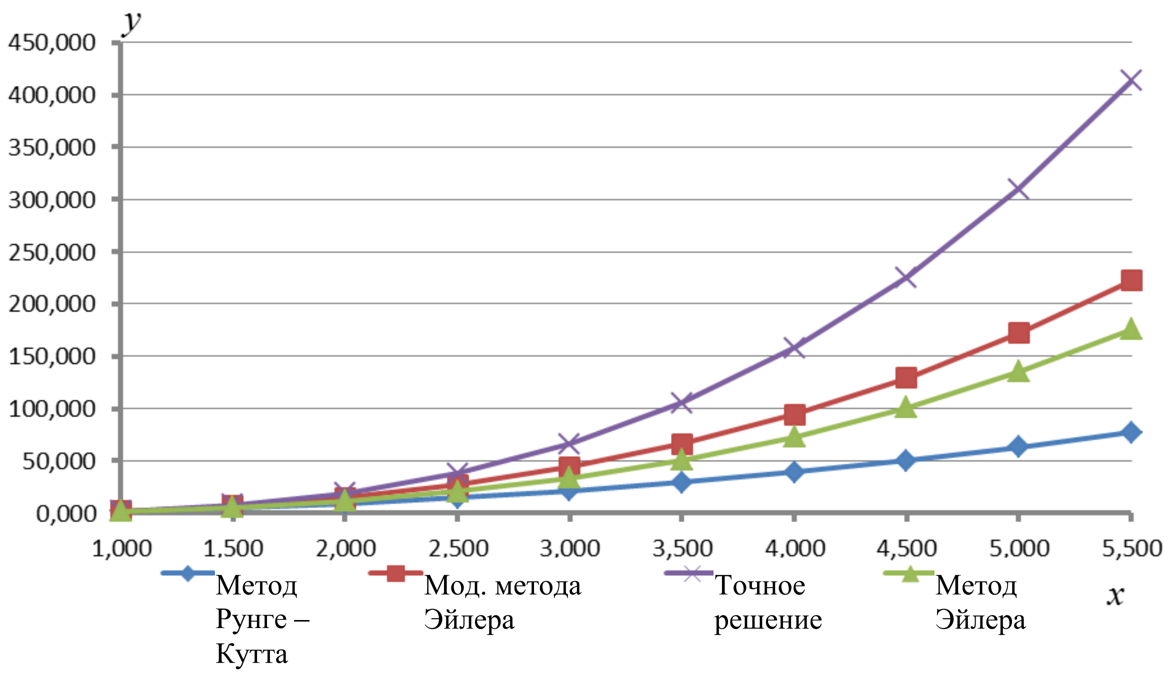
$$k_1 = \frac{x_i + 3y_i}{x_i}; \; k_2 = \left(\frac{(x_i + h/2 + 3y_i)}{x_i + h/2} + \frac{hk_1}{2}\right);$$

$$k_3 = \left(\frac{(x_i + h/2 + 3y_i)}{x_i + h/2} + \frac{hk_2}{2} \right); \quad k_4 = \left(\frac{(x_i + h/2 + 3y_i)}{x_i + h/2} + \frac{hk_3}{2} \right);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4].$$

Реализация методов в MS Excel представлена ниже:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	Метод Эйлера	$\boxed{\tilde{y}}$	Мод. метода Эйлера	k_1	k_2	k_3	k_4	Метод Рунге – Кутта	Точное решение	h	x_0
2	1,00	2,00	2,00	2,00					2,00	2,00	0,50	1,00
3	1,50	5,50	5,50	6,67	7,00	5,95	5,69	5,62	4,99	7,69		
4	2,00	11,50	11,50	14,75	10,98	7,66	7,66	7,66	9,10	19,00		
5	2,50	20,63	20,63	26,92	14,64	10,10	10,10	10,10	14,52	37,81		
6	3,00	33,50	33,50	43,83	18,43	12,62	12,62	12,62	21,32	66,00		
7	3,50	50,75	50,75	66,12	22,32	15,21	15,21	15,21	29,51	105,44		
8	4,00	73,00	73,00	94,45	26,30	17,87	17,87	17,87	39,15	158,00		
9	4,50	100,88	100,88	129,44	30,36	20,58	20,58	20,58	50,25	225,56		
10	5,00	135,00	135,00	171,74	34,50	23,33	23,33	23,33	62,85	310,00		
11	5,50	176,00	176,00	221,98	38,71	26,14	26,14	26,14	76,97	413,19		



Из графиков видно, что для данной задачи численное решение, полученное модифицированным методом Эйлера, является лучшим на рассматриваемом интервале.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти аналитически частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

2. Найти решения дифференциальных уравнений методами Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге – Кутта.

1. $y' + y\ \mathrm{ctg}x = \sin x;\ \ y(0) = 1.$

2. $y' = y + e^{2x} - x;\ \ y(0) = 0{,}5.$

3. $y' - y = x^2;\ \ y(1) = 0.$

4. $y' + 2y = \cos x;\ \ y(0) = 1.$

5. $y' + 2y = 3\ln x;\ \ y(1) = 2.$

6. $xy' + y = x;\ \ y(1) = 1.$

7. $y' = xy - 1;\ \ y(1) = 1.$

8. $(x^2 + y^2)dx - dy = 0;\ y(1) = 0.$

9. $(y - x)dx + xdy = 0;\ \ y(1) = 1.$

10. $ydy + (x - 3y)\,dx = 0;\ \ y(1) = 1.$

11. $x^2 y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;\ \ y(1) = 0.$

12. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2};\ \ y(0) = 1.$

13. $y' = e^{2x+y};\ y(0) = 0.$

14. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0;\ y(0) = 1.$

15. $ye^x dx - (1 + e^x)dy = 0;\ y(1) = 1.$

16. $y' = \cos(y - x - 1);\ y(1) = 1.$

17. $(xy^2)dy + (x^2 y)dx = 0;\ y(1) = 1.$

18. $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0;\ y(1) = 1.$

19. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + 2y;\ y(1) = 0.$

20. $x^2 y' - y^2 = x^2;\ y(1) = 0.$

21. $y' = \dfrac{1 + xy}{x^2};\ y(1) = 1.$

22. $(1 + y^2)dx - xy\ dy = 0,\ y(1) = 0.$

23. $xdx - (x^2 + 1)ydy = 0;\ y(0) = 1.$

24. $y' + 2y = 0;\ y(1) = 1.$

25. $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2};\ y(0) = 1.$

26. $y' = \dfrac{y}{x} - 1;\ y(0) = 1.$

27. $y\ln y + xy' = 0;\ y(1) = e.$

28. $2xy = y' - xe^{-x^2};\ y(0) = e.$

29. $xy' + y = 0;\ y(-1) = 3.$

30. $2xy = y' - xe^{-x^2};\ y(1) = e.$

ГЛАВА 7
АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

§ 7.1. Методы аппроксимации наблюдений

Аппроксимацией называется замена некоторой функции $f(x)$, заданной аналитически или таблично, приближенным значением другой, более удобной для вычислений функции $\varphi(x)$, которая близка заданной. Близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ получается введением в аппроксимирующую функцию свободных параметров $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, т. е. представлением $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

В зависимости от задания меры отклонения аппроксимирующей функции от исходной (критериев близости функций) и способа выбора наилучших значений параметров $c_i\ (i=\overline{0,n})$ различают два вида аппроксимации: интерполяцию и сглаживание.

При интерполяции близость $\varphi(x)$ к $f(x)$ заключается в совпадении их значений в заданных точках $x_j\ (j=\overline{0,m})$ – узлах интерполяции (причем все x_j различны). Получаем систему уравнений

$$\varphi(x_i, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k) = f(x_i)\ (i=\overline{0,n}), \tag{7.1}$$

из которой можно определить параметры $c_j\ (j=\overline{0,k})$.

Чаще всего интерполирующую функцию $\varphi(x)$ выбирают в виде алгебраического полинома. Он называется **интерполяционным полиномом** и может быть записан, например, в канонической форме, полиномами Лагранжа или Ньютона.

Задача аппроксимации функции может ставиться, когда исходные данные содержат погрешности, кратные значения, большое количество наблюдений. В этих случаях аппроксимация на основе интерполяции не имеет смысла или невозможна [1] и применяется сглаживание функции $f(x)$.

Для задачи аппроксимации сглаживанием критерий близости аппроксимирующей функции $\hat{y} = f\left(x, c_0, c_1, \ldots, c_k\right)$ к исходным данным $(x_i, y_i),\ i=\overline{0,n}$ определяется как минимальное отклонение значений в заданных точках. Количественно отклонение может вычисляться различными способами. Наиболее часто применяется **метод наименьших квадратов (МНК)**, идея которого заключается в том, что функцию

$$\hat{y} = f\left(x, c_0, c_1, \ldots, c_k\right) \tag{7.2}$$

необходимо подобрать таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от расчетных $\hat{y}_i$ была наименьшей, т. е.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i, c_0, c_1, ..., c_k\right) \right]^2 \to \min . \qquad (7.3)$$

Функцию $\hat{y} = f\left(x, c_0, c_1, ..., c_k\right)$ называют **регрессией**, а ее график – **линией регрессии**.

§ 7.2. Интерполяционные полиномы

7.2.1. Линейное интерполирование

Рассмотрим нахождение приближенного значения функции при ее табличном задании. Пусть табличная функция содержит две известные точки – $y(x_0)$ и $y(x_1)$, при этом $x_0 < x < x_1 = x_0 + h$ и $\Delta y(x_0) = y(x_1) - y(x_0)$. Требуется найти $y(x)$.

Если функция на данном промежутке близка к линейной, либо ее последовательные значения мало отличаются друг от друга, либо значения x достаточно близки, используется формула

$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y(x_0) . \qquad (7.4)$$

Пример 7.1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	3	3,04	3,08
y	2,44	2,80	3,22

Используя линейное интерполирование, найти:

а) y (3,008); б) x, при котором $y(x) = 3$.

