МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.В. Ганичева, А.В. Ганичев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Монография

Тверь 2023

УДК 519.8
ББК 22.18

Рецензенты: профессор кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», доктор технических наук, профессор, академик РАЕН Попов П.Г.; заведующая кафедрой информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент Фомина Е.Е.

Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математические методы и модели учебного процесса: монография. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2023. 160 с.

Разработаны методы и модели оценки, планирования учебного процесса, организации мероприятий по повышению качества образования. Построенные модели проиллюстрированы числовыми примерами, таблицами и графиками.

Предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, магистров и студентов технических вузов.

ISBN 978-5-7995-1278-1

© Тверской государственный технический университет, 2023
© Ганичева А.В., Ганичев А.В., 2023

ВВЕДЕНИЕ

Монография содержит четыре главы.

В первой главе рассмотрены новые инновационные методики, методы и модели оценки учебного процесса в вузе. Проанализированы индексный и логический методы оценки качества обучения. Рассмотрены достоинства векторных оценок эффективности учебно-воспитательного процесса. Разработана векторная модель многокритериальной оценки. Показаны результаты практического применения разработанных методов. Для оценки качественных показателей учебного процесса предложено использовать специальные количественные оценки. В условиях цифровизации образования предлагается применять физические показатели учебного процесса, такие как работа, скорость, ускорение и т.д. Продемонстрировано, как простыми и наглядными методами строить траектории обучения студентов.

Во второй главе разработаны математические методы и модели мероприятий по повышению качества образования студентов вуза. Построены модели резерва и управления резервом оценок в учебном процессе для дискретного (разностная модель) и непрерывного (дифференциальная модель) случаев. Обучаемый (группа или группы обучаемых) рассматривается с позиций системного анализа. Процесс получения и усвоения знаний представляется как управляемый марковский процесс. Разработаны алгоритмы оптимального управления резервом оценок. Приведены модели развития учебного процесса (модель динамики качества обучения и модель поиска равновесного значения показателя качества). На основе теории массового обслуживания разработана модель получения и усвоения знаний. Приведена схема разработанного алгоритма управления усвоением знаний путем освоения не понятой ранее терминологии. Рассмотрен вопрос возможности изучения этих понятий в заданные сроки. Исследована зависимость времени усвоения материала от интенсивности образовательного процесса. Показано, как оценить результативность проводимых мероприятий через обеспечение нужного состояния системы. Методика проведения расчетов вероятностей состояний образовательной системы продемонстрирована на конкретном числовом примере.

Разобраны метод расчета характеристик эффективности образовательной системы и модель системной динамики процесса обучения на основе системы дифференциальных уравнений.

В третьей главе рассмотрены модели формирования компетенций в учебном процессе. Предложен метод сетевого планирования и управления формированием компетенций и компетентности обучаемых, в том числе для нечеткой информации. Выполнено математическое моделирование составляющих учебного процесса, показан способ определения оптимальных модулей учебной дисциплины. Приведены разные методы и модели оценки уровня усвоения учебных компетенций: с помощью экспертной системы, а также методов оптимальной реализации компетенций (анализом схем из функциональных элементов, поиском кратчайшего пути на графе, использованием минимальных нечетких внешне устойчивых множеств). Разработана НС-грамматика формирования компетенций для случаев четкой и нечеткой информации об учебном процессе.

В четвертой главе предложены модели планирования учебного процесса. Построена математическая модель оценки качества учебно-тематического плана. Введен специальный показатель – коэффициент качества учебно-тематического плана. Приведен конкретный числовой пример его расчета. Разработана эконометрическая модель менеджмента качества учебных планов на основе показателей:

а) коэффициента интереса обучаемых;
б) числа часов, отводимых на дисциплину;
в) коэффициента интеллекта обучаемых;
г) дисциплинарного коэффициента;
д) коэффициента трудолюбия обучаемых;
е) коэффициента компетентности преподавателей;
ж) коэффициента сложности дисциплины.

Доказана теорема максимизации линейной целевой функции при небесконечных ограничениях на переменные.

Разработан метод оптимального решения организационных вопросов, выполнена оценка полезности этого решения. Рассмотрен вопрос декомпозиции глобальной задачи на подзадачи с целью распределения имеющихся сил (средств, ресурсов) для решения этих подзадач таким образом, чтобы был достигнут общий максимальный эффект.

Авторы выражают большую признательность рецензентам Павлу Георгиевичу Попову и Елене Евгеньевне Фоминой.

ГЛАВА 1
СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДИКИ, МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ОЦЕНКИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

§ 1.1. Индексный метод менеджмента учебного процесса

Актуальными задачами оценки эффективности учебного процесса являются задачи составления и анализа структурной схемы изучения дисциплин, а также определения влияния составляющих фрагментов дисциплины на показатели качества. Можно рассматривать эти фрагменты, параграфы, темы и дисциплины в целом, обучение и успеваемость по отдельным дисциплинам и группам дисциплин и т.д. Все это будем называть объектами исследования и обозначать как о.и. В статистике, социологии широко используется индексный метод [52, 58, 65]. Рассмотрим модификацию данного метода применительно к учебному процессу в условиях определенности и неопределенности. Такой метод обоснования решений впервые применяется в учебном процессе.

Индексом называется относительный показатель, характеризующий изменение какого-либо явления, состоящего из соизмеримых элементов, во времени, пространстве или по сравнению с любым эталоном. Введем понятие структурного индекса как инструмента классификации, сравнения и измерения, конструируемого на основе логического и аналитического комбинирования эмпирических индикаторов. Будем различать **структурно-метрические индексы** и **индексы состава.** Речь обо всех этих индексах пойдет ниже.

Количественная обработка исходных матриц в разработанном методе помогает в выявлении ведущих категорий, тем, параграфов, дисциплин и так далее с точки зрения их важности для изучения других тем, параграфов, дисциплин и прочего, формирования основополагающих категорий, тем и тому подобного, в оценке их «микроклимата», т.е. в выработке обоснованной схемы изучения дисциплин согласно отношению связанности. Связанность о.и. X с о.и. Y заключается в отсутствии негативного результата при предшествующем изучению Y освоении о.и. X или параллельном изучении о.и. X и Y. Можно рассмотреть случаи:

1) позитивной связанности X с Y, когда предшествующее или параллельное изучение X положительно влияет на изучение Y;

2) нейтральной связанности X с Y, при которой предшествующее или параллельное изучение X никак не сказывается на изучении Y;

3) негативной связанности (несвязанности) X с Y, когда предшествующее или параллельное изучение X отрицательно действует (сказывается) на изучении Y.

Введенное отношение связанности является рефлексивным и транзитивным отношением $X\ R\ Y$. Рефлексивность для рассматриваемого примера означает, что любая тема X из рассматриваемого множества тем связана сама с собой, что очевидно. Транзитивность подразумевает следующее: для любых тем X, Y и Z характерна связанность X и Z (отсутствие негативного результата при предшествующем или параллельном изучении X по отношению к изучению Z) вследствие того, что тема X связана с темой Y (отсутствует негативный результат при предшествующем или параллельном изучении темы X по отношению к изучению темы Y), а тема Y – с темой Z (изучение темы Y может предшествовать изучению темы Z (не вызывает негативных последствий) либо эти темы могут изучаться параллельно).

Пример связанности о.и. друг с другом показан ниже:

	С кем связан						Всего		
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	+	–	±
X_1	*	–	–				0	2	2
X_2	+	*	–				1	1	2
X_3	+	+	*				2	0	2
X_4				*	–	–	0	2	2
X_5				+	*	–	1	1	2
X_6		+		+	+	*	3	0	3
+	2	2	0	2	2	0	7		
–	0	1	2	0	0	2		6	
±	2	3	2	2	2	2			13

В этом примере рассмотрена связанность следующих тем курса высшей математики: X_1 – «Матрицы и определители»; X_2 – «Решение систем линейных уравнений»; X_3 – «Векторная алгебра»; X_4 – «Пределы»; X_5 – «Производная функции одной переменной и ее применение»; X_6 – «Неопределенный и определенный интеграл». Знак «+» («–») в столбце j ($j=\overline{1,6}$) означает, что X_j позитивно связана (не связана) с X_i $(i=\overline{1,6})$, рефлексивное отношение связанности X_i с X_i обозначено как «*», а пустая клетка (i, j) соответствует безразличному отношению (нейтральной связанности) X_j и X_i.

Результаты предварительной обработки по строкам позволяют оценить **структурный статус** членов группы, а по столбцам – их **структурную экспансию.** Так, в рассмотренном примере самый низкий показатель позитивной связанности у членов группы с о.и. X_1 (с темой «Матрицы и определители») и с о.и. X_4 (с темой «Пределы»). Выводы об этих характеристиках можно сделать, исходя из чисел, приведенных выше, но более действенным будет использование структурно-метрических индексов, которые подразделяются на персональные и групповые (первые, в свою очередь, на индексы структурного статуса и индексы структурной экспансии). Групповые структурные индексы объединяют групповые индексы связанности, положительной связанности, согласованности.

Рассмотрим введенные индексы подробнее. Через ν_i^+ будем обозначать суммарный положительный показатель связанности с i-м о.и. остальных членов; ν_i^- – суммарный показатель несвязанности с i-м о.и. остальных членов; ν_i^0 – показатель нейтральной связанности с i-м о.и. других членов (будем называть его нулевым показателем).