Решение:

а) $x_0 = 3$; $y(x_0) = 2{,}44$; $x_1 = 3{,}04$; $y(x_1) = 2{,}8$;

$h = x_1 - x_0 = 3{,}04 - 3 = 0{,}04$; $\Delta y(x_0) = y(x_1) - y(x_0) = 2{,}8 - 2{,}44 = 0{,}36.$

$y(3{,}008) \approx 2{,}44 + \dfrac{3{,}008 - 3}{0{,}04} \cdot 0{,}36 = 2{,}512$;

б) поскольку исходное значение $f(x) = 3 > 2{,}8$, то положим $x_0 = 3{,}04$, тогда $y(x_0) = 2{,}8$; $x_1 = 3{,}08$; $y(x_1) = 3{,}22$; $h = x_1 - x_0 = 3{,}08 - 3{,}04 = 0{,}04$; $\Delta y(x_0) = y(x_1) - y(x_0) = 3{,}22 - 2{,}8 = 0{,}42.$

Таким образом, $3 = 2{,}8 + \dfrac{x - 3{,}04}{0{,}04} \cdot 0{,}42$, откуда искомое значение $x \approx 3{,}06.$

7.2.2. Канонический полином

Запишем интерполирующую функцию $F(x)$ в виде канонического полинома степени n:

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k . \qquad (7.5)$$

Функция имеет $n + 1$ коэффициент. Тогда $n + 1$ условие, наложенное на многочлен, позволит однозначно определить коэффициенты. Через $n + 1$-ю точку (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n + 1$ $(x_i \neq x_j)$ проходит единственная кривая степени n (многочлен) при выполнении условий

$$y_i = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k , \ k = 1, 2, \ldots, n + 1. \qquad (7.6)$$

Таким образом, получена система $n + 1$ линейных алгебраических уравнений. Из данной системы определяются неизвестные коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1; \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_{n-1} x_2^{n-1} + a_n x_2^n = y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n1}^2 + ... + a_{n-1} x_{n+1}^{n-1} + a_n x_{n+1}^n = y_{n+1}. \end{cases} \qquad (7.7)$$

Определитель этой системы относительно неизвестных a_k есть **определитель Вандермонда**:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}, \qquad (7.8)$$

который не равен нулю, если $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$.

Тогда систему (7.7) можно записать в матричном виде:

$$CA = Y, \qquad (7.9)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Эту систему можно решить и найти коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ каким-либо известным способом, например методом Гаусса.

Непосредственное нахождение коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$ из условия интерполирования $P_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{1, n+1}$ приводит к существенному искажению их величины вычислительной погрешностью. Поэтому интерес представляют формы записи интерполяционного многочлена, не использующие непосредственное решение системы (7.7). Наиболее употребительна запись $P_n(x)$ в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

7.2.3. Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})..(x-x_n)}{(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})..(x_k-x_n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{\prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} (x-x_j)}{\prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} (x_k-x_j)} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_k(x), \tag{7.10}$$

где $l_k(x) = \dfrac{(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})..(x-x_n)}{(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})..(x_k-x_n)}$ – фундаментальные полиномы Лагранжа, которые удовлетворяют равенствам

$$l_k(x) = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \tag{7.11}$$

зависят от заданных узлов x_i и не зависят от значений интерполируемой функции y_i.

Пример 7.2. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	1	3	5
y	2	4	6

Требуется построить интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через заданные точки.

Решение. Полином Лагранжа имеет вид

$$L_2(x) = f(x_1)\cdot l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x) + f(x_3)\cdot l_3(x) = 2\cdot l_1(x) + 4\cdot l_2(x) + 6\cdot l_3(x).$$

Найдем фундаментальные полиномы Лагранжа:

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{1}{8}x^2 - x + \frac{15}{8};$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)}=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4};$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)}=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}.$$

Подставив $l_k(x)$ в полином Лагранжа, получим

$$L_2(x)=2\cdot l_1(x)+4\cdot l_2(x)+6\cdot l_3(x)=2\cdot\left(\frac{1}{8}x^2-x+\frac{15}{8}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)+$$

$$+6\cdot\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}\right)=x+1.$$

7.2.4. Интерполяционный полином в форме Ньютона

Для интерполяции функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента $h=x_{i+1}-x_i\ \ (i=\overline{0,n-1})$, используются разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции. Такие разности называются конечными.

Конечная разность первого порядка

$$\Delta^1 y_i=y_{i+1}-y_i\ \ (i=\overline{0,n-1}).\tag{7.12}$$

Из конечных разностей первого порядка образуются конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=(y_{i+2}-y_{i+1})-(y_{i+1}-y_i)=(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)\ \ (i=\overline{0,n-2}).\tag{7.13}$$

Аналогично определяются конечные разности более высоких порядков.

Для функций, заданных таблицами с постоянным шагом изменения аргумента, наиболее часто используется формула Ньютона. В формуле Ньютона интерполяционная функция определяется как многочлен вида

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).\tag{7.14}$$

Коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ находятся из условий, определяющих в узлах интерполяции совпадение значений интерполирующей функции со значениями функции, заданной таблично. Имеем:

$$a_0=y_0;\ \ a_1=\frac{\Delta^1 y_0}{1!h};\ \ a_2=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},\ldots;\ \ a_k=\frac{\Delta^k y_0}{k!h^2},\ldots;\ \ a_n=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Тогда

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!h}{}_1 (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}{}_2 (x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \qquad (7.15)$$

Пример 7.3. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	1	3	5	7
y	2	4	8	6

Требуется построить интерполяционный полином Ньютона, проходящий через заданные точки.

Решение. Вычислим «таблицу конечных разностей»:

i	x_i	y_i	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	1	2	2	2	–8
1	3	4	4	–6	
2	5	8	–2		
3	7	6			

Шаг h постоянен и равен двум.

Вычислим значения коэффициентов полинома Ньютона:

$$a_0 = y_0 = 2;\; a_1 = \frac{\Delta^1 y_0}{1!h} = \frac{2}{2} = 1;\; a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} = \frac{2}{2\cdot 4} = \frac{1}{4};\; a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} = \frac{-8}{6\cdot 8} = -\frac{1}{6}.$$

Формулу полинома Ньютона

$$P_3(x) = 2 + (x-1) + \frac{1}{4}(x-1)(x-3) - \frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-5)$$

можно использовать для вычисления значений функции $y(x)$ в любой точке заданного интервала (от $x = 1$ до $x = 7$).

§ 7.3. Реализация методов интерполяции в среде программы MS Excel

7.3.1. Вычисление значений канонического полинома в MS Excel

Решение системы линейных алгебраических уравнений в матричном виде (7.9) записывается формулой

$$A = C^{-1}Y, \qquad (7.16)$$

где C – матрица коэффициентов, определяемых таблицей степеней вектора аргументов $x = \left(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n\right)$ $i = \overline{1, n+1}$: $C = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$;

C^{-1} – матрица, обратная матрице C.

Для вычисления обратной матрицы C^{-1} можно использовать функцию MS Excel МОБР().

После вычисления коэффициентов a_0, a_1, …, a_n можно записать канонический полином по формуле (7.5). По данному полиному могут быть вычислены значения для любого значения аргумента x.

Пример 7.4. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
y	2	2,1	2,2	2,15	2,1	2,25	2,4	2,45	2,5	2,4	2,3

Требуется построить канонический полином, проходящий через заданные точки:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	2	2,2	2,1	2,4	2,5	2,3

Решение. Вычислим таблицу коэффициентов. В диапазон D2:D7 заносим 1, в диапазон E2:E7 – значения аргумента x, в ячейку F2 – формулу = E2^2 (x^2), в ячейку G2 – формулу =E2^3 (x^3), в ячейку H2 – формулу =E2^4 (x^4), в ячейку I2 – формулу =E2^5 (x^5). Производим автозаполнение ячеек диапазона F3:I7:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	y		Матрица коэффициентов C					
2	0	2		1	0	0	0	0	0
3	0,1	2,2		1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
4	0,2	2,1		1	0,2	0,04	0,008	0,0016	0,00032
5	0,3	2,4		1	0,3	0,09	0,027	0,0081	0,00243
6	0,4	2,5		1	0,4	0,16	0,064	0,0256	0,01024
7	0,5	2,3		1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

Определитель Вандермонда по формуле (7.8) W = 3,456E-11 (не равен нулю, так как согласно исходным данным $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$).

С помощью функции МОБР() получим матрицу C^{-1}, обратную матрице *С*. По формуле (7.16) рассчитаем искомый вектор коэффициентов $A=\left(a_0\ a_1 \ldots a_n\right)^T$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9	$A=C^{-1}Y$			Матрица коэффициентов C^{-1}					
10	2			1	0	0	0	0	0
11	12,68333333			-22,8333	50	-50	33,33333	-12,5	2
12	-184,5833333			187,5	-641,667	891,6667	-650	254,1667	-41,6667
13	966,6666667			-708,333	2958,333	-4916,67	4083,333	-1708,33	291,6667
14	-2041,666667			1250	-5833,33	10833,33	-10000	4583,333	-833,333
15	1500			-833,333	4166,667	-8333,33	8333,333	-4166,67	833,3333

Вычислим значения канонического полинома.

В ячейку C18 вводим преобразованную к следующему виду формулу, соответствующую значению полинома в первой узловой точке:

=(((($A$15*A2+$A$14)*A2+$A$13)*A2+$A$12)*A2+$A$11)*A2+$A$10.

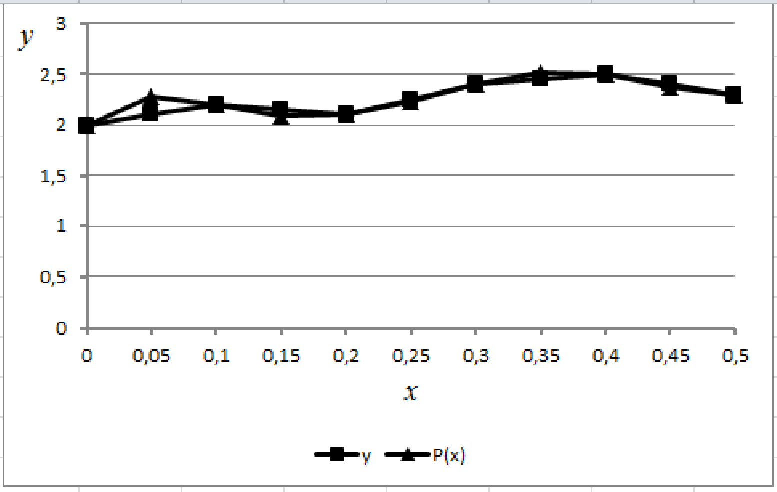
Производим автозаполнение ячеек C19:C23. Получаем точное совпадение в узлах интерполяции. Чтобы определить, как изменяется интерполяционный полином внутри рассматриваемого интервала, но вне узлов интерполяции, уменьшим шаг табуляции функции в два раза (вместо h = 0,1 возьмем h = 0,05).

Для наглядности интерполяции построим график исходной функции и интерполяционного многочлена. Расчеты выполнены в диапазоне ячеек A18:C28. В C18 помещена формула

=(((($A$15*A18+$A$14)*A18+$A$13)*A18+$A$12)*A18+$A$11)*A18+$A$10:

	A	B	C
17	x	y	$P_4(x)$
18	0	2	2
19	0,1	2,2	2,2
20	0,2	2,1	2,1
21	0,3	2,4	2,4
22	0,4	2,5	2,5
23	0,5	2,3	2,3

	A	B	C
17	x	y	$P_4(x)$
18	0	2	2
19	0,05	2,1	2,28125
20	0,1	2,2	2,2
21	0,15	2,15	2,092188
22	0,2	2,1	2,1
23	0,25	2,25	2,228125
24	0,3	2,4	2,4
25	0,35	2,45	2,514063
26	0,4	2,5	2,5
27	0,45	2,4	2,375
28	0,5	2,3	2,3



Анализ приведенных выше данных и графиков функций показывает, что на данном интервале для относительно гладкой функции визуально интерполяция осуществляется хорошо.

7.3.2. Интерполяции по формулам Лагранжа в MS Excel

Для удобства вычислений в MS Exel преобразуем полином Лагранжа к виду

$$L_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)=\sum_{k=1}^{n} q_k\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

где q_k $(k=\overline{1,n})$ – константа:

$$q_k=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)\cdot(x_k-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}.$$

Пример 7.5. Функция $y = f(x) = x^2$ задана таблицей

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

Требуется построить интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через заданные точки. Определить значение функции в точке $x = 3{,}5$.

Решение. Для $n = 3$ запишем константы q_k $(k=\overline{1,4})$:

$$q_1=\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)};\quad q_2=\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)};$$

$$q_3=\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)};\quad q_4=\frac{f(x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}.$$

В диапазон C2:C5 введем формулы для констант q_k $(k=\overline{1,4})$:

C2: (q_1) =B2/((A2-A3)*(A2-A4)*(A2-A5));

C3: (q_2) =B3/((A3-A4)*(A3-A5)*(A3-A2));

C4: (q_3) =B4/((A4-A5)*(A4-A2)*(A4-A3));

C5: (q_4) =B5/((A5-A2)*(A5-A3)*(A5-A4)).

Вычислим $l_k(x)$ $(k=\overline{1,4})$ по формулам:

$$l_1(x)=q_1\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4);\quad l_2(x)=q_2\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4);$$
$$l_3(x)=q_3\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4);\quad l_4(x)=q_4\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4).$$

В диапазон D2:D5 введем формулы для констант $l_k(x)$ $(k=\overline{1,4})$:

D2 ($l_1(x)$) =$C$2*($A2-$A$3)*($A2-$A$4)*($A2-$A$5);

D3 ($l_2(x)$) =$C$3*($A2-$A$2)*($A2-$A$4)*($A2-$A$5);

D4 ($l_3(x)$) =$C$4*($A2-$A$2)*($A2-$A$3)*($A2-$A$5);

D5 ($l_4(x)$) =$C$5*($A2-$A$2)*($A2-$A$3)*($A2-$A$4).

В ячейки H2:H5 введем формулы для вычисления значений интерполяционного полинома $L_4(x)$:

H2 ($L_4(x_1)$) =СУММ(D2:G2); H3 ($L_4(x_2)$) =СУММ(D3:G3);

H4 ($L_4(x_3)$) =СУММ(D4:G4); H5 ($L_4(x_4)$) =СУММ(D5:G5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	q_k	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$	$L_4(x)$
2	1	1	-0,167	1	0	0	0	1
3	2	4	2	0	4	0	0	4
4	3	9	-4,5	0	0	9	0	9
5	4	16	2,667	0	0	0	16	16

Признаком правильности вычислений является полученная в диапазоне D2:H5 таблица, диагональные элементы которой совпадают со значениями функции *y* (диапазон B2:B5), а остальные элементы равны нулю.

Столбец H2:H5 совпадает со значениями интерполируемой функции в узлах интерполяции.

Интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через заданные в примере точки:

$$L_4(x)=\frac{1\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+\frac{4\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$
$$+\frac{9\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+\frac{16\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}.$$

Для вычисления значений функции в точке x = 3,5 введем это значение аргумента в ячейку A6 и выполним автозаполнение диапазона ячеек D6:H6:

	A	B	C	D	E	F	G	H
6	3,5			0,063	-1,25	8,438	5	12,25

Полученное значение совпадает со значением, вычисленным по формуле $f(x)=x^2$ ($f(3{,}5)=3{,}5^2=12{,}5$).

Если вычислить значение функции на интервале [1; 4] с шагом h = 0,5 (диапазон B7:B13), то можно видеть полное совпадение ее значений со значениями, полученными с помощью интерполяционного многочлена (диапазон H7:H13):

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	1	1		1	0	0	0	1
8	1,5	2,25		0,313	3,75	-2,813	1	2,25
9	2	4		0	4	0	0	4
10	2,5	6,25		-0,063	2,25	5,063	-1	6,25
11	3	9		0	0	9	0	9
12	3,5	12,25		0,063	-1,25	8,438	5	12,25
13	4	16		0	0	0	16	16

7.3.3. Интерполяции функций многочленом Ньютона в MS Excel

Пример 7.6. Построить интерполяционный полином Ньютона для функции из примера 7.3.

Решение. Представим «таблицу конечных разностей» в MS Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	i	x_i	y_i	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
2	0	1	2	2	2	-8
3	1	3	4	4	-6	
4	2	5	8	-2		
5	3	7	6			

В ячейки D2:D4 введены формулы расчета первых разностей: =C3-C2; =C4-C3; =C5-C4; в ячейки E2:E3 – вторых разностей: =D3-D2; =D4-D3; в ячейку F2 – третьих разностей: =E3-E2.

Вычислим значения коэффициентов a_i (i = 0, 1, 2, 3) для полинома Ньютона:

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	h=	2						
8	i	y_i	h^i	$i!$	a_0	a_1	a_2	a_3
9	0	2	1	1	0	1	0,25	-0,16667
10	1	4	2	1	1	0,5	-0,125	
11	2	8	4	2	2	-0,04167		
12	3	6	8	6	3			

В ячейки E9:E12 введены значения коэффициента a_0 – значения функции y_i (i = 0, 1, 2, 3).

В ячейки F9:F11 введены значения a_1 (F9: =D2/(D10*C10); F10: =D3/(D11*C11); F11: =D4/(D12*C12)).

В ячейки G9:G10 введены значения a_2 (G9: =E2/(D11*C11); G10: =E3/(D12*C12)).

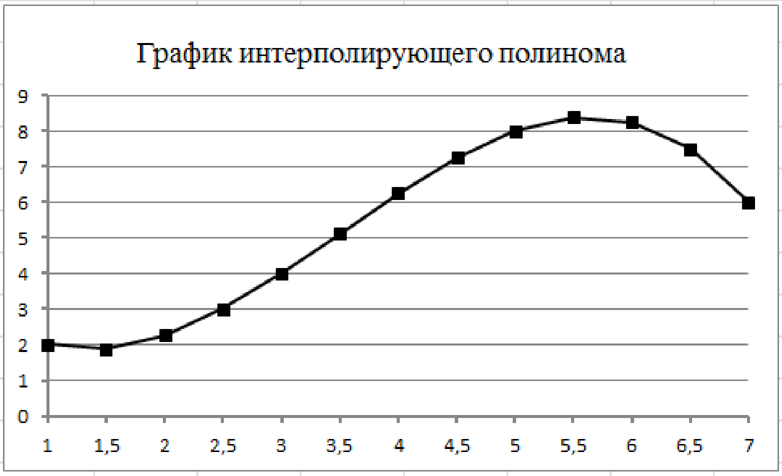
В ячейке H9 помещено значение a_3 (H9: =F2/(C12*D12).

Значения коэффициентов полинома Ньютона, рассчитанные в MS Excel, совпадают со значениями, полученными в пункте 7.2.4. Поэтому применяется такая же формула полинома Ньютона:

$$P_3(x) = 2 + (x-1) + \frac{1}{4}(x-1)(x-3) - \frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-5).$$

Рассчитаем значения интерполирующего полинома для значений аргумента x в интервале [1; 7] с шагом h = 1 и построим график:

	A	B
14	x_i	$P_3(x)$
15	1	2
16	1,5	1,875
17	2	2,25
18	2,5	3
19	3	4
20	3,5	5,125
21	4	6,25
22	4,5	7,25
23	5	8
24	5,5	8,375
25	6	8,25
26	6,5	7,5
27	7	6



§ 7.4. Аппроксимация функций методом наименьших квадратов в MS Excel

Для построения уравнения регрессии применяются различные аналитические и программные методы.

В табличном процессоре MS Excel для регрессионного анализа можно использовать:

1) встроенные функции;

2) средство «Линия тренда»;

3) средство «Поиск решения»;

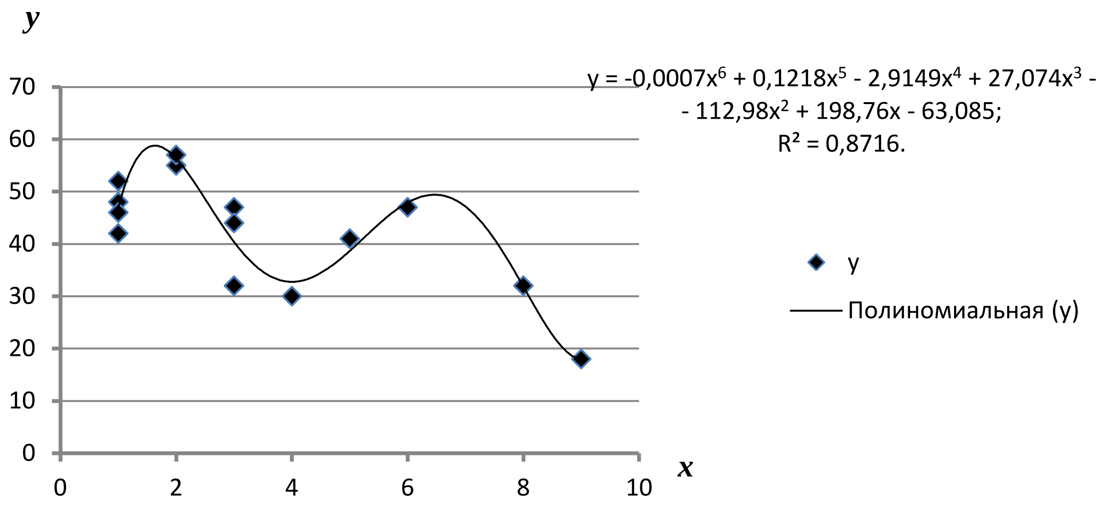
4) инструмент «Пакет анализа. Регрессия».

При этом коэффициенты уравнения регрессии нелинейных функций рассчитываются при помощи средств «Линия тренда» и «Поиск решения». Проблема заключается в том, что указанные средства дают разные значения. Для устранения этого несоответствия, как будет показано ниже, классический метод «Поиск решения» дополняется условиями существования критической точки.