Индексы структурного положительного, отрицательного и нулевого статуса i-го о.и. (из общего числа N) оцениваются как отношения C_i^+, C_i^-, C_i^0 числа положительных ν_i^+, отрицательных ν_i^- и нулевых ν_i^0 соответственно показателей связанности членов группы с i-м о.и. к числу выборов $N-1$:

$$C_i^+ = \nu_i^+ \big/ (N-1);\ C_i^- = \nu_i^- \big/ (N-1);\ C_i^0 = \nu_i^0 \big/ (N-1). \tag{1.1.1}$$

Данные индексы характеризуют соответственно степени позитивного, негативного и нейтрального отношения группы о.и. к i-му о.и. Степень преобладания позитива или негатива в этом отношении описывает индекс C_i^{+-}:

$$C_i^{+-} = C_i^+ - C_i^- = \left(\nu_i^+ - \nu_i^-\right) \big/ (N-1). \tag{1.1.2}$$

Аналогично степень преобладания позитива или безразличия и негатива или безразличия характеризуется соответственно индексами

$$C_i^{+0} = C_i^+ - C_i^0 \ \text{ и } \ C_i^{0-} = C_i^0 - C_i^-. \tag{1.1.3}$$

Индекс общего структурного статуса C_i характеризует степень небезразличия группы о.и. по отношению к i-му о.и., т.е. степень позитивной связанности или несвязанности с ним:

$$C_i = C_i^+ + C_i^- = \left(\nu_i^+ + \nu_i^-\right) \big/ (N-1). \tag{1.1.4}$$

По аналогии с индексами структурного статуса могут использоваться индексы структурной экспансии (активности) $Э_i^+$, $Э_i^-$, $Э_i^{+-}$, $Э^{+0}$, $Э^{-0}$, $Э_i$, характеризующие соответственно положительную, отрицательную, безразличную, преобладающую (см. формулы (1.1.6)–(1.1.8)) и общую активность (см. формулу (1.1.9)) i-го о.и. по выражению его отношения к остальным представителям группы. Расчет индексов структурной экспансии производится по формулам:

$$Э_i^+ = \mu_i^+ \big/ (N-1);\ Э_i^- = \mu_i^- \big/ (N-1);\ Э_i^0 = \mu_i^0 \big/ (N-1); \tag{1.1.5}$$

$$Э_i^{+-} = Э_i^+ - Э_i^- = \left(\mu_i^+ - \mu_i^-\right) \Big/ \left(N-1\right); \qquad (1.1.6)$$

$$Э_i^{+0} = Э_i^+ - Э_i^0 = \left(\mu_i^+ - \mu_i^0\right) \Big/ \left(N-1\right); \qquad (1.1.7)$$

$$Э_i^{0-} = Э_i^0 - Э_i^- = \left(\mu_i^0 - \mu_i^-\right) \Big/ \left(N-1\right); \qquad (1.1.8)$$

$$Э_i = Э_i^+ + Э_i^- = \left(\mu_i^+ + \mu_i^-\right) \Big/ \left(N-1\right), \qquad (1.1.9)$$

где μ_i^+, μ_i^- и μ_i^0 – число позитивной связанности, несвязанности и безразличия i-го о.и. к представителям группы соответственно.

Из формул (1.1.5)–(1.1.9) следует, что рассмотренные индексы представляют собой относительные частоты тех или иных выборов.

В табл. 1.1.1 представлены результаты расчета персональных структурных индексов по данным, приведенным в примере связанности о.и. друг с другом на с. 6.

Таблица 1.1.1

О.и.	Индексы структурного статуса							Индексы структурной экспансии						
	C_i^+	C_i^-	C_i^0	C_i^{+-}	C_i^{+0}	C_i^{0-}	C_i	$Э_i^+$	$Э_i^-$	$Э_i^0$	$Э_i^{+-}$	$Э_i^{+0}$	$Э_i^{0-}$	$Э_i$
X_1	0	0,4	0,6	–0,4	–0,6	0,2	0,4	0,4	0	0,6	0,4	–0,2	0,6	0,4
X_2	0,2	0,2	0,6	0	0	0,4	0,4	0,4	0,2	0,4	0,2	0	0,2	0,6
X_3	0,4	0	0,6	0,4	–0,2	0,6	0,4	0	0,4	0,6	–0,4	–0,6	0,2	0,4
X_4	0	0,4	0,6	–0,4	–0,6	0,2	0,4	0,4	0	0,6	0,4	–0,2	0,6	0,4
X_5	0,2	0,2	0,6	0	–0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,6	0	–0,4	0,4	0,4
X_6	0,6	0	0,2	0,6	0,4	0,2	0,6	0	0,4	0,6	–0,4	–0,6	0,2	0,4

Из анализа табл. 1.1.1 следует:

1) X_6 («Неопределенный и определенный интеграл») – признанный лидер по положительной связанности с ним других о.и. (максимальный положительный индекс C_i^+);

2) X_1 («Матрица и определители»), X_4 («Пределы») – «изгои», так как с ними не связаны многие члены группы (максимальный отрицательный индекс $C_i^- = 0{,}4$);

3) X_6 («Неопределенный и определенный интеграл») – индекс, который имеет максимальный индекс C_i, т.е. наибольшую степень небезразличия к этой теме других о.и.;

4) X_2 («Решение систем линейных уравнений») – индекс, который сильнее всего влияет на другие (максимальный индекс $Э_i$);

5) X_1 («Матрицы и определители»), X_2 («Решение систем линейных уравнений») и X_4 («Пределы») – индексы, которые имеют наибольшую положительную связь с другими (максимальный положительный индекс $Э_i^+$);

6) эта группа недостаточно устойчива, так как есть отрицательные индексы $Э_3^{+-}$, $Э_6^{+-}$, что говорит о преобладании негатива в отношении X_3 («Векторная алгебра») и X_6 («Неопределенный и определенный интеграл») к остальным членам.

Групповой индекс связанности $Г_C$ характеризует степень небезразличного отношения представителей группы друг к другу. Количественно он определяется как отношение суммарного числа показателей позитивной связанности и несвязанности $S = \sum_{i=1}^{N}(\nu_i^+ + \nu_i^-)$ к потенциальному числу выборов $N(N-1)$:

$$Г_C = S \big/ \left[N(N-1)\right],$$

где $N(N-1)$ получено как число элементов матрицы N^2 минус число диагональных элементов N.

Из формул (1.1.3), (1.1.4) и (1.1.7) следует, что индекс $Г_C$ представляет собой среднее арифметическое общих индексов C_i или $Э_i$, $i=\overline{1,N}$:

$$Г_C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Э_i. \qquad (1.1.10)$$

Групповой индекс положительной связанности $Г_B$ характеризует степень позитивного отношения членов группы друг к другу. Количественно он определяется как отношение суммарного числа положительных показателей ν_i^+ к потенциальному числу выборов $N(N-1)$:

$$Г_B = \sum_{i=1}^{N} \nu_i^+ \Big/ \left[N(N-1)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i^+. \qquad (1.1.11)$$

Групповой индекс положительной согласованности $Г_y$ – частный случай индекса положительной связанности. Количественно индекс $Г_y$ отличается от индекса $Г_B$ тем, что в знаменателе вместо потенциального числа выборов стоит общая сумма S положительных и отрицательных показателей:

$$Г_y = \sum_{i=1}^{N} \nu_i^+ / S = Г_B / Г_C.$$

Число $1 - Г_y \geq 0$ характеризует ситуацию наличия негативной связанности. В нашем примере имеем:

$$N = 6;\ S = 13;\ \sum_{i=1}^{6} \nu_i^+ = 7;\ \sum_{i=1}^{6} \nu_i^- = 6;$$

$$Г_C = 13/30 = 0{,}43;\ Г_B = 7/30 = 0{,}23;\ Г_y = 7/13 = 0{,}54.$$

Аналогичный результат можно получить и на основе данных из табл. 1.1.1 с учетом формул (1.1.10) и (1.1.11) соответственно:

$$Г_B = (0 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0 + 0{,}2 + 0{,}6)/6 = 0{,}23.$$

Таким образом, исследуемая группа связана примерно на 43 % ($Г_С$ = 0,43), т.е. существует приблизительно 43 % возможных связей (влияний), положительных или отрицательных, между членами группы. В остальных случаях безразличен порядок следования дисциплин. Степень позитивного отношения членов группы (примем, что абсолютно хорошее, лояльное отношение друг к другу – это 100 %) составляет 23 %, т.е. среди 30 возможных связей между дисциплинами X_i и X_j ($i, j = \overline{1,6}$, $i \neq j$) 23 % (7 связей) таковы, что предшествующее им параллельное изучение положительно влияет на изучение X_i. Из 13 связей 54 % (7 связей) являются позитивными, 46 % (6 связей) – негативными.

Конечно, когда речь идет об одновременном изучении нескольких дисциплин, связанность одних и тех же тем при различных ситуациях изменяется порой от позитивной до негативной, т.е. налицо условия неопределенности. Поэтому в общем случае целесообразно говорить о статистической вероятности связанности X_j с X_i, которая определяется из статистических данных. Будем использовать для нее обозначения: $P^+(i, j)$ – для позитивной связанности X_j с X_i; $P^-(i, j)$ – для негативной; $P^0(i, j)$ – для нейтральной. Каждому о.и. X_j при фиксированном i ставится в соответствие вектор (X_j^+, X_j, X_j^0), у которого $X_j^+ = 1$, если X_j позитивно связан с X_i, и $X_j^+ = 0$, если это не так; $X_j^- = 1$, если X_j негативно связан с X_i, в противном случае $X_j^- = 0$; $X_j^0 = 1$, если X_j нейтрально связан с X_i, в противном случае $X_j^0 = 0$. В табл. 1.1.1 каждой клетке (i, j) соответствует вектор вероятностей ($P^+(i, j)$, $P^-(i, j)$, $P^0(i, j)$), при этом $P^+(i, j) + P^-(i, j) +$ $+ P^0(i, j) = 1$.

Соответствующие индексы структурного статуса и структурной экспансии будем обозначать знаком «~» сверху и определять по формулам, аналогичным формулам (1.1.1)–(1.1.9), но без знаменателя и с той разницей, что вместо ν_i^+, ν_i^-, ν_i^0 стоят соответственно суммы вероятностей $P^+(i, j)$, $P^-(i, j)$, $P^0(i, j)$ по строкам, а вместо μ_i^+, μ_i^-, μ_i^0 – соответствующие суммы по столбцам. Например, пусть для некоторого о.и. (это может быть, например, какая-либо тема курса «Математика»), взаимодействующего с пятью другими о.и. (например, некоторыми темами дисциплин «Статистика», «Физика», «Менеджмент», «Экономика», «Безопасность жизнедеятельности»), $P^+(1, 1) = 1$; $P^+(1, 2) = 0{,}4$; $P^-(1, 2) =$ $= 0{,}6$; $P^+(1, 3) = 0{,}7$; $P^0(1, 3) = 0{,}3$; $P^+(1, 4) = 0{,}5$; $P^-(1, 4) = 0{,}5$; $P^-(1, 5) = 0{,}8$; $P^0(1, 5) = 0{,}2$; $P^0(1, 6) = 0{,}9$; $P^+(1, 6) = 0{,}1$.