Рассмотрим построение уравнения регрессии для определения зависимости успеваемости y (в баллах) от количества пропусков учебных занятий x по предмету «Теория вероятностей и математическая статистика». Исследования проводились для группы экономического факультета одного из вузов. Количество студентов n = 14. Были получены следующие данные:

Число пропусков	1	1	2	3	2	1	1	3	8	5	6	9	4	3
Баллы	48	42	55	47	57	52	46	44	32	41	47	18	30	32

Для построения уравнения регрессии построим график в виде точечной диаграммы. Анализ графика показывает, что исследуемая зависимость имеет волнообразный характер и пять экстремумов (включая конечные точки). Поэтому модель, использованная для построения «Линии тренда», – полином шестой степени.



Получено уравнение полиномиальной регрессии:

$$y = -0{,}0007x^6 + 0{,}1218x^5 - 2{,}9149x^4 + 27{,}074x^3 - \\ -112{,}98x^2 + 198{,}76x - 63{,}085. \qquad (7.17)$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}8716$ свидетельствует о высоком качестве уравнения регрессии.

Средство MS Excel «Линии тренда» позволяет использовать полином максимальной степени 6. Поэтому важной является задача построения полиномиальных уравнений регрессии более высоких степеней. Для решения данной задачи воспользуемся общей постановкой МНК:

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min, \qquad (7.18)$$

где y_i – значение результативного признака;

$\hat{y}_i$ – значение, полученное по уравнению регрессии для данного значения x_i.

Уравнение полинома степени m имеет вид $\hat{y}_i = \sum_{j=0}^{m} b_j x_i^j$.

Для того чтобы точка с координатами $b_j^{\,0}$ была критической точкой функции F, необходимо, чтобы $\dfrac{\partial F}{\partial b_j^{\,0}} = 0.$

Подставив уравнение полинома в формулу (7.18) и найдя частные производные, получим необходимые условия критической точки:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) \cdot x_i^j = 0,\ j = \overline{1,m}. \qquad (7.19)$$

Используя формулы (7.18) и (7.19), получаем в MS Excel для полинома шестой степени таблицу с результатами расчетов в MS Excel (табл. 7.1).

Таблица 7.1

x	y	$\hat{y}$	$(\hat{y}-y)^2$	$(\hat{y}-y)$	$\Delta\cdot x^6$	$\Delta\cdot x^5$	$\Delta\cdot x^4$	$\Delta\cdot x^3$	$\Delta\cdot x^2$	$\Delta\cdot x$
1	48	46,98	1,05	–1,02	–1,02	–1,02	–1,02	–1,02	–1,02	–1,02
1	42	46,98	24,75	4,98	4,98	4,98	4,98	4,98	4,98	4,98
1	52	46,98	25,25	–5,02	–5,02	–5,02	–5,02	–5,02	–5,02	–5,02
1	46	46,98	0,95	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
2	55	56,33	1,77	1,33	85,07	42,54	21,27	10,63	5,32	2,66
2	57	56,33	0,45	–0,67	–42,93	–21,46	–10,73	–5,37	–2,68	–1,34
3	47	40,39	43,75	–6,61	–4821,96	–1607,32	–535,77	–178,59	–59,53	–19,84
3	44	40,39	13,06	–3,61	–2634,96	–878,32	–292,77	–97,59	–32,53	–10,84
3	32	40,39	70,32	8,39	6113,04	2037,68	679,23	226,41	75,47	25,16
4	30	32,77	7,65	2,77	11325,79	2831,45	707,86	176,97	44,24	11,06
5	41	38,70	5,31	–2,30	–36003,52	–7200,70	–1440,14	–288,03	–57,61	–11,52
6	47	47,92	0,85	0,92	43002,25	7167,04	1194,51	199,08	33,18	5,53
8	32	31,87	0,02	–0,13	–34516,18	–4314,52	–539,32	–67,41	–8,43	–1,05
9	18	18,03	0,00	0,03	17493,49	1943,72	215,97	24,00	2,67	0,30
Сумма			195,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Примечание. $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)$.

С помощью средства MS Excel «Поиск решения» рассчитываются коэффициенты полинома. В качестве целевой ячейки берется сумма квадратов остатков ($\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2\to\min$), в качестве ограничений – суммы остатков, умноженные на значения факторной переменной в степени 1, 2,…, 6 ($\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)\cdot x_i^j=0,\ j=\overline{1,m}$).

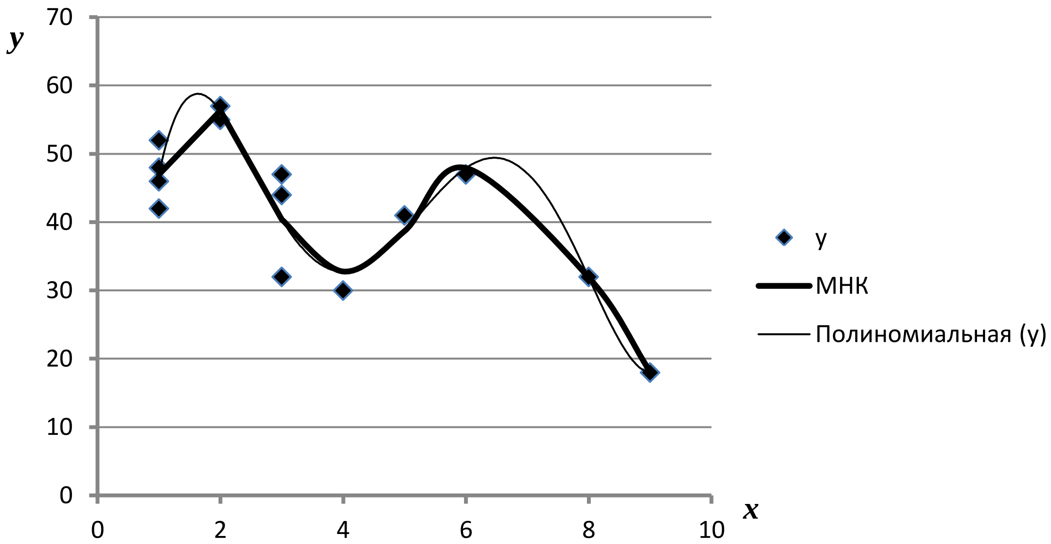
Поскольку разработанная модель является нелинейной, используем инструмент «Поиск решения нелинейных задач методом ОП» или инструмент «Эволюционный поиск решения» в версиях MS Excel 2010 и выше. При поиске решения следует выбрать опцию «Игнорировать целочисленные ограничения».

Получается полином

$$y=-0{,}00068x^6+0{,}1218x^5-2{,}915x^4+27{,}075x^3-112{,}98x^2+$$
$$+198{,}76x-63{,}086. \qquad (7.20)$$

Коэффициенты данного полинома с точностью до третьего знака после запятой соответствуют коэффициентам полинома (7.17). Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}8716$ (значение такое же, как и для полинома (7.17)).

Построим совместные графики полиномов (7.17) и (7.20):

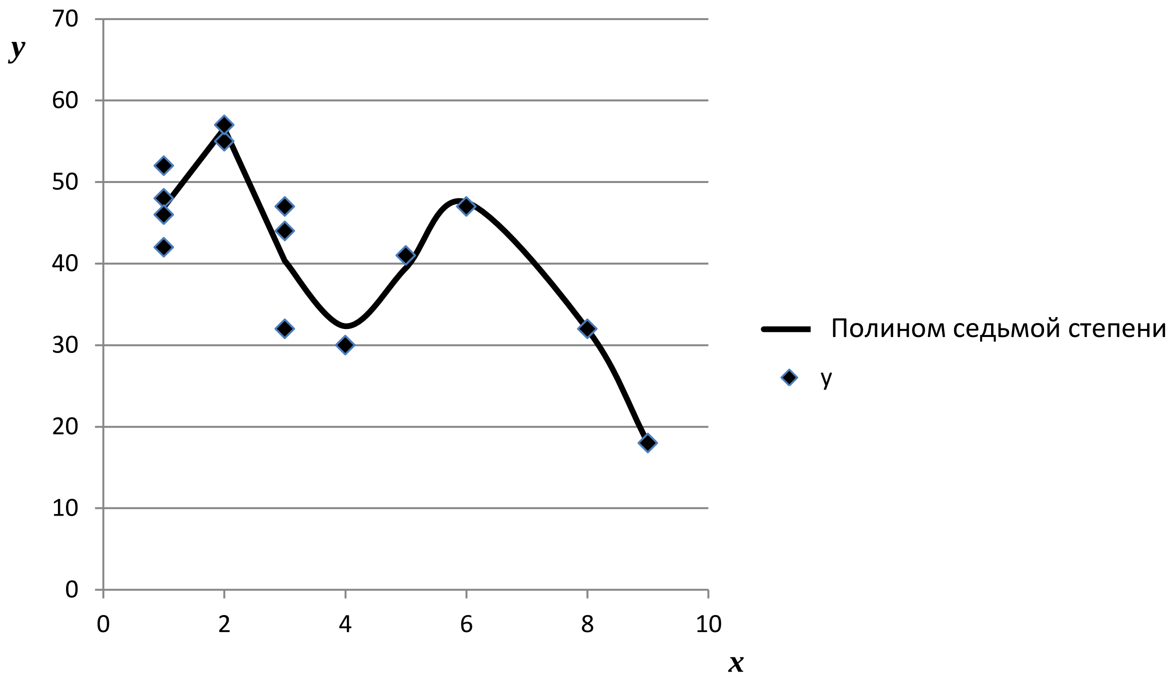


Построим модель полиномиальной регрессии седьмой степени для тех же значений выборки *x* и *y*, что и в табл. 7.1. Результаты расчетов приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

$\hat{y}$	$(\hat{y}-y)^2$	$(\hat{y}-y)$	$\Delta \cdot x^7$	$\Delta \cdot x^6$	$\Delta \cdot x^5$	$\Delta \cdot x^4$	$\Delta \cdot x^3$	$\Delta \cdot x^2$	$\Delta \cdot x$
47	1,17	–1,08	–1,08	–1,08	–1,08	–1,08	–1,08	–1,08	–1,08
47	24,18	4,92	4,92	4,92	4,92	4,92	4,92	4,92	4,92
47	25,83	–5,08	–5,08	–5,08	–5,08	–5,08	–5,08	–5,08	–5,08
47	0,84	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92
57	2,41	1,55	198,60	99,30	49,65	24,82	12,41	6,21	3,10
57	0,20	–0,45	–57,40	–28,70	–14,35	–7,18	–3,59	–1,79	–0,90
40	44,71	–6,69	–14623,12	–4874,37	–1624,79	–541,60	–180,53	–60,18	–20,06
40	13,59	–3,69	–8062,12	–2687,37	–895,79	–298,60	–99,53	–33,18	–11,06
40	69,12	8,31	18181,88	6060,63	2020,21	673,40	224,47	74,82	24,94
32	5,37	2,32	37954,14	9488,54	2372,13	593,03	148,26	37,06	9,27
39	2,39	–1,54	–120652,94	–24130,59	–4826,12	–965,22	–193,04	–38,61	–7,72
48	0,27	0,51	144107,07	24017,84	4002,97	667,16	111,19	18,53	3,09
32	0,00	–0,06	–115669,68	–14458,71	–1807,34	–225,92	–28,24	–3,53	–0,44
18	0,00	0,01	58623,89	6513,77	723,75	80,42	8,94	0,99	0,11
Сумма	190,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Построим график полиномиальной регрессии седьмой степени.



Выбираем метод решения «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ» в случае гладких функций или «Эволюционный поиск решения в MS Excel» в случае негладких функций в версии Excel 2010 и выше. Функция $f(x)$ называется **гладкой**, если все ее частные производные существуют и являются непрерывными функциями.

Для рассматриваемой задачи выбираем «Эволюционный поиск решения в MS Excel», так как у нас негладкая задача и созданная модель не является линейной. Задаем параметр «Игнорировать целочисленные ограничения», при установке которого игнорируются ограничения, определяющие, что значения должны быть целыми. Применение этого параметра иногда позволяет найти решение, которое в противном случае обнаружить нельзя.

Проведенное исследование показывает, что для построения уравнения регрессии можно использовать средство MS Excel «Линии тренда» для полиномов до шестой степени, а предложенный метод, основанный на средстве «Поиск решения», может использоваться для полиномов любых степеней и других нелинейных функций. Для полиномов до шестой степени включительно оба средства дают близкие результаты.

Задания для самостоятельной работы

1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	2	3	5	7	9
y	5	7	10	11	15

Используя линейное интерполирование аналитически и в MS Excel, найти: 1) y (2,5); 2) y (3,6); 3) y (4); 4) y (4,5); 5) y (5,5); 6) y (5,7); 7) y (6); 8) y (6,5); 9) y (7,5); 10) y (7,7); 11) y (8); 12) y (8,5); 13) y (8,6); 14) y (8,7).

2. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	2	2,1	2	2,15	2,2	2,3	2,6	2,8	3	3,4	4

Требуется построить канонический полином, проходящий через заданные точки:

1	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	y	2	2,3	2,2	2,4	2,6	2,8
2	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	y	2	2,1	2,7	2,4	2,6	2,8
3	x	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	y	3	3,2	3,1	3,4	3,5	3,3
4	x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
	y	2	2,1	2,4	2,2	2,5	2,7
5	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	y	1	1,2	1,1	1,4	1,5	1,3
6	x	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75
	y	3	3,3	3,1	3,4	2,9	2,3
7	x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
	y	2	2,2	2,1	2,2	2,6	2,4
8	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	y	1,2	2,2	3,1	3,4	2,5	2,3
9	x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
	y	–2	–2,2	–2,1	–2,4	–2,5	–2,3
10	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	y	–2	–2,3	2,1	2,45	–2,5	–2,3
11	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	y	–2	2,2	–2,1	2,4	–2,5	2,3

12	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	y	–3	–3,2	–3,1	3,4	3,5	3,3
13	x	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75
	y	2,1	–2,2	–2,6	3,4	3,5	3,3
14	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
	y	1	2	3	2	1	0

3. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	y_3

Требуется построить аналитически и в MS Excel интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через заданные точки:

1	2	4	6
	1	2	4
3	4	5	6
	1	4	9
5	0	–1	–2
	3	3,5	7
7	1	2	3
	–1	–2	–3
9	1	4	7
	–3	–3,5	4
11	–1	0	1
	5	1	4
13	3	3,1	3,2
	–5	–4,5	–7

2	1	2	3
	6	5	3
4	3	4	5
	1	8	27
6	5	6	7
	–1	2	–3
8	8	9	10
	7	5	3
10	0	1	2
	6	3	5
12	–3	–4	–5
	3,3	3,6	4
14	0	1	2
	–2	–4	0

4. Используя приведенные ниже данные, построить интерполяционный полином Ньютона, проходящий через заданные точки. Показать, что $y = x^3$:

1	–3	–2,5	–2
	–27	–15,625	–8
3	0	0,5	1
	0	0,125	1
5	–2	–2,5	–3
	–8	–15,625	27
7	2	2,5	3
	8	15,625	27

2	–1	–0,5	0
	–1	–0,125	0
4	1	1,5	2
	1	3,375	8
6	3	3,5	4
	27	42,875	64
8	–2,5	–2	–1,5
	–15,625	–8	–3,375

9	–1,5	–1	–0,5
	–3,375	–1	–0,125
11	–0,5	0	0,5
	–0,125	0	0,125
13	2,5	3	3,5
	15,625	27	42,875

10	1,5	2	2,5
	3,375	8	15,625
12	0,5	1	1,5
	0,125	1	3,375
14	2	0	1
	8	0	1

5. На основе экспериментальных данных построить уравнение полиномиальной регрессии седьмой степени:

x	Варианты								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*
0	2,50	2,92	2,35	3,30	2,58	–0,52	–1,79	0,14	0,94
0,1	2,89	3,33	2,24	2,70	2,27	–1,24	–0,57	–0,19	1,04
0,2	3,40	3,04	2,20	2,11	2,88	–1,34	–0,08	0,15	1,76
0,3	3,78	3,41	3,12	2,44	3,00	–1,04	0,31	0,44	2,15
0,4	4,20	4,38	3,00	2,36	3,19	–1,35	0,45	1,33	2,08
0,5	4,55	5,02	3,16	2,01	3,35	–1,01	1,18	1,80	2,30
0,6	5,27	4,86	2,48	2,37	3,46	–0,86	0,73	2,55	3,29
0,7	5,07	5,98	3,25	2,47	3,61	–0,46	2,18	2,30	3,60
0,8	5,45	6,23	3,25	1,98	2,85	–0,41	2,41	3,20	4,65
0,9	6,08	6,42	3,49	1,79	3,36	–0,37	2,62	3,54	4,97
1,0	6,22	7,76	3,24	2,75	3,07	–0,40	3,43	4,31	5,51
1,1	6,58	7,93	3,67	2,51	3,29	0,04	4,24	5,47	6,65
1,2	7,27	9,16	3,94	2,92	3,64	0,33	5,57	6,14	7,15
1,3	7,50	10,28	4,65	3,41	4,22	0,98	6,53	7,96	8,77
1,4	8,31	10,94	5,71	3,69	4,66	0,95	8,46	9,55	10,43
1,5	8,98	12,96	6,40	3,71	5,83	1,70	9,53	11,15	11,60
1,6	9,07	13,61	7,93	4,16	6,86	2,42	11,27	12,59	13,84
1,7	9,84	15,31	8,70	5,30	7,25	3,14	13,88	14,27	15,03
1,8	10,75	17,16	9,70	6,27	8,75	4,64	15,29	16,51	18,08
1,9	12,06	19,50	11,69	7,40	10,29	5,84	18,19	19,54	20,59
2,0	13,32	21,70	13,75	8,70	10,99	7,50	20,57	21,83	22,49

x	Варианты								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	y	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*
0	–0,91	0,56	0,35	5,54	2,58	3,07	3,00	3,77	–1,66
0,1	–0,96	0,52	0,64	3,31	2,27	4,03	4,18	3,83	–1,80
0,2	–1,64	1,77	1,34	3,83	2,88	3,52	3,82	4,80	–2,29
0,3	–1,03	1,77	0,87	4,46	3,00	3,80	5,36	5,25	–2,27
0,4	–0,74	2,23	1,26	3,63	3,19	3,74	4,18	5,34	–0,85
0,5	–0,43	2,96	1,81	3,91	3,35	3,84	4,71	4,49	–1,54
0,6	–0,54	2,75	1,75	4,82	3,46	5,73	4,90	4,78	–0,72
0,7	–0,37	2,72	2,10	4,92	3,61	5,97	5,43	4,85	–0,10
0,8	–0,25	3,47	2,01	4,58	2,85	4,50	6,02	5,27	–1,37

x	Варианты								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	y	y	y	y	y	y	y	y	y
0,9	0,19	3,95	3,15	5,19	3,36	5,05	5,23	5,17	0,33
1,0	–0,01	3,80	3,31	5,32	3,07	5,18	5,39	6,27	0,68
1,1	–0,12	3,64	4,50	5,54	3,29	6,66	5,04	6,70	0,03
1,2	0,79	4,35	4,63	6,38	3,64	6,82	6,50	6,36	1,04
1,3	1,44	4,53	5,72	7,26	4,22	8,28	6,43	7,79	1,97
1,4	1,74	4,66	6,71	7,98	4,66	7,48	7,38	8,72	3,54
1,5	2,35	4,62	8,24	8,55	5,83	10,08	8,18	9,89	3,58
1,6	3,92	4,87	9,44	10,11	6,86	10,68	9,93	11,68	5,93
1,7	4,72	5,50	10,70	11,07	7,25	11,67	10,51	11,52	6,48
1,8	6,55	5,94	12,25	12,62	8,75	12,91	11,58	13,82	8,82
1,9	7,71	6,02	14,38	13,70	10,29	14,98	12,74	16,15	9,06
2,0	9,73		16,38	15,41	10,99	16,64	13,74	17,49	12,35

x	Варианты								
	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	y	y	y	y	y	y	y	y	y
0	–0,46	0,06	0,08	3,30	0,35	0,56	0,94	2,58	3,30
0,1	–1,21	0,20	1,03	4,05	0,64	0,52	1,04	2,27	2,70
0,2	–0,20	0,18	1,33	3,94	1,34	1,77	1,76	2,88	2,11
0,3	0,07	1,09	–0,07	3,35	0,87	1,77	2,15	3,00	2,44
0,4	0,11	0,51	–0,10	5,16	1,26	2,23	2,08	3,19	2,36
0,5	0,48	0,50	1,43	4,97	1,81	2,96	2,30	3,35	2,01
0,6	1,34	1,70	0,75	4,82	1,75	2,75	3,29	3,46	2,37
0,7	1,08	1,67	1,78	4,34	2,10	2,72	3,60	3,61	2,47
0,8	2,23	0,33	1,84	4,56	2,01	3,47	4,65	2,85	1,98
0,9	2,48	1,95	1,33	6,01	3,15	3,95	4,97	3,36	1,79
1,0	2,98	1,31	1,67	5,54	3,31	3,80	5,51	3,07	2,75
1,1	3,53	2,72	2,17	6,13	4,50	3,64	6,65	3,29	2,51
1,2	4,30	2,31	2,93	7,16	4,63	4,35	7,15	3,64	2,92
1,3	5,47	3,98	3,77	8,55	5,72	4,53	8,77	4,22	3,41
1,4	6,11	4,54	4,64	8,51	6,71	4,66	10,43	4,66	3,69
1,5	7,28	4,82	5,74	9,10	8,24	4,62	11,60	5,83	3,71
1,6	8,75	7,80	7,55	11,75	9,44	4,87	13,84	6,86	4,16
1,7	9,91	8,64	10,19	13,54	10,70	5,50	15,03	7,25	5,30
1,8	11,60	9,50	11,27	15,41	12,25	5,94	18,08	8,75	6,27
1,9	12,97	10,94	11,89	15,63	14,38	6,02	20,59	10,29	7,40
2,0	15,37	14,04	14,28	19,11	16,38	6,55	22,49	10,99	8,70

ГЛАВА 8
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

В MS Excel можно решить многие оптимизационные задачи, прежде всего с помощью инструмента «Поиск решения». Эти вопросы достаточно обстоятельно изложены в учебно-методической литературе ([2, 38] и др.) и поэтому в данном учебном пособии не рассматриваются.