Для каждой пары (X_j, X_i), характеризующей позитивную связанность X_j с X_i, можно определить риск и полезность введенного отношения связанности, а именно, полезность равна математическому ожиданию числа знаков «+» в клетке (i, j), т.е. вероятности $P^+(i, j)$. Риск равен корню квадратному из дисперсии числа знаков «+», т.е. будет

$$(P^+(i, j)(1 - P^+(i, j)))^{1/2}.$$

Показатели структурного статуса запишем соответственно в виде

$$\tilde{C}_1^{+} = 0,4 + 0,7 + 0,5 + 0,1 = 1,7;\ \tilde{C}_1^{-} = 0,6 + 0,5 + 0,8 = 1,9;$$

$$\tilde{C}_1^{0} = 0,3 + 0,2 + 0,9 = 1,4;\ \tilde{C}_1^{+-} = 1,7 - 1,9 = -0,2;\ \tilde{C}_1^{+0} = 1,7 - 1,4 = 0,3;$$

$$\tilde{C}_1^{-0} = 1,9 - 1,4 = 0,5;\ \tilde{C}_1 = 1,7 + 1,9 = 3,6.$$

Как нетрудно видеть, индексы $\tilde{C}_i^{+}$, $\tilde{C}_i^{-}$, $\tilde{C}_i^{0}$ ($\tilde{Э}_i^{+}$, $\tilde{Э}_i^{-}$, $\tilde{Э}_i^{0}$) играют роль средних арифметических числа, следовательно, позитивной, негативной и нейтральной связанности с X_i (X_i с остальными). Групповой индекс связанности определяется в этом случае как сумма средних значений индексов структурного положительного и отрицательного статуса по всем $i = \overline{1,N}$. Групповой индекс положительной связанности $\tilde{Г}_B$ совпадает со средним арифметическим индексов структурного положительного статуса по всем $i = \overline{1,N}$, групповой индекс положительной согласованности $\tilde{Г}_y$ представляет собой частное $\tilde{Г}_B / \tilde{Г}_C$.

Рассмотрено применение индексного метода на примере отношения связанности. Аналогично могут быть разобраны и другие отношения, возникающие в учебном процессе.

Аналитические индексы состава находим так же, как и экономические.

Главная задача учебного процесса заключается в разностороннем развитии специалистов. Прежде всего эта задача связана с нормативными показателями формирования специалиста, что определяется структурой (требующимися компонентами) и соответствующими показателями учебного процесса, в частности преподавания и усвоения учебных дисциплин. Балльную оценку показателя (компоненты) будем называть **объемом данного показателя (компоненты)** в о.и. Так, если о.и. – это изучаемая дисциплина, состоящая из данного числа тем, то тема – это компонента данной дисциплины. В качестве объема каждой компоненты можно рассматривать, допустим, число ключевых понятий (формул) данной темы, число параграфов, пунктов, количество страниц или время, отводимое на ее изучение, в качестве показателей качества изучения данной дисциплины – средний балл за контрольные работы, средний балл по результатам аттестации или тестирования, средний балл, полученный на зачете или экзамене. В то же время каждый из этих показателей (компонент) имеет вес.

Вес – характеристика значимости единицы объема данного показателя или компоненты. Под значимостью понимается степень влияния показателей (компонент) на о.и., оцениваемая по интервальной шкале. Вес является аналогом цены для экономических индексов, устанавливается на основе статистических данных (это либо безразмерная, либо балльная величина, составленная на базе приоритетов). Весом можно считать полезность единицы объема данного показателя (или компонент) для рассматриваемого о.и. Например, вес темы данной дисциплины определяется через коэффициент значимости темы, связанный с ее использованием при изучении других тем, в будущей профессиональной деятельности, для развития логического мышления, пространственного воображения, повышения уровня заинтересованности учащихся в получении знаний.

Если речь идет о средних баллах за контрольные мероприятия, то вес балла обусловливается его значимостью в системе балльных оценок качества обучения. Так, согласно существующим приоритетам, основная балльная оценка – это экзаменационная, следующая по значимости – оценка по тестированию и по аттестации, затем располагаются оценки за контрольные работы (эти оценки тоже могут быть проранжированы).

Если в качестве о.и. рассматривается средний балл по данной дисциплине, то он зависит от коэффициента компетентности преподавателя, коэффициентов интереса и интеллекта обучаемых, коэффициента трудолюбия студентов, процента посещаемости, коэффициента сложности дисциплины, процента часов, отводимых на изучение данной дисциплины. Веса перечисленных коэффициентов определяются степенью влияния их на средний балл успеваемости. Степень влияния находят, например, через стандартизованные коэффициенты регрессии либо коэффициенты эластичности [27, 56]. При рассмотрении в качестве о.и. процесса обучения по данной дисциплине его показателями можно считать все перечисленные коэффициенты, включая средний балл, значимость которых в этом случае можно установить в ходе опроса экспертов.

Если о.и. – процесс изучения данной системы дисциплин, то каждую дисциплину можно рассматривать как портфель тем, образующих эту дисциплину [16]. Тогда объем дисциплины можно оценить через количество часов, отводимых на ее изучение, а вес характеризуется полезностью или доходностью портфеля.

Важность показателя (компоненты) будем определять как произведение его объема на вес. Так, если объем данной темы составляет 24 ключевых понятия, а вес, согласно экспертной оценке, равен 0,9 балла за одно ключевое понятие, то важность данной темы будет $24 \cdot 0{,}9 = 21{,}6$ балла.

Индексы состава в учебном процессе можно разделить по охвату элементов совокупности на индивидуальные и общие, по способу построения – на количественные, качественные и средние.

Индивидуальные индексы объема $i_q = q_1 / q_0$ характеризуют отношение объема данного показателя (компоненты) в о.и. в текущем и базисном периодах. **Индивидуальные индексы веса** $i_p = p_1 / p_0$ представляют собой отношение веса единицы показателя в текущем и базисном периодах. **Индивидуальные индексы важности показателя** (компоненты) определяются как отношение $i_{qp} = q_1p_1 / q_0p_0$. **Общие**

индексы I_{qp} дают относительную оценку изменения явления по всей разносоставной совокупности и представляют собой отношение суммарных важностей различных показателей (компонент) в текущем и базисном периодах.

Количественные индексы (для одного фактора) – отношение суммарной важности при фиксированном значении веса, качественные индексы (для одного фактора) – отношение суммарной важности при фиксированном объеме. Для двух факторов эти индексы совпадают с общими.

Средний арифметический индекс находим по формуле

$$I_q = \sum_{j=1}^{n} i_q^j q_0^j p_0^j \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} q_0^j p_0^j ,$$

где n – число компонент (показателей) в данном о.и.

Рассмотрим **пример**. При определении эффективности учебного процесса в группе были оценены средний балл успеваемости, процент посещаемости и процент студентов, участвующих в научно-исследовательский работе (НИР).

Соответствующие средние статистические объемы и веса приведены во втором и третьем столбцах табл. 1.1.2. В четвертом и пятом столбцах отражена важность показателей в базисном периоде и их варьирование в текущем периоде. Следует определить, на сколько процентов изменилась важность совокупности данных показателей.

Таблица 1.1.2

Показатели успеваемости	Объем q_0^j	Вес p_0^j	Важность показателя в базисном периоде $q_0^j p_0^j$	Изменение важности показателя в текущем периоде i_q^j
Средний балл успеваемости	0,7	0,9	0,63	+15 %
Доля посещений занятий	0,85	0,8	0,68	–8 %
Доля студентов, участвующих в НИР	0,25	0,6	0,15	Без изменения

Вычислим I_q: $I_q = \dfrac{0,63 \cdot 1,15 + 0,68 \cdot 0,92 + 0,15}{0,63 + 0,68 + 0,15}$ = 1,027, или 102,7 %, т.е. важность увеличилась на 2,7 %.

Можно привести и другие примеры применения индексного метода в учебном процессе. Научная значимость предложенного метода заключается в том, что он дает возможность количественно оценивать качественные показатели и отношения, сравнивать и объединять разнородные совокупности показателей в учебном процессе, оценивать и сопоставлять связанность учебных вопросов, тем, дисциплин для выработки решений в условиях определенности и неопределенности.

§ 1.2. Индексный анализ структурных компонент и показателей качества учебного процесса

Учебный процесс – это процесс, протекающий в образовательной система данного учебного заведения или совокупности учебных заведений, определяемый его структурой, т.е. определенными и связанными друг с другом компонентами учебного процесса. Структурные компоненты будем подразделять на информационные, связанные с получением знаний, и оценочные, входящие в систему контрольных мероприятий по оценке полученных знаний [10]. Так, темы дисциплины представляют собой ее информационные компоненты. Иными словами, дисциплины – это информационные компоненты учебно-тематического плана. Системы контрольных мероприятий образуют оценочные компоненты. К показателям качества учебного процесса относятся, например, средний балл успеваемости, процент посещаемости учебных занятий, процент участвующих в НИР и т.п.

Каждая компонента (показатель) имеет, во-первых, объем, во-вторых, вес. Под **объемом компоненты** понимается число ее составляющих (единиц). Так, объемом данного раздела можно считать число ключевых понятий; количество тем; число параграфов (пунктов); время, отводимое на его изучение. Объемом контрольного мероприятия (к примеру, контрольной работы) можно считать число задач в ней. Объем теста – это количество либо заданий, либо дидактических единиц. Объем показателя качества учебного процесса равен его значению по данной шкале измерений.

Вес – это характеристика значимости единицы объема данной компоненты (данного показателя). Значимость определяется как степень влияния данной компоненты (данного показателя) на объект исследования и вычисляется либо как средняя арифметическая взвешенная статистических данных опроса респондентов, либо на основе полезности единицы объема данной компоненты (данного показателя). Так, весом раздела дисциплины может выступать как средняя арифметическая взвешенная весов или составляющих его тем, или обусловливающих этот раздел дидактических единиц. Важность совокупности компонент (показателей) равна сумме важности данных компонент (показателей).

Рассмотрим средний гармонический индекс, индексы переменного состава, постоянного состава и структурных сдвигов применительно к учебному процессу. Нужные для расчета формулы аналогичны формулам для вычисления экономических индексов.

Средний гармонический индекс I_p служит для расчета сводных индексов качественных показателей (компонент) и находится по формуле

$$I_p = \sum_{j=1}^{n} p_1^j q_1^j \Big/ \sum_{j=1}^{n} \frac{p_1^j q_1^j}{i_p^j}, \tag{1.2.1}$$

где $i_p^j = p_1^j \big/ p_0^j \quad (j = \overline{1,n})$ – индивидуальный индекс веса j-го показателя (j-й компоненты), представляющий собой отношение веса единицы одноименных показателей (компонент) в текущем периоде к соответствующему весу в базисном периоде; n – общее число рассматриваемых показателей и компонент; q_1^j – объем j-го показателя (j-й компоненты) в текущем периоде.

Индекс переменного состава $I_{\text{перем.сост}}$ зависит от изменения веса и объема показателей (компонент) рассматриваемого множества. Для вычисления данного индекса используется формула

$$I_{\text{перем.сост}} = \left(\sum_{j=1}^{n} p_1^j q_1^j \Big/ \sum_{j=1}^{n} q_1^j \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} p_0^j q_0^j \Big/ \sum_{j=1}^{n} q_0^j \right). \tag{1.2.2}$$

В формуле (1.2.2) q_0^j обозначает объем j-го показателя (j-й компоненты) в базисном периоде, остальные обозначения те же, что и в формуле (1.2.1).

Для определения влияния веса на индекс переменного состава вводится **индекс постоянного состава**, вычисляемый по формуле

$$I_{\text{пост.сост}} = \left(\sum_{j=1}^{n} p_1^j q_1^j \Big/ \sum_{j=1}^{n} q_1^j \right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{n} p_0^j q_1^j \Big/ \sum_{j=1}^{n} q_1^j \right). \tag{1.2.3}$$

Влияние объема на индекс переменного состава характеризуется индексом $I_{\text{стр.сдв}}$ структурных сдвигов, который находят по формуле

$$I_{\text{стр.сдв}} = I_{\text{перем.сост}} \,/\, I_{\text{пост.сост}}. \tag{1.2.4}$$

Рассмотрим типовые задачи на применение индексного метода для принятия решений в учебном процессе.

Задача 1.2.1. Данные относительно важности двух множеств компонент (информационных и оценочных) и двух показателей качества учебного процесса (среднего балла и процента посещаемости) в первом полугодии по данной дисциплине в данной группе представлены в табл. 1.2.1. В третьем столбце указаны изменения весов, рассматриваемые как средние значения по каждой совокупности и вычисляемые на основе статистических данных опроса.

Таблица 1.2.1

Компоненты и показатели	Важность компонент и показателей в первом полугодии	Изменение веса во втором полугодии по сравнению с первым, %
Совокупность тем	160	+6
Совокупность контрольных мероприятий	18,44	–2
Средний балл на экзамене	0,75	–5
Средняя посещаемость	0,71	+4

Важность совокупности тем (контрольных мероприятий) определялась как сумма важностей слагаемых, а важность каждого слагаемого считалась равной произведению веса на трудоемкость, т.е. на общее количество отводимых на данное слагаемое часов.

Требуется проанализировать, на сколько процентов изменился вес совокупности указанных информационных и оценочных компонент, а также показателей качества учебного процесса во втором полугодии по сравнению с первым.

Будем считать первое полугодие базисным периодом, второе – отчетным. Воспользуемся формулой (1.2.1). Тогда

$$I_p = \frac{332 + 18{,}97 + 0{,}81 + 0{,}69}{\dfrac{332}{1{,}06} + \dfrac{18{,}97}{0{,}98} + \dfrac{0{,}81}{0{,}95} + \dfrac{0{,}69}{1{,}04}} = 1{,}05, \text{ или } 105~\%.$$

Следовательно, общий вес совокупности указанных компонент и показателей увеличился на 5 %.

Задача 1.2.2. Данные относительно важности двух компонент и двух показателей качества учебного процесса в первом и во втором полугодии представлены в табл. 1.2.2. В четвертом столбце указаны изменения весов в процентах. Важность темы (контрольного мероприятия) рассматривается как относительная величина, исходя из суммарной важности тем (контрольных мероприятий) за два полугодия и суммарной важности отдельно за первое и второе полугодие.

Таблица 1.2.2

Компоненты и показатели учебного процесса	Важность компонент и показателей в полугодии		Изменение веса во втором полугодии по сравнению с первым, %
	Первом	Втором	
1	*2*	*3*	*4*
Совокупность тем	0,39	0,61	+6

Окончание табл. 1.2.2

1	2	3	4
Совокупность контрольных мероприятий	0,55	0,45	–2
Средний балл на экзамене	0,75	0,81	–5
Средняя посещаемость	0,71	0,69	+4

Проведем анализ двух моментов:

1) на сколько процентов изменились веса и объемы совокупности указанных структурных и оценочных компонент, а также показателей качества учебного процесса во втором полугодии по сравнению с первым;

2) каково абсолютное общее изменение важности указанных показателей и компонент, а также изменение важности за счет весов и объемов.

Для ответа на первый вопрос воспользуемся формулой (1.2.1):

$$I_p = \frac{0,61+0,45+0,81+0,69}{\dfrac{0,61}{1,06}+\dfrac{0,45}{0,98}+\dfrac{0,81}{0,95}+\dfrac{0,69}{1,04}} = \frac{2,56}{2,55} = 1,003, \text{ или } 100,3\ \%.$$

Затем применим общий индекс важности, обозначаемый как I_{pq} и равный отношению суммарной важности в отчетном периоде (втором полугодии) к суммарной важности в базисном периоде (первом полугодии), т.е.

$$I_{pq} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} p_1^j q_1^j}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_0^j q_0^j} = \frac{0,61+0,45+0,81+0,69}{0,39+0,55+0,75+0,71} = 1,07, \text{ или } 107\ \%.$$

Поскольку $I_q = I_{pq} / I_p$ [65], то имеем $I_q = 1,07 / 1,003 = 1,067$, или 6,7 %. Следовательно, суммарный вес рассматриваемых компонент и показателей во втором полугодии возрос на 0,3 % по сравнению с первым, суммарная важность увеличилась на 7 %, а суммарный объем увеличился на 6,7 %.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся известными формулами статистики [65]:

$$\Delta_{pq}^{(\text{общие})} = \sum_{j=1}^{n} p_1^j q_1^j - \sum_{j=1}^{n} p_0^j q_0^j = 2,56 - 2,4 = 0,16 \text{ усл. ед.};$$

$$\Delta_{pq}^{(\text{за счет веса})} = \sum_{j=1}^{n} p_1^j q_1^j - \sum_{j=1}^{n} p_1^j q_0^j = 2,56 - 2,55 = 0,01 \text{ усл. ед.};$$

$$\Delta_{pq}^{(\text{за счет объема})} = \Delta_{pq}^{(\text{общие})} - \Delta_{pq}^{(\text{за счет веса})} = 0,16 - 0,01 = 0,15 \text{ усл. ед.}$$

Полученные изменения могут быть выражены в баллах данной шкалы измерений либо в единицах полезности (ютилях). Результат трактуется следующим образом: общее изменение важности составляет 0,16 усл. ед., при этом за счет изменения весов происходит увеличение важности на 0,01 усл. ед., а за счет изменения объема – на 0,15 усл. ед.

Задача 1.2.3. В табл. 1.2.3 приведены данные по весу и объему часов изучения трех дисциплин в двух семестрах.

Таблица 1.2.3

Номер дисциплины	Вес дисциплины в течение семестра		Объем дисциплины в течение семестра	
	первого	второго	первого	второго
1	0,5	0,4	34	34
2	0,6	0,7	34	68
3	0,7	0,6	68	34

Требуется определить динамику среднего веса совокупности дисциплин. По формулам (1.2.2)–(1.2.4) вычислим, что

$$I_{\text{перем.сост}} = \frac{0{,}4\ \ 34 + 0{,}7\ \ 68 + 0{,}6\ \ 34}{34 + 68 + 34} : \frac{0{,}5\ \ 34 + 0{,}6\ \ 34 + 0{,}7\ \ 68}{34 + 34 + 68} =$$

$$= \frac{81{,}6}{85} = 0{,}96\text{, или 96 \%;}$$

$$I_{\text{пост.сост}} = \frac{81{,}6}{0{,}5\ \ 34 + 0{,}6\ \ 68 + 0{,}7\ \ 34} = 1,\ \text{т.е. 100 \%;}$$

$$I_{\text{стр.сдв}} = \frac{0{,}96}{1} = 0{,}96,\ \text{или 96 \%.}$$

Таким образом, средний вес общей совокупности дисциплин уменьшился на 4 % (причем только за счет соответствующего распределения учебных часов).

Итак, был рассмотрен индексный метод обобщенной оценки и динамики разнородных показателей и компонент учебного процесса. Данный метод может найти применение в решении задач из области юриспруденции, социологии, психологии, политологии, культурологии и т.д.

§ 1.3. Оценка качества обучения с применением логического метода

Проблема оценки результатов обучения является одной из важнейших в учебном процессе [2]. Для ее решения применяется моделирование образовательного процесса во время анализа качества деятельности вуза [15]. Сейчас необходимо оценивать не только успехи каждого обучаемого в количественном выражении, но и уровень подготовки учебных групп (их классификация [45]), а также мониторинг деятельности всего учебного заведения.

При анализе социально-экономических процессов часто приходится решать задачи, в которых объектом изучения является совокупность качественных признаков, не поддающихся количественному измерению. Так, при анализе деятельности вузов в ряде случаев используются качественные показатели, формируемые на основе высказываний участников образовательного процесса, когда имеющаяся информация и способы ее организации не соответствуют требованиям методов количественного измерения [20]. В этих условиях актуальным становится логический метод, который базируется на понятии булевых функций (высказываний) и уравнений [15, 20, 53–55].

1.3.1. Классификация показателей качества и описание учебных групп

К показателям качества обучения в вузе относятся:

средний балл;

регулярное или нерегулярное посещение занятий;

наличие или отсутствие интереса к учебе;

наличие или отсутствие стабильного ядра коллектива;

наличие или отсутствие интереса к проводимым в образовательном учреждении мероприятиям (конференциям, студенческим вечерам, диспутам и т.п.);

учебно-методическое обеспечение;

оснащенность современными компьютерами и др.

Этот список не является исчерпывающим. Некоторые из перечисленных показателей можно рассматривать как показатели высокого качества обучения (например, возрастание среднего балла, регулярное посещение занятий, наличие интереса к учебе), другие – как показатели невысокого качества (снижение среднего балла, нерегулярное посещение занятий, отсутствие интереса к учебе), третьи – как нейтральные факторы (наличие (отсутствие) стабильного ядра коллектива, наличие (отсутствие) интереса к проводимым в вузе мероприятиям). Последние сами по себе не означают высокого или низкого качества обучения.

Предположим, что с целью получения информации о качестве обучения в вузе было проведено исследование учебных групп. Все они, в зависимости от успеваемости, были разделены на три класса с различным (низким, средним и высоким) уровнем качества обучения. В первый вошли те группы, которые характеризуются одним или несколькими из следующих показателей:

1) наблюдается снижение среднего балла (денежных средств не хватает даже на выплату заработной платы);

2) в отчетном периоде некоторые студенты пропустили много занятий;

3) есть интерес к проводимым в вузе мероприятиям, но нет интереса к учебе.

Второй класс характеризуется одним или несколькими из указанных ниже четырех параметров:

1) средний балл в отчетном периоде стабилен;

2) в учебных группах осуществляется модернизация лабораторного оборудования;

3) есть интерес к проводимым в вузе мероприятиям;

4) нет интереса к проводимым вузом мероприятиям, тем не менее имеются стабильное ядро коллектива, возможность обновлять материально-техническое обеспечение и повысить средний балл.

В третий класс вошли учебные группы, у которых присутствует один из трех факторов:

1) имеется, помимо стабильного среднего балла, возможность систематически улучшать базу учебных практик и приобретать новые компьютеры;

2) увеличивается средний балл, но отсутствует интерес к проводимым в вузе мероприятиям;

3) происходит повышение среднего балла и существует стабильное ядро коллектива.

1.3.2. Критерии качественного и некачественного обучения

Требуется выяснить, как на основании перечисленных в пункте 1.3.1 показателей определить, имеет ли место качественное обучение в гипотетическом учебном заведении.

Пусть X – произвольный фактор, связанный с высоким качеством обучения, а Y – произвольный фактор, характеризующий невысокое качество обучения. Будем считать, что $Y = \overline{X}$. Обозначим через A, B, C факторы, которые сопутствуют обычной деятельности в вузе и не выступают условиями роста или снижения качества обучения. Тогда результаты обследования математически можно представить следующим образом. Первый класс характеризуется выполнением хотя бы одного из условий (обозначим здесь отрицательные параметры как Y, а нейтральные – как A):

1) снижение среднего балла Y (приводит к невысокому качеству обучения);

2) много в среднем пропусков занятий Y (также влечет за собой невысокое качество обучения);

3) наличие интереса к проводимым в вузе мероприятиям *A*. Этот фактор, очевидно, не связан с прогрессом, но его нельзя также отнести и к факторам, ухудшающим качество обучения. Однако отсутствие интереса к учебе можно считать фактором, снижающим указанное качество *Y*. Поэтому можно записать, что $A \quad Y$.

Аналогично выглядит второй класс:

1) стабильный средний балл *B* (здесь также можно считать, что этот фактор не влечет прогресс, но в то же время, очевидно, он не связан и с регрессом);

2) происходит модернизация лабораторного оборудования при наличии стабильного среднего балла $B \quad X$ (последний фактор можно считать повышающим высокое качество обучения);

3) есть интерес к проводимым в вузе мероприятиям *A*;

4) имеется в наличии стабильное ядро коллектива *C*, но нет интереса к проводимым в вузе мероприятиям $\bar{A}$; растет средний балл и обновляется материально-техническая база *X* (оба указанные параметра можно считать факторами, повышающими качество образования, а наличие или отсутствие интереса к проводимым в вузе мероприятиям – нейтральным фактором). Следовательно, описанный пункт перечня можно представить в виде $C \quad \overline{A} \quad X$.

В третий класс входят условия:

1) наличие стабильного среднего балла, улучшение базы учебных практик и приобретение новых компьютеров $B \quad X$ (обновление этой базы и появление современных технических средств можно считать факторами, обеспечивающими повышение качества обучения);

2) увеличение среднего балла, что, очевидно, можно считать прогрессом (обозначим этот параметр как *X*), но нет интереса к проводимым в вузе мероприятиям ($\bar{A}$; нейтральный фактор), следовательно, $\overline{A} \quad X$;

3) повышение среднего балла *X* и наличие стабильного ядра коллектива *C*, следовательно, можно записать $C \cdot X$.

Поскольку речь идет о качестве процесса обучения в целом, необходимо решить систему булевых уравнений [56]:

$$Y + Y + AY = B + B \quad X + A + C \quad \overline{A} \quad X;$$
$$Y + Y + AY = BX + \overline{A}X + CX,$$

где «+» и «·» обозначают логическое сложение и умножение соответственно.

Приведенная выше система после упрощения примет вид

$$Y = B + A + C \quad \overline{A} \quad X;$$
$$Y = (B + \overline{A} + C) \quad X. \qquad (1.3.1)$$

Решение поставленной задачи сводится к определению возможности найти решение $X = I$, где I – тавтология (тождественное истинное высказывание) и $Y = 0$ (0 – тождественное ложное высказывание). В этом случае можно утверждать, что в изученных группах имеет место качественное обучение, в противном – некачественное.

Запишем систему (1.3.1) в общем виде:

$$\begin{aligned} &E_1 Y + E_2 = E_3 \quad X + E_4; \\ &E_1 Y + E_2 = E_5 X + E_6, \end{aligned} \qquad (1.3.2)$$

где E_1, E_2, E_3, E_4 – булевы функции переменных A, B, C и $E_1 \neq 0$, $E_3 \neq 0$, $E_5 \neq 0$.

Если $X = I$ и $Y = \overline{X} = 0$ – решение данной системы, то, подставив значения X и Y в систему, получим

$$\begin{aligned} &E_2 = E_3 + E_4; \\ &E_2 = E_5 + E_6. \end{aligned} \qquad (1.3.3)$$

Следовательно, E_2 равносильно $E_3 + E_4$ и $E_2 - E_5 + E_6$, причем $E_2 \neq 0$, так как $E_3 \neq 0$.

В то же время если равносильности (1.3.3) имеют место, то $X = I$ и $Y = 0$ – решения системы (1.3.3). Действительно, подставив в систему $Y = 0$, получим

$$\begin{aligned} &E_2 = E_3 X + E_4 \\ &E_2 = E_5 X + E_6, \end{aligned}$$

для которой $X = I$ выступает ее решением.

Таким образом, **необходимым и достаточным** условием качественного обучения в изученных группах с математической точки зрения является выполнение условия (1.3.3). Содержательно это условие для рассматриваемой задачи означает, что в первой группе обязательно должны иметься факторы, в совокупности образующие высказывание E_2, соответствующее булевой функции нейтральных и, может быть, прогрессивных факторов и равносильное высказываниям $E_3 + E_4$ и $E_5 + E_6$, описывающим второй и третий классы соответственно. Для рассматриваемой системы (1.3.1) имеем: $E_2 = 0$ (тождественно ложное высказывание); $E_3 = C\bar{A}$; $E_4 = B + A$; $E_5 = B + \bar{A} + C$; $E_6 = 0$.

Таким образом, решение системы (1.3.1) будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$0 = C\bar{A} + B + A; \; 0 = B + \bar{A} + C.$$

Но, очевидно, это неверно, так как высказывания $C\bar{A} + B + A$ и $B + \bar{A} + C$ не являются тождественно ложными. Следовательно, можно сделать **вывод**: из результатов проведенного обследования следует, что в обследованных группах нет высокого качества обучения.

Рассмотрим математическую модель регрессивного действия взаимосвязи факторов. В этом случае система (1.3.2) должна иметь решение $X = 0$ и $Y = I$. По аналогии с условием (1.3.3) для данного случая можно получить систему

$$\begin{gathered} E_1 + E_2 = E_4 \\ E_1 + E_2 = E_6 \end{gathered},$$

которая является необходимым и достаточным условием (с математической точки зрения) некачественного обучения.

Поскольку для рассматриваемой задачи $E_1 = I$, $E_2 = 0$, то должны выполняться соотношения:

$$I = B + A; I = 0.$$

Очевидно, это невозможно, поэтому можно сделать **вывод**: в изученных группах нельзя говорить о некачественном обучении, т.е. имеем допустимое качество образования.

Проанализируем, какими должны быть исходные данные, чтобы можно было судить о высоком качестве обучения на основе проведенного исследования. Предположим, что в первом классе присутствуют регрессивные и нейтральные факторы либо нейтральные факторы (например, стабильный средний балл B или наличие интереса к проводимым вузом мероприятиям A либо стабильное ядро коллектива, при этом в группе нет интереса к проводимым вузом мероприятиям ($C\bar{A}$), т.е. $E_2 = B + A + \bar{A}C$). $C\bar{A}$ и $E_2 = B + A + \bar{A}C$.

Допустим, что во втором классе имеют место либо прогрессивные факторы и нейтральные типа «наличие стабильного ядра в коллективе ($C\bar{A}$)», либо только нейтральные (наличие интереса к проводимым в вузе мероприятиям или стабильный средний балл $A + B$). Следовательно, $E_3 = C\bar{A}$, $E_4 = A + B$. Таким образом, для этих данных выполняется первое уравнение системы (1.3.3), так как очевидно, что

$$B + A + \bar{A}C = C\bar{A} + A + B.$$

Пусть в третьем классе имеют место прогрессивные факторы и нейтральные типа «стабильный средний балл успеваемости» либо «наличие интереса к проводимым вузом мероприятиям» или наличие стабильного ядра коллектива, т.е. $E_5 = B + A + C$. В этом случае выполняется второе уравнение системы (1.3.3), поскольку нетрудно показать, что имеет место равносильность

$$B + A + \bar{A} \cdot C = B + A + C.$$

Следовательно, при измененных условиях можно сделать вывод о высоком качестве обучения в учебном заведении.

Приведен один из вариантов решения поставленной задачи. Число этих вариантов равно числу различных булевых функций от трех переменных A, B, C, т.е. $2^8 = 256$.

Условие (1.3.3) является балансовым (негативное действие регрессивных факторов компенсируется нейтральными).

1.3.3. Общий вид балансового условия

Рассмотрим решение задачи в общем виде. Пусть было установлено, что группа с низким уровнем качества обучения характеризуется булевой функцией $f_1(Y, E_1, E_2) = E_1 Y + E_2$, где E_1, E_2 – некоторые булевы функции нейтральных факторов. Группе со средним качеством обучения соответствует булева функция $f_2(E_3) = E_3$, где E_3 – некоторая булева функция нейтральных факторов. Наконец, группе с высоким качеством обучения соответствует булева функция $f_3(X, E_4, E_5) = E_4 X + E_5$, где E_4 и E_5 – булевы функции нейтральных факторов. Для того чтобы выяснить, имеет ли место высокое качество обучения в вузе, следует решить систему

$$\begin{aligned} &f_1(Y, E_1, E_2) = f_2(E_3) \\ &f_1(Y, E_1, E_2) = f_3(X, E_4, E_5) \end{aligned}, \qquad (1.3.4)$$

или

$$\begin{aligned} &E_1 Y + E_2 = E_3 \\ &E_1 Y + E_2 = E_4 X + E_5 \end{aligned}, \qquad (1.3.5)$$

и найти значения $X = 1$, $Y = 0$ (где 1 – тождественно истинное высказывание; 0 – тождественно ложное высказывание), удовлетворяющие системе (1.3.5).

Заметим, что если $X = 1$ и $Y = 0$, то подстановка этих значений в систему (1.3.5) дает соотношение

$$\begin{aligned} &E_2 = E_3; \\ &E_2 = E_4 + E_5. \end{aligned} \qquad (1.3.6)$$

В то же время если равносильности (1.3.6) имеют место, то простая подстановка значений $X = 1$ и $Y = 0$ в систему (1.3.5) показывает, что эти значения есть ее решение.

Таким образом, в рассматриваемом учебном заведении можно говорить о высоком качестве обучения, если выполняются условия:

1) булевы функции нейтральных факторов первого и второго классов совпадают (например, в частном случае $E_2 = E_3 =$ «Наличие стабильного ядра группы или отсутствие интереса к проводимым в вузе мероприятиям»);

2) булева функция нейтральных факторов второй группы представляет собой логическую сумму (дизъюнкцию) булевых функций нейтральных факторов третьей группы (например, $E_2 = E_4 + E_5$, где E_4 = = «Наличие стабильного ядра группы», E_5 = «Отсутствие интереса к проводимым в вузе мероприятиям»).

При оценке качества обучения возможно выделение большего числа классов обучаемых, исследование огромного количества факторов и использование других логических функций при формировании систем (1.3.4) и (1.3.5).

Можно утверждать, что условие (1.3.6) является своеобразным балансовым условием, когда негативное действие регрессивных факторов как бы компенсируется нейтральными факторами.

Таким образом, с помощью логического метода можно оценивать учебный процесс. Предложенный подход можно алгоритмизировать и применять в составе информационного и программного обеспечения автоматизированной системы сопровождения учебного процесса [61, 81].

§ 1.4. Векторные оценки эффективности учебно-воспитательного процесса в вузе

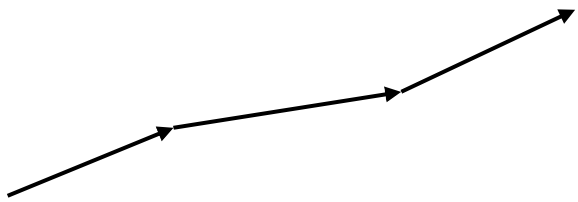
Внедрение новых, в том числе цифровых, технологий в учебный процесс вызывает необходимость разработки и применения современных методик анализа успеваемости студентов. С целью полного ее описания будем использовать векторные, многокритериальные оценки [39, 42]. Эффективность и условия целесообразности применения таких оценок для характеристики объектов сформулирована и доказана в виде теорем в работе [42]. Важным вопросом при изучении проблемы качества обучения является совместное рассмотрение векторной оценки и формирования стимулирующих воздействий на обучаемых для повышения качества учебного процесса.

Для анализа качества обучения в вузе были исследованы несколько групп обучаемых. С каждым из учащихся можно связать векторы:

$\overline{a} = (a_1, a_2)$, где a_1 – средний балл по итогам экзаменов (зачетов), a_2 – средний балл за курсовые (контрольные) работы;

$\overline{b} = (b_1, b_2)$, где b_1 – число попыток сдачи экзаменов (зачетов); b_2 – число попыток сдачи курсовых (контрольных) работ.

Под воздействием положительных (позитивного примера родителей, друзей, поощрения) и отрицательных (пустого времяпрепровождения, опаздываний, упреков, выговоров и т.п.) факторов будут изменяться длина и положение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, в результате чего сформируется траектория обучения, которая будет выглядеть следующим образом:



Введем соответствующие векторы нормы ($\overline{a}^0$ и $\overline{b}^0$), характеризующие средний балл за экзамены (зачеты) и курсовые (контрольные) работы, разного рода мотивирующие воздействия. Нормативный средний балл должен быть не меньше 4, а число попыток сдачи равно 1. Сравнивая положения и длину векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с векторами нормы, можно корректировать стимулирующие воздействия. В качестве примера своеобразного стимулирующего воздействия назовем использование цветомузыки. Применение ее можно объяснить следующими соображениями: каждый цвет, как и звук, изображается в виде вектора в трехмерном пространстве с базисными векторами «зеленый», «синий», «красный» и звуками «до», «ми», «соль» соответственно. Введенные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ плоскостные, поэтому им можно ставить в соответствие определенной частоты звук или цвет на плоскости. При этом векторам $\overline{a}^{\,0}$ и $\overline{b}^{\,0}$ тоже можно поставить в соответствие свои цвета и звуки. Путем цветозвукового воздействия на индивидуума можно сближать векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и соответствующие нормы.

Аналогичные векторные характеристики качества учебного процесса можно применять для группы из n студентов.

Успеваемость можно характеризовать скалярным произведением ($\overline{a}^{\,0} - \overline{a}$) · ($\overline{b} - \overline{b}^{\,0}$). Будем называть этот показатель **характеристическим числом студента.** Успеваемость выше, если скалярное произведение меньше. Для группы учащихся вводится вектор $\overline{\gamma}$ с координатами, равными характеристическим числам студентов. У вектора нормы $\overline{\gamma}^0$ каждая координата неотрицательна и не превосходит 1 (это свидетельствует о том, что средний балл каждого студента не менее 4, а сдача контрольного мероприятия происходит с первого или со второго раза). Отклонение $\overline{\gamma}$ от $\overline{\gamma}^0$ определяется либо разностью их длин, либо углом между ними. Для улучшения вектора $\overline{\gamma}$ можно использовать то же стимулирование, что и для рассмотренных ранее векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Большую роль в образовательном процессе играет изучение характеров обучаемых. Существует классификация людей по психологическим типам (предложена швейцарским ученым К.Г. Юнгом): интроверт – экстраверт, интуит – сенсорик, этик – логик, рационал – иррационал. Можно считать, что любые три типа, рассматриваемые как векторы, определяют точку трехмерного пространства, соответствующую точке с аналогичными координатами цветовой и звуковой гаммы. Векторы психологических признаков (аналогично звуковым и цветовым) могут растягиваться или сужаться в определенное число раз при выбранной единице масштаба с учетом, образно говоря, **психологической насыщенности** данного признака у конкретного индивида. Таким образом, существует соответствие между характером человека, его цветозвуковым портретом и векторами обучения. Это соответствие следует использовать для детального изучения успеваемости в группе и использования для повышения качества обучения.

С каждым учащимся можно связать вектор $\overline{c}(c_1, c_2, ..., c_m)$, где $c_i (i = \overline{1, m})$ – координаты, характеризующие психические состояния и свойства личности. К свойствам личности относятся интеллект, дисциплинированность, совесть, доброта, воля, самокритичность, темперамент и т.п. Существуют тесты, позволяющие оценить эти качества. Таким образом, можно осуществлять многокритериальную оценку личности согласно указанным качествам с помощью длин векторов $\overline{c}$ и их отклонения от некоторой нормы $\overline{c}^0$ с последующей корректировкой $\overline{c}$ до $\overline{c}^0$ с использованием стимулирующих факторов.

Пусть $c_i^{(j)}$ – значение i-го показателя данного учащегося в фиксированный период времени $j = \overline{1, S}$, тогда вектор $\overline{c}_i\,(c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, ..., c_i^{(S)})$ будет характеризовать всю имеющуюся информацию о показателях конкретного учащегося за выбранные периоды S. Важную роль в оценке качества учебно-воспитательной работы играют средние значения и средние квадратические отклонения указанных показателей, рассматриваемых как случайные величины X_1 (интеллект), X_2 (дисциплина), X_3 (совесть), X_4 (доброта), X_5 (воля), X_6 (самокритичность), X_7 (темперамент) и т.д. Действительно, эти показатели меняются хаотично, поэтому представляют собой именно случайные величины. Среднее выборочное значение $\overline{x}_i$ $(i = \overline{1, m})$ определяется по формуле $\overline{x}_i = \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{S} c_i^{(j)}$, выборочное среднее квадратическое отклонение s_{x_i} – по формуле $s_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} (c_i^{(j)})^2 - (\overline{x}_i)^2}$. Затем строятся доверительные интервалы для среднего значения и среднего квадратического отклонения по каждому показателю. В случае если известные нормативные оценки для среднего значения и среднего квадратического отклонения каждого показателя попадают в соответствующие интервалы, делается вывод об эффективности учебно-воспитательного процесса относительно данного обучаемого. В противном случае рекомендуется увеличить число мероприятий по приведению к норме соответствующих показателей.

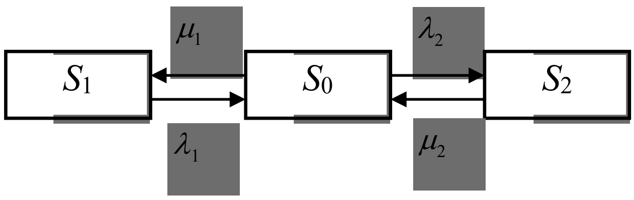
Если рассматривается группа обучаемых, состоящая из n человек, то с ней можно связать систему m векторов $\overline{d}_i(d_{i1}^{(j)}, d_{i2}^{(j)}, ..., d_{in}^{(j)})$, соответствующих различным качествам индивидуумов, например $\overline{d}_1(d_{11}^{(j)}, d_{12}^{(j)}, ..., d_{1n}^{(j)})$ – вектор интеллекта n студентов; $\overline{d}_2(d_{21}^{(j)}, d_{22}^{(j)}, ..., d_{2n}^{(j)})$ – вектор дисциплинированности и т.д. Обозначим через Y_1 , Y_2 ,…, Y_m показатели, аналогичные показателям X_1 , X_2 ,…, X_m , но для групп n

обучаемых. Тогда среднее выборочное значение $\overline{y}_i \ (i=\overline{1,m})$ определяется как $\overline{y}_i = \frac{1}{Sn}\sum_{k=1}^{n} d_{ik}^{(j)}$, а среднее квадратическое отклонение

$$s_{y_i} = \sqrt{\frac{1}{Sn}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{S}((d_{ik}^{(j)})^2-(\overline{y}_i)^2)}\ .$$

Таким образом, при корректировке показателей большое значение имеет оценка связей между ними, которая предполагает использование моделей корреляционного и регрессионного анализа. Коэффициенты корреляции и детерминации позволяют оценить тесноту статистической связи между показателями. Регрессионные модели дают функциональное описание зависимостей между показателями. В результате появляется возможность установить влияние факторов (стимулов), определяющих показатели (аргументы), на показатель – функцию – с последующей корректировкой этих факторов (стимулов).

Важный вопрос, который возникает при анализе качеств (показателей), заключается в определении их **стабильности.** Использование марковских процессов позволяет решить этот вопрос. Рассмотрим систему, связанную с показателем успеваемости учащегося, где S_0 означает, что он не изменился, S_1 – уменьшился, S_2 – увеличился за конкретный промежуток времени. Соответствующие вероятности обозначим как P_0, P_1, P_2, плотность потока негативных стимулов, переводящих систему из S_0 в S_1, – как μ_1; систему из S_2 в S_0 – как μ_2. Плотность потока позитивных стимулов, переводящих систему из S_1 в S_0, – это λ_1, а переводящих систему из S_0 в S_2 – λ_2. Граф переходов системы представлен ниже:



Плотности λ_i (i = 1, 2) можно определить как взвешенную сумму групп позитивных стимулов: $\lambda_i = \sum_{l=1}^{k_i} u_l^{(i)} \ r_l^{(i)} / t$, где $u_l^{(i)}$ – вес влияния l-группы позитивных стимулов для потока с плотностью λ_i; $r_l^{(i)}$ – число стимулов в этой группе; k_i (i = 1,2) – число групп позитивных стимулов для потока с плотностью λ_i; t – время действия потока. Плотности μ_i (i = 1,2) негативных стимулов находят аналогично: $\mu_i = \sum_{l=1}^{m_i} v_l^{(i)} \ w_l^{(i)} / t$, где $v_l^{(i)}$ – веса; $w_l^{(i)}$ – число стимулов в этой группе; m_i (i = 1,2) – число групп.

Как показано в [23], если α – пороговое значение, соответствующее не уменьшению показателя, определяемое условием

$$P_0 + P_2 = \alpha,$$

то отношение плотностей связано соотношением $\frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{1 + P_0 - 2\alpha}{P_0} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}$.

В случае когда $2\alpha = 1 + P_0$, имеем $\lambda_1\lambda_2 = \mu_1\mu_2$, т.е. произведение плотностей потоков позитивных стимулов равно произведению плотностей потоков негативных стимулов.

Таким образом, была разработана новая модель оценки успеваемости. В представленной модели с каждым обучаемым связан вектор, координатами которого являются средний балл и количество попыток сдачи контрольных мероприятий. В качестве характеристики учебного процесса предложено использовать скалярное произведение векторов. Определены векторы, характеризующие психологические состояния и свойства личности и групп индивидуумов. Предложена методика оценки эффективности учебно-воспитательного процесса на основе векторных характеристик. Разработана модель повышения стабильности показателей эффективности учебного процесса.

§ 1.5. Векторная модель многокритериальной оценки

Во многих задачах организации учебного процесса эффективность операций оценивается несколькими частными критериями. Эти критерии могут быть противоречивыми. Для выбора агрегированного критерия могут применяться различные методы, например построение обобщенного показателя, сведение задачи к однокритериальной, условная оптимизация, введение весов в пространстве критериев, нахождение доминирования по Парето [42]. Важность данной проблемы для экономических приложений и для подготовки студентов экономических специальностей вузов подчеркнута в работе [67]. Обзор существующих методов многокритериальной оценки, их достоинства и недостатки описаны в статье [4]. В настоящее время во многих публикациях изучают, в каком направлении можно исследовать эти методы. Так, в [91] рассматривается многокритериальная оценка эффективности производственных и маркетинговых систем. В статье [94] анализируется разрешимость задачи доминирования в играх с многомерными выигрышами и неполными предпочтениями. Новым направлением является разработка методов и подходов к решению задач многокритериального выбора в условиях неопределенности [57, 88, 95]. Вопросы векторного оценивания разработаны в статьях [27, 33, 39, 85].

1.5.1. Сравнение объектов при доминировании по Парето

Пусть сравниваются два объекта по N критериям (признакам). Результаты сравнения: первый объект – $\bar{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$; второй – $\bar{b}(b_1, b_2, ..., b_n)$. Возникает вопрос «У какого объекта лучшие результаты?»

Рассмотрим подходы (варианты):

первый – сравниваются средние арифметические значения;

второй – сопоставляются длины соответствующих векторов;

третий – сравниваются скалярные произведения этих векторов с вектором нормы $\bar{c}(c_1, c_2, ..., c_n)$, т.е. проекции векторов $\bar{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, ..., b_n)$ на вектор нормы $\bar{c}(c_1, c_2, ..., c_n)$.

Координаты у всех векторов будем считать неотрицательными.

Говорят, что векторная оценка $\bar{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$ доминирует по Парето векторную оценку $\bar{b}(b_1, b_2, ..., b_n)$, если выполняются условия $a_i \quad b_i$ (для всех индексов $i = \overline{1, n}$), причем по крайней мере для одного индекса это неравенство является строгим.

Теорема 1.5.1. Все три перечисленные выше варианты сравнения эквивалентны, если векторная оценка $\bar{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$ *доминирует по Парето* векторную оценку $\bar{b}(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Доказательство. Пусть имеет место неравенство

$$\frac{1}{n} {}_{i=1}^{n} a_i \quad \frac{1}{n} {}_{i=1}^{n} b_i. \tag{1.5.1}$$

Докажем, что $\bar{a}(a_1, a_2, ..., a_n) \ \bar{c}(c_1, c_2, ..., c_n) \quad \bar{b}(b_1, b_2, ..., b_n) \ \bar{c}(c_1, c_2, ..., c_n)$. Предположим противное.

Пусть $\bar{a}(a_1, a_2, ..., a_n) \ \bar{c}(c_1, c_2, ..., c_n) < \bar{b}(b_1, b_2, ..., b_n) \ \bar{c}(c_1, c_2, ..., c_n)$, т.е.

$$\frac{1}{n} {}_{i=1}^{n} a_i c_i < \frac{1}{n} {}_{i=1}^{n} b_i c_i, \tag{1.5.2}$$

откуда ${}_{i=1}^{n} c_i (a_i - b_i) < 0.$

Пусть $c_{\min} = \min_i c_i,$ тогда $c_{\min} {}_{i=1}^{n} (a_i - b_i) < 0,$ поэтому ${}_{i=1}^{n} a_i < {}_{i=1}^{n} b_i.$ Это противоречие. Следовательно, из первого варианта следует третий.

Обратим внимание, что вместо вектора $\bar{c}$ можно рассматривать векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Тогда $\bar{a} \ \bar{a} \quad \bar{b} \ \bar{a}$ и $\bar{a} \ \bar{b} \quad \bar{b} \ \bar{b}$, т.е.

$${}_{i=1}^{n} a_i^2 \quad {}_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{1.5.3}$$

Это означает, что из первого варианта следует выполнимость второго. Пусть имеет место неравенство (1.5.3), откуда $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\ (a_i-b_i)\quad 0$.

Положим, что $a_{\max}=\max_i a_i$, $b_{\max}=\max_j b_j$. Тогда $(a_{\max}+b_{\max})\ \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\quad 0$ и $\sum_{i=1}^{n}a_i\quad \sum_{i=1}^{n}b_i$, т.е. из второго варианта следует первый.

Пусть имеет место третий вариант: $\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\quad \sum_{i=1}^{n}b_ic_i$. Докажем, что в этом случае $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i$ (по сути, первый вариант).

Предположим противное, т.е. $\sum_{i=1}^{n}a_i<\sum_{i=1}^{n}b_i$. Тогда $\sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\ a_i>$ $>\sum_{i=1}^{n}(c_i-1)\ b_i$, т.е. $\sum_{i=1}^{n}c_i(a_i-b_i)>\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)$.

Пусть $c_{\max}=\max_i c_i$ и $c_{\max}\quad 1$, тогда $c_{\max}\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)>\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)$, откуда

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)>\frac{1}{c_{\max}}\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i). \qquad (1.5.4)$$

Однако, согласно предположению, $\sum_{i=1}^{n}a_i<\sum_{i=1}^{n}b_i$, т.е. обе части неравенства (1.5.4) отрицательные. Если $c_{\max}<1$, то $c_{\min}<1$ и в формуле (1.5.4) вместо $c_{\max}$ стоит $c_{\min}$.

Следовательно, имеет место противоречие, которое доказывает требуемое утверждение.

Таким образом, первый и третий варианты эквивалентны, а значит, все три варианта эквивалентны.

Обратим внимание на то, что если в первом варианте рассматривается средняя арифметическая взвешенная, то результат будет тот же самый: анализируются векторы с взвешенными координатами.

1.5.2. Сравнение объектов, моделируемое векторами с произвольными неотрицательными координатами

Рассмотрим случай, когда нет доминирования по Парето. Будем считать, что все координаты вектора нормы $\bar{c}$ равны друг другу. Если, допустим, координата c_i меньше максимальной координаты $c_{\max}$ этого вектора, то на оси с единичным вектором $\overline{e_i}$ увеличиваем масштаб, удлиняя единичный вектор $\overline{e_i}$ в $c_{\max} / c_i$ раз.

Теорема 1.5.2. Первый и третий варианты сравнения эквивалентны.

Доказательство. Покажем, что из первого варианта следует третий, рассуждая от противного, т.е. имеет место неравенство (1.5.1) и в то же время выражение (1.5.2) при $c_i = c$, а этого не может быть. Кроме того, очевидно, что из третьего варианта следует вариант первый.

Пусть теперь вектор нормы имеет произвольные неотрицательные координаты $(c_1, c_2, ..., c_n)$.

Пусть имеет место второй вариант, т.е. выполняется неравенство (1.5.3). В этом случае нетрудно доказывается теорема, представленная ниже.

Теорема 1.5.3. Второй и третий варианты эквивалентны тогда и только тогда, когда $\cos(\overline{b}, \overline{c}) = \cos(\overline{a}, \overline{c})$.

Оценка по третьему варианту предпочтительнее, чем по второму, так как в случае равенства длин векторов они сопоставляются относительно отклонения от вектора нормы. Как показано в [33], второй и третий варианты предпочтительнее, чем первый.

1.5.3. Метод векторных оценок

Векторные оценки более предпочтительны, чем средние. При использовании средних оценок получается бесконечное множество комбинаций расчета одной средней оценки. Геометрически это иллюстрируется множеством координат точек $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $A_1(a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1)$, $A_2(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2)$ и т.д. Значение одного среднего можно получить разными способами, например $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \dfrac{a_1^1 + a_2^1 + ... + a_n^1}{n} = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}$ и т.д. Для двумерного случая это показано на рис. 1.5.1. Для векторных оценок координате $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ соответствует одна единственная точка A, задаваемая длиной вектора $\overline{OA}$ и углами поворота $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ между выбранной осью и остальными осями (для двумерного случая это продемонстрировано на рис. 1.5.2).

В работе [42] показано, что во избежание неопределенности оценивания целесообразно введение вектора нормы (вектора требуемых значений), например вектора с максимально возможными координатами оценок.

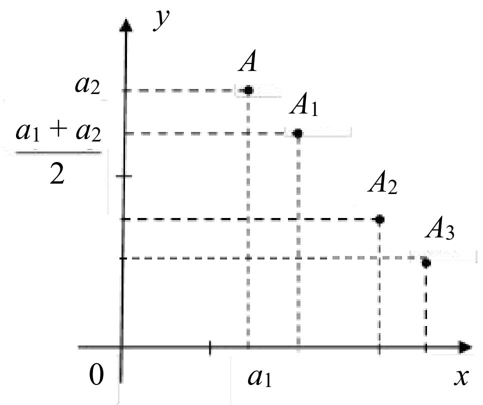


Рис. 1.5.1

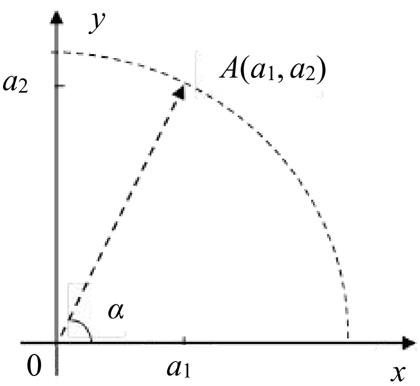


Рис. 1.5.2

При векторной оценке для рассматриваемого случая сравниваются скалярные произведения векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ с вектором-нормой $\overline{OC}$, т.е. величины $\overline{OA}\ \overline{OC}$ и $\overline{OB}\ \overline{OC}$. Предпочтительнее тот вектор, у которого это произведение больше. Другие виды степенных средних величин (средняя геометрическая, гармоническая и т.д.), как и средняя арифметическая, не позволяют получить качественную оценку рассматриваемого явления. Линейные свертки критериев обладают теми же недостатками.

Векторные оценки могут применяться в учебном процессе, установлении качества продукции, отборе персонала и т.д. Так, при оценке работы преподавателей можно использовать трехмерный вектор $\overline{c}(c_1, c_2, c_3)$. Координаты этого вектора характеризуют учебную, научную и методическую деятельность преподавателя.

В случае если векторы $\overline{c_1}$ и $\overline{c_2}$ характеризуют деятельность двух преподавателей и $\overline{c_0}$ – вектор-норма, то при выполнении неравенства $\overline{c_0}\ \overline{c_1} > \overline{c_0}\ \overline{c_2}$ первый преподаватель имеет более высокие показатели. Если $\overline{c_0}\ \overline{c_1} < \overline{c_0}\ \overline{c_2}$, то показатели выше у второго, а если $\overline{c_0}\ \overline{c_1} = \overline{c_0}\ \overline{c_2}$, то показатели преподавателей одинаковы.

1.5.4. Результаты практического применения разработанных методов

Рассмотрим применение методов многокритериального оценивания на примере агрегирования показателей качества учебного процесса в единую оценку.

Для анализа возьмем гипотетических студента и дисциплину.

Изучим моделирование показателей качества учебного процесса с помощью многокритериальной оценки.

Важные показатели учебного процесса: коэффициент трудолюбия (K_1); коэффициент интереса (K_2); коэффициент сложности усвоения изучаемого материала (K_3); оценка успеваемости (K_4).

Данные коэффициенты можно рассчитать по формулам, приведенным, например, в [42] и в § 1.6. Перечисленные показатели зависят от количества учебных часов *Т*, которые отработал студент на занятиях и в период самостоятельной работы, а также от интеллекта *И* обучаемого и рейтинга *Р* преподавателя. Не нарушая общности, другие факторы изучать не будем.

Каждый указанный выше показатель качества $K_i (i = \overline{1,4})$ будем называть критерием и рассматривать в виде линейной функции

$$K_i = a_i T + b_i И + c_i P. \qquad (1.5.5)$$

Здесь все коэффициенты $a_i,\ b_i,\ c_i$ положительны. Зависимость (1.5.5) определяется на базе эконометрической модели, построенной на основе векторной оценки ($K_i, T, И, P$). Для этого в конкретные интервалы времени (например, через неделю или при изучении каждой темы) преподаватель фиксирует в журнале сведения, касающиеся качества отработанных данным обучаемым учебных часов (показатель *Т*) и качества самостоятельного решения задач (сделанных упражнений) (показатель *И*).

В установлении рейтинга преподавателя *Р* участвуют представители методической комиссии и обучаемый. Обычно этот рейтинг определяется в конце учебного года. Однако это можно осуществлять чаще (например, раз в месяц или неделю).

На переменные $T,\ И,\ P$ накладываются ограничения вида:

$$0 \quad T \quad t_0;\ 0 \quad И \quad i_0;\ 0 \quad P \quad r_0. \qquad (1.5.6)$$

Задача заключается в отыскании таких значений $T,\ И$ и P, чтобы каждый критерий $K_i (i = \overline{1,4})$ принимал оптимальное значение в рамках ограничений (1.5.6).

Для решения данной задачи применим метод из [76]. Очевидно, для каждой функции $K_i (i = \overline{1,4})$ максимальное значение $K_{i\max} = K_i^0$ будет в одной и той же точке $u = (t_0,\ i_0,\ r_0)$. Далее составляем функцию

$$R(t,\ u,\ p) = \sum_{i=1}^{4} \left[K_i^0 - \left(a_i t + b_i u + c_i p \right) \right]^2. \qquad (1.5.7)$$

Функция (1.5.7) достигает экстремального значения в точке, которая максимально приближена к точке оптимального решения сформулированной четырехкритериальной задачи.

После возведения скобок в равенстве (1.5.7) в квадрат и сложения получим выражение вида

$$R(t,\ u,\ p) = S_1 t^2 + S_2 u^2 + S_3 p^2 + S_4 tu + S_5 tp + S_6 up + S_7,$$

которое исследуется на минимум в точке обращения в нуль частных производных данной функции. Полученное решение и будет решением поставленной задачи.

Обратим внимание на то, что вместо абсолютных показателей T, $И$, P , K_I могут участвовать их относительные аналоги, которые получаются делением T, $И$, P на их соответствующие возможные максимальные значения.

Итак, в данном параграфе рассмотрены разные варианты сравнения векторных оценок, на основе которых по множеству признаков сопоставляются объекты. Полученные результаты можно использовать во всех областях, где возникают задачи сравнения объектов по большому числу признаков.

§ 1.6. Количественная оценка качественных показателей учебного процесса

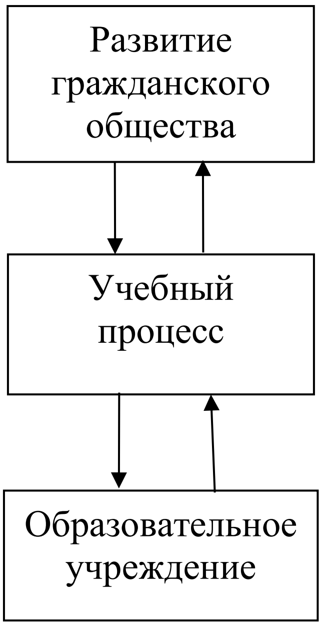


Рис. 1.6.1

Укрупненная схема системы связи процесса образования представляет собой совокупность макроблоков «Развитие гражданского общества», «