Однако данный инструмент не является единственным средством реализации методов оптимизации в MS Excel. Например, можно реализовать графические методы решения задач математического программирования (линейного, нелинейного, динамического), использовать средства визуализации (представление диаграмм с областями, поверхностей), решать производственные, транспортные, логистические, маркетинговые задачи с помощью вычислений в таблицах. Существуют и другие возможности. В данной главе изложены вопросы организации оптимального движения автобусов с помощью специального средства MS Excel «Таблицы данных».

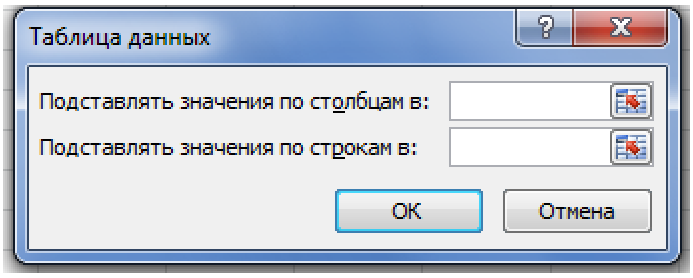
Использование «Таблицы данных» для решения задач оптимизации в MS Excel

Одной из специальных функций, которая записывается как формула массива, является функция «Таблица данных (подстановки)». С ее помощью реализуется специальный метод анализа, называемый таблицей данных. Таблица данных представляет собой диапазон ячеек, полученных по одной или нескольким формулам при изменении одного или двух аргументов.

Существует два основных вида таблиц подстановки. «Таблица данных (подстановки)» с одной переменной позволяет создавать таблицу данных для одного изменяемого аргумента. В таких таблицах допускается использовать несколько формул для подстановки, которые размещаются справа от первой формулы или под ней. «Таблица данных (подстановки)» с двумя переменными позволяет выполнять подстановку только в одну формулу, но для двух изменяемых аргументов.

В большинстве случаев при использовании таблиц данных (подстановки) можно избежать сложных способов адресации. «Таблицу данных (подстановки)» с двумя переменными удобно использовать для построения диаграмм типа «Поверхность».

В MS Excel данное средство вызывается цепочкой команд: «Данные → Работа с данными → Анализ «что если»… → Таблица данных», в ответ на которые появляется диалоговое окно:



При выполнении команды MS Excel автоматически использует в таблице данных формулу массива, которая представляет собой специальную функцию «ТАБЛИЦА()», доступную только при применении команды «Данные | Таблица данных (подстановки)». Она имеет следующий синтаксис:

{=ТАБЛИЦА(ссылка_на_строку; ссылка_на_столбец}.

Здесь ссылка_на_строку и ссылка_на_столбец представляют собой ссылки на ячейки, введенные в диалоговом окне «Таблица данных (подстановки)». Фигурные скобки указывают, что это формула массива, а изменять или удалять отдельные элементы массива нельзя. Если нужно изменить результаты, необходимо выделить всю таблицу данных и снова выполнить команду «Данные | Таблица данных». Чтобы удалить результаты, необходимо выделить весь массив, а затем удалить его.

Рассмотрим использование средства «Таблица данных» на примере.

Пример. На радиальном маршруте протяженностью L_m = 10 км работают A = 8 автобусов.

Маршрут имеет эксплуатационные показатели:

техническая скорость автобусов V_m = 25 км/ч;

число промежуточных остановок N_{no} = 20;

время простоя на промежуточной остановке t_{no} = 30 с;

время простоя на конечной остановке t_{ko} = 6 мин.

Требуется исследовать:

1) зависимость интервала движения (I) от технической скорости (диапазон изменения скорости от 20 до 30 км/ч);

2) зависимость интервала движения (I) от числа промежуточных остановок (число промежуточных остановок изменяется от 15 до 25);

3) совместное влияние на интервал движения (I) времени простоя на конечной и промежуточной остановках (t_{no} изменяется от 20 до 40 с, t_{ko} – от 3 до 9 мин).

Решение.

Аналитическое решение задачи

1. Время оборота автобуса на маршруте («час»):

$$t_{ob} = \frac{2 \cdot L_m}{V_m} + \frac{2 \cdot N_{no} \cdot t_{no}}{3600} + \frac{2 \cdot t_{ko}}{60}.$$

2. Интервал движения автобусов («мин») составляет:

$$I = \frac{t_{ob}}{A} \cdot 60.$$

Решение в MS Excel

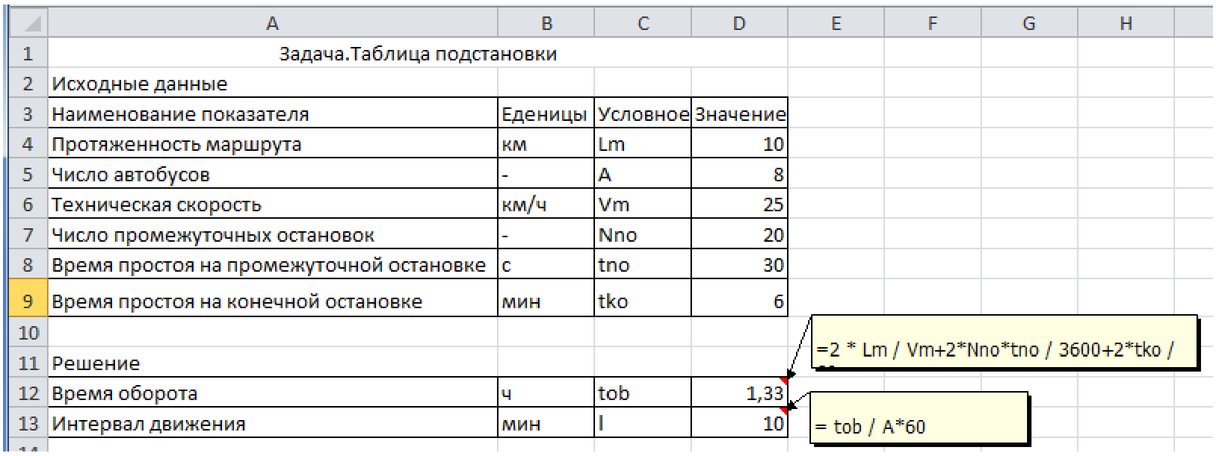
1.1. Внесем исходные данные в рабочий лист. Сделаем именование ячеек и, используя исходные расчетные формулы, выполним расчеты. Введем в ячейки D12, D13 формулы:

$$=2 * Lm / Vm + 2*Nno*tno / 3600 + 2*tko / 60;$$

$$= tob / A*60.$$

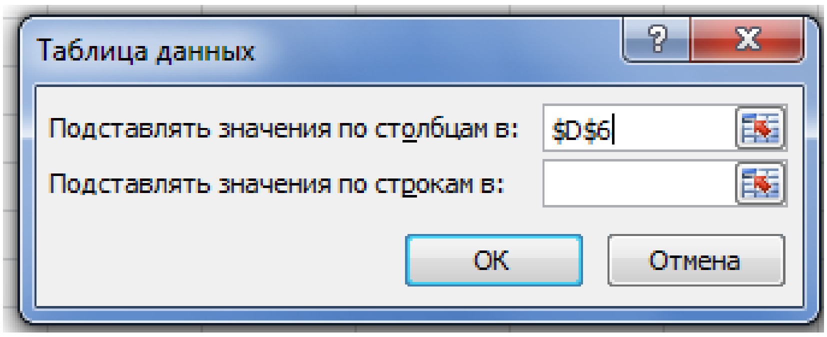
1.2. Внесем в ячейку B18 значение «20» и, удерживая клавишу Ctrl, распространим это значение в ячейки B18:L18.

1.3. Введем в ячейку A19 формулу =D13:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Задача.Таблица подстановки							
2	Исходные данные							
3	Наименование показателя	Еденицы	Условное	Значение				
4	Протяженность маршрута	км	Lm	10				
5	Число автобусов	-	A	8				
6	Техническая скорость	км/ч	Vm	25				
7	Число промежуточных остановок	-	Nno	20				
8	Время простоя на промежуточной остановке	с	tno	30				
9	Время простоя на конечной остановке	мин	tko	6				
10								
11	Решение				=2 * Lm / Vm+2*Nno*tno / 3600+2*tko /			
12	Время оборота	ч	tob	1,33				
13	Интервал движения	мин	I	10	= tob / A*60			

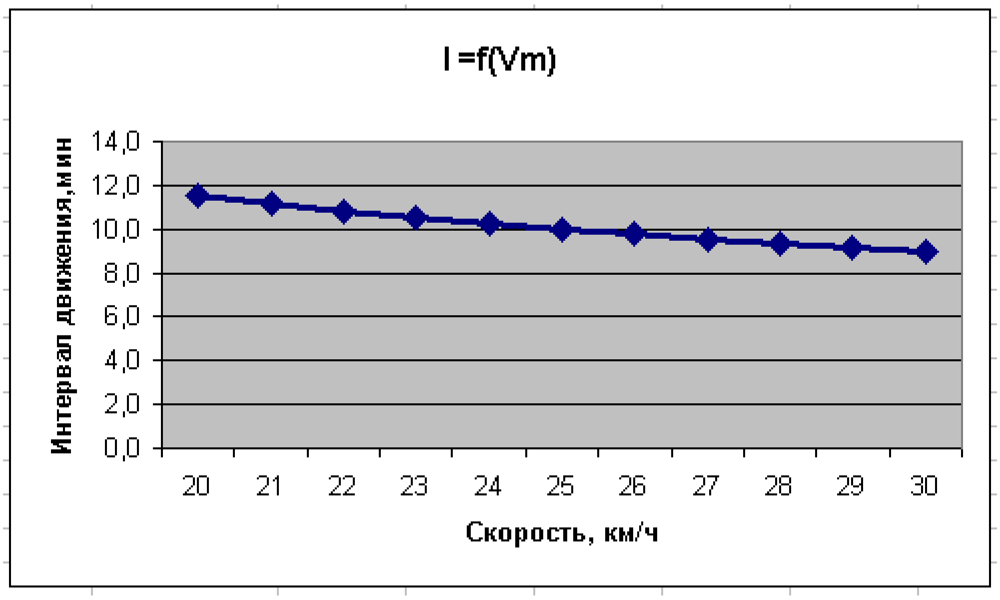
1.4. Выделим диапазон A18:L19. Выполним команду «Данные | Таблица данных» и укажем в поле «Подставлять значения по столбцам» «$D$6»:



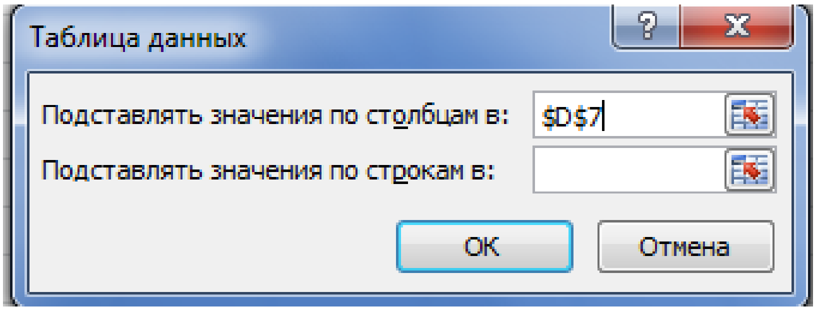
Будет создана таблица, отражающая зависимость интервала движения от технической скорости:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
15												
16	***Анализ данных***											
17	1. Зависимость интервала движения от технической скорости											
18		20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
19	10	11,5	11,1	10,8	10,5	10,3	10,0	9,8	9,6	9,4	9,2	9,0
20												

Построим график зависимости интервала движения автобусов от технической скорости:



2.1. Введем в ячейку B22 формулу =D13. В ячейку А23 введем значение «15» и, удерживая клавишу Ctrl, распространим его на диапазон А23:А332.2. Выделим диапазон А22:В33. Вызовем диалог «Таблица данных (подстановки)» и в поле «Подставлять значения по строкам» укажем адрес «$D$7»:



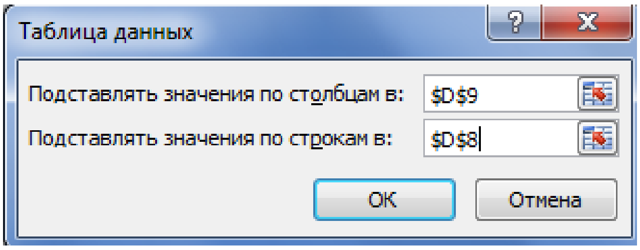
Будет создана вертикальная таблица, отражающая зависимость интервала движения автобусов от числа промежуточных остановок:

	A	B
21	2. Зависимость интервала движения от числа промежуточных остановок	
22	Число промежуточных остановок	10
23	15	9,4
24	16	9,5
25	17	9,6
26	18	9,8
27	19	9,9
28	20	10,0
29	21	10,1
30	22	10,3
31	23	10,4
32	24	10,5
33	25	10,6
34		

Построим график зависимости интервала движения автобусов от числа промежуточных остановок:

3.1. В ячейку D22 вносим формулу =D13. В ячейку E22 вносим число 3, а в F22 – число 3,5 и автокопируем их до ячейки Q22. В ячейку D23 вносим число 20, а в D24 – число 22 и автокопируем их до ячейки D33.

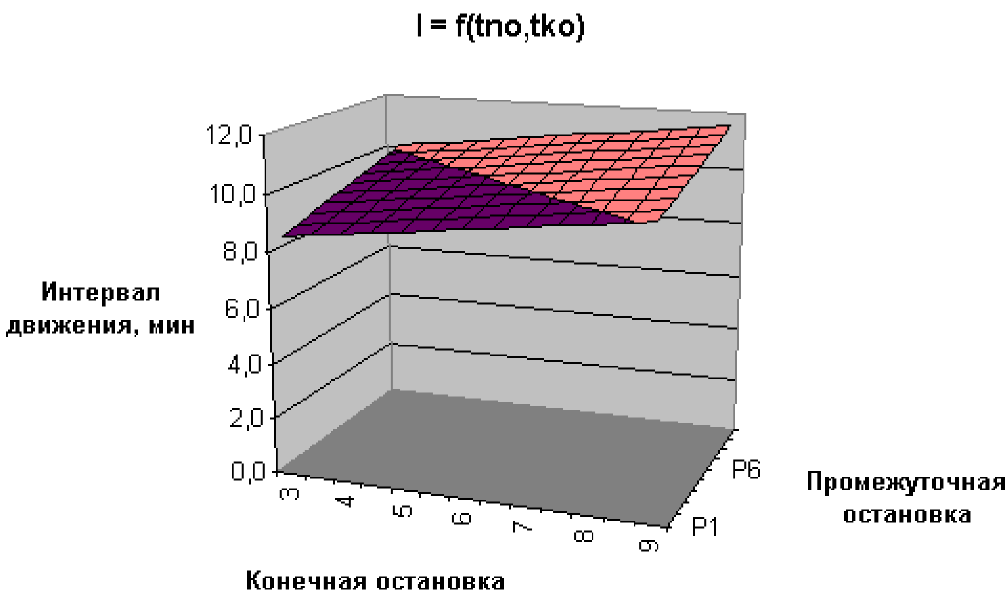
3.2. Выделим диапазон D22:Q33. Вызовем диалоговое окно «Таблица подстановки» и в поле «Подставлять значения по столбцам» укажем адрес $D$9, а в поле «Подставлять значения по строкам» – $D$8:



Будет создана таблица зависимости интервала движения автобусов от времени простоя на конечной и промежуточных остановках:

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
21	3. Зависимость интервала движения от времени простоя на конечной и промежуточных остановок													
22	10	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
23	20	8,4	8,5	8,7	8,8	8,9	9,0	9,2	9,3	9,4	9,5	9,7	9,8	9,9
24	22	8,6	8,7	8,8	9,0	9,1	9,2	9,3	9,5	9,6	9,7	9,8	10,0	10,1
25	24	8,8	8,9	9,0	9,1	9,3	9,4	9,5	9,6	9,8	9,9	10,0	10,1	10,3
26	26	8,9	9,0	9,2	9,3	9,4	9,5	9,7	9,8	9,9	10,0	10,2	10,3	10,4
27	28	9,1	9,2	9,3	9,5	9,6	9,7	9,8	10,0	10,1	10,2	10,3	10,5	10,6
28	30	9,3	9,4	9,5	9,6	9,8	9,9	10,0	10,1	10,3	10,4	10,5	10,6	10,8
29	32	9,4	9,5	9,7	9,8	9,9	10,0	10,2	10,3	10,4	10,5	10,7	10,8	10,9
30	34	9,6	9,7	9,8	10,0	10,1	10,2	10,3	10,5	10,6	10,7	10,8	11,0	11,1
31	36	9,8	9,9	10,0	10,1	10,3	10,4	10,5	10,6	10,8	10,9	11,0	11,1	11,3
32	38	9,9	10,0	10,2	10,3	10,4	10,5	10,7	10,8	10,9	11,0	11,2	11,3	11,4
33	40	10,1	10,2	10,3	10,5	10,6	10,7	10,8	11,0	11,1	11,2	11,3	11,5	11,6
34														

Построим поверхность зависимости интервала движения автобусов от числа промежуточных остановок. Для исходных данных это показано ниже:



Задание для самостоятельной работы

На радиальном маршруте протяженностью L_m = 20 км работают A = 6 автобусов.

Маршрут имеет следующие эксплуатационные показатели:

техническая скорость автобусов V_m = 30 км/ч;

число промежуточных остановок N_{no} = 18;

время простоя на промежуточной остановке t_{no} = 40 с;

время простоя на конечной остановке t_{ko} = 8 мин.

Исследовать зависимость (создать таблицы данных и представить графически) интервала (I) движения автобусов от показателей скорости, времени на остановках, типа автобусов, количества промежуточных остановок.

Вариант	Зависимость
1	скорости (от 20 до 40 км/ч); времени на остановках (от 30 до 60 с); числа автобусов (от 3 до 10) и скорости (от 25 до 40 км/ч)
2	времени на остановках (от 40 до 60 с); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 5 до 8) и времени на конечной остановке (от 5 до 10 мин)
3	времени на конечной остановке (от 3 до 10 мин); числа автобусов (от 4 до 6); скорости (от 30 до 45 км/ч) и времени на остановках (от 40 до 60 с)
4	скорости (от 30 до 40 км/ч); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 3 до 6) и количества промежуточных остановок (от 6 до 12)
5	скорости (от 25 до 45 км/ч); времени на остановках (от 40 до 60 с); числа автобусов (от 4 до 10) и скорости (от 25 до 40 км/ч)
6	времени на остановках (от 40 до 60 с); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 5 до 8) и времени на конечной остановке (от 5 до 10 мин)
7	времени на конечной остановке (от 3 до 10 мин); числа автобусов (от 4 до 6); скорости (от 30 до 45 км/ч) и времени на остановках (от 40 до 60 с)
8	скорости (от 30 до 40 км/ч); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 3 до 6) и количества промежуточных остановок (от 6 до 12)
9	скорости (от 20 до 40 км/ч); времени на остановках (от 30 до 60 с); числа автобусов (от 3 до 10) и скорости (от 25 до 40 км/ч)

Вариант	Зависимость
10	времени на остановках (от 40 до 60 с); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 5 до 8) и времени на конечной остановке (от 5 до 10 мин)
11	времени на конечной остановке (от 3 до 10 мин); числа автобусов (от 4 до 6); скорости (от 30 до 45 км/ч) и времени на остановках (от 40 до 60 с)
12	скорости (от 30 до 40 км/ч); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 3 до 6) и количества промежуточных остановок (от 6 до 12)
13	скорости (от 25 до 45 км/ч); времени на остановках (от 40 до 60 с); числа автобусов (от 4 до 10) и скорости (от 25 до 40 км/ч)
14	времени на остановках (от 40 до 60 с); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 5 до 8) и времени на конечной остановке (от 5 до 10 мин)
15	времени на конечной остановке (от 3 до 10 мин); числа автобусов (от 4 до 6); скорости (от 30 до 45 км/ч) и времени на остановках (от 40 до 60 с)
16	скорости (от 30 до 40 км/ч); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 3 до 6) и количества промежуточных остановок (от 6 до 12)
17	времени на остановках (от 40 до 60 с); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 5 до 8) и времени на конечной остановке (от 5 до 8 мин)
18	времени на конечной остановке (от 3 до 10 мин); числа автобусов (от 4 до 6); скорости (от 30 до 40 км/ч) и времени на остановках (от 60 до 120 с)
19	скорости (от 30 до 45 км/ч); времени на остановках (от 10 до 60 с); числа автобусов (от 4 до 10) и скорости (от 25 до 40 км/ч)
20	времени на остановках (от 40 до 60 с); количества промежуточных остановок (от 10 до 25); числа автобусов (от 5 до 8) и времени на конечной остановке (от 5 до 8 мин)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные методы решения прикладных задач широко используются в различных областях науки, техники, экономики, сельском хозяйстве, военном деле, медицине, геологии. Они востребованы в логистике, транспорте, социологии, биологии, химии, физике и др. Хотя многие варианты численных методов разработаны еще в прошлом веке, вопросы их развития и практического использования по-прежнему остаются актуальными. Реальные задачи и процессы допускают решения аналитически в явном виде в редких случаях. Обычно получить такое решение чрезвычайно трудно либо невозможно. В такой ситуации или упрощают задачу до вида, допускающего аналитическое решение, или решают ее численно. В настоящее время численные методы приобретают особую важность с внедрением во все сферы жизни новых цифровых технологий.

Сложные вычислительные задачи, возникающие при исследовании физических и технических проблем, можно разбить на ряд элементарных: вычисление интеграла, производной, решение нелинейного или дифференциального уравнения и т. п. Для таких задач разработаны методы численного решения, нередко имеются стандартные программы решения их на компьютере. Есть и достаточно сложные прикладные задачи, методы решения которых интенсивно разрабатываются.

Проблемы автоматизации проектирования технических устройств привлекают внимание все большего числа исследователей. Развитие численных методов и алгоритмов оптимального проектирования оказывает решающее влияние на особенности САПР и АСУ, внедряемых в НИИ, КБ, на предприятиях и в организациях. Численные методы применяются при проектировании промышленных установок для выбора наиболее экономичного варианта проекта, для анализа и прогнозирования развития процессов при эксплуатации оборудования, для оценки состояния оборудования при планировании объема, продолжительности и последовательности отдельных этапов ремонта технологических установок и т. д.

Главная особенность применения численных методов, которая все отчетливее проявляется в последние годы, связана с интенсификацией процессов использования различных специализированных математических пакетов и систем программирования, а также вычислительных методов как инструмента решения прикладных задач.

Численные методы как своеобразная предметная область, содержащая задачи для обучения алгоритмизации и программированию, составляют основу обучения IT-специалистов. Учебная дисциплина «Численные методы» способствует формированию общих и профессиональных компетенций, навыков использования вычислительных возможностей программы MS Excel. Выбор такого средства обусловлен прежде всего его доступностью и относительной простотой работы с ним.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные производные и правила дифференцирования

1. $C'=0$, где $C=const$.	8. $\left(e^x\right)'=e^x$
Пусть $u=u(x), v=v(x)$, тогда:	9. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$
2. $\left(Cu\right)'=Cu'$	10. $\left(\sin x\right)'=\cos x$
3. $\left(u+v\right)'=u'+v'$	11. $\left(\cos x\right)'=-\sin x$
4. $(u\cdot v)'=u'v+v'u$	12. $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	13. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$
	14. $\left(arctgx\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
6. Если $y=y\left(w\right), w=w\left(x\right)$, то $y'_x=y'_w\cdot w'_x$	15. $\left(arcctgx\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
	16. $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$	17. $\left(\arccos x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Основные интегралы и правила интегрирования

1. $\int Cf\left(x\right)dx=C\int f\left(x\right)dx$	5. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$
2. $\int\left[f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)\right]dx=$ $=\int f_1\left(x\right)dx+\int f_2\left(x\right)dx$	6. $\int e^n dx=e^x+C$
	7. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
	8. $\int\sin xdx=-\cos x+C$

3. Интегрирование по частям: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$	9. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 10. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$ 11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$
Если $x = x(t)$, то 4. $\int f(x) dx = \int f(x\lvert t) x'(t) dt$ – метод подстановки (замены переменной)	12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций

Функция $f(x)$	Ряд Маклорена	Область сходимости
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots$	$(-\infty, +\infty)$
$(1+x)^m$	$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots$	(–1, 1)
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$	(–1, 1]
$\mathrm{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2m-1} + \ldots$	(–1, 1)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф. Решение задач прикладной математики с применением табличного процесссора Excel: учебное пособие. Казань: Казанск. гос. архитект.-строит. ун-т, 2016. 136 с.
2. Балашов А.Н., Пиджакова Л.М., Шестакова М.А. Решение прикладных задач аналитическими и численными методами. Тверь: ТвГТУ, 2016. 160 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2006. 636 с.
4. Башкинова Е.В., Егорова Г.Ф., Заусаев А.А. Численные методы и их реализация в Microsoft Excel. Ч. 1.: лабораторный практикум по информатике. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с.
5. Башкинова Е.В., Егорова Г.Ф., Заусаев А.А. Численные методы и их реализация в Microsoft Excel. Ч. 2: лабораторный практикум по информатике. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с.
6. Бузин А.Ю. Компьютерное исследование математических моделей. Практикум на Excel и VBA: учебное пособие. М.: РУДН, 2014. 105 с.
7. Бурляев В.В. Численные методы в примерах на Excel: методическое пособие по дисциплине «Применение информационных технологий в химии и химической технологии». М.: МИТХТ, 1999. 63 с.
8. Бурова И.Г., Поникарова И.В. Практикум в MS Excel. Интерполяция. СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2021. 41 с.
9. Виноградов Г.П., Кирсанова Н.В. Визуальное программирование в MS Excel: учебное пособие. Тверь: ТвГТУ, 2022. 188 с.
10. Виноградов Ю.А., Медведев М.М. Метод численного дифференцирования экспериментальных зависимостей // Ученые записки ЦАГИ. 1979. Т. X. № 6. С. 133–143.

11. Воробьев Е.С., Воробьева В.Е. Численные методы и математическое моделирование. Основы численных методов и приемы построения математических моделей на их основе и эти решения в различных пакетах. Казань: КНИТУ, 2016. 105 с.
12. Гателюк О.В., Исмаилов Ш.К., Манюкова Н.В. Численные методы. М.: Юрайт, 2023. 140 с. URL: https: //www.urait.ru/bcode/452912 (дата обращения: 08.01.2021).
13. Гереева Т.Р. Учебное пособие по дисциплине «Численные методы». Махачкала, 2014. 110 с.
14. Горностай А.В., Михайлова Я.В. Решение инженерных задач в Excel и Mathcad: лабораторный практикум. Минск: БНТУ, 2020. 105 с.
15. Демидова О.Л. Нелинейные системы. Теория приближения функций в электронных таблицах. Практика вычислений в электронных таблицах: учебное пособие. М.: МАИ, 2021. 47 с.
16. Демидова О.Л., Малинина Н.Л. Решение систем линейных уравнений, алгебраических и трансцендентных уравнений в электронных таблицах: учебное пособие. М.: МАИ, 2017. 47 с.
17. Демидович Е.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с. URL: https://dwg.ru/dnl/5302 (дата обращения: 18.03.2023).
18. Дустова Ш.Б. Решение систем уравнения высшей степени при помощи программы Excel // Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72). С. 36–39.
19. Зенков А.В. Численные методы: учебное пособие. Екатеринбург: Урал. ун-т, 2016. 124 с.
20. Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П. О вычислении простых и кратных корней нелинейного уравнения // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 7. С. 57–64.

21. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование: учебное пособие. М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2023. 336 с.
22. Кувайскова Ю.Е. Численные методы: лабораторный практикум: учебное пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2014. 113 с.
23. Кузина В.В., Кошев А.Н. Вычислительная математика: учебное пособие. Пенза: ПГУАС, 2016. 172 с.
24. Кузьменко Е.А., Кривцова Н.И., Мойзес О.Е. Информатика. Численные методы решения прикладных задач: лабораторный практикум. Томск: ТПУ, 2012. 144 с.
25. Леонова Н.Л. Элементы численных методов в Excel: учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ. СПб.: СПбГТУРП, 2012. 47 с.
26. Ляшко М.А., Бекетова Е.А. Численные методы в Excel: учеб.-методич. пособие для студентов вузов. Балашов: Николаев, 2012. 240 с.
27. Малышева Т.А. Численные методы и компьютерное моделирование. Лабораторный практикум для нелинейных уравнений и их систем: учебно-методическое пособие. СПб.: Университет ИТМО: ИХиБТ, 2015. 37 с.
28. Митяков С.Н., Лапшин И.В., Листопад Е.Ф. Информатика: комплекс учебно-методических материалов. Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2006. 59 с.
29. Моисеев А.В. Основные методы вычислительной математики: компьютерный практикум: учебное пособие. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО КнАГТУ, 2012. 95 с.
30. Покровский В.В. Математические методы в бизнесе и менеджменте: учебное пособие. М.: Лаборатория знаний, 2020. 113 с.
31. Седакова В.И., Рочева И.Г. Решение нелинейных систем уравнений в классах с углубленным изучением математики // Современные проблемы науки и образования. 2007. № 5. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=548 (дата обращения: 29.01.2023).

32. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Численные методы, теория, алгоритмы, программы. Оренбург: ИПК ОГУ, 2008. 264 с.
33. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984. 190 с. URL: http://booksee.org/book/1339959 (дата обращения: 18.03.2023).
34. Трофимец Е.Н. Исследование систем нелинейных уравнений методом Ньютона в MS Excel // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). 2021. № 1 (37). С. 18–23.
35. Турчак Л.И. Основы численных методов: учебное пособие. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. 320 с.
36. Фомина Е.Е. Функции работы с матрицами. Решение систем линейных уравнений в MS Excel: учебно-методическое пособие. Тверь: ТвГТУ, 2017. 20 с.
37. Чхартишвили Г.С., Чхартишвили Л.П. Способ определения корней многочлена с действительными коэффициентами // Вестник МЭИ. 2010. № 4. С. 50–55.
38. Шадрина Н.И., Берман Н.Д. Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010: учебное пособие. Хабаровск: Тихоокеан. гос. ун-т, 2016. 101 с.
39. Шевченко Г.И., Куликова Т.А. Численные методы: учебное пособие. Ставрополь: СКФУ, 2016. URL: https://e.lanbook.com/book/155303 (дата обращения: 16.02.2023).
40. Эварт Т.Е., Троицкий А.В., Поздяев В.В. Численные методы решения инженерных задач: учебное пособие. Н. Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т. им. Р.Е. Алексеева, 2014. 110 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Антонина Валериановна Ганичева
Алексей Валерианович Ганичев

**Численные методы
высшей математики в MS Excel**

Учебное пособие

Редактор М.Б. Юдина
Корректор С.В. Борисов

Подписано в печать 10.05.2023		
Формат 60x84/16		Бумага писчая
Физ. печ. л. 9,5	Усл. печ. л. 8,84	Уч.-изд. л. 8,27
Тираж 50 экз.	Заказ № 23	С – 23

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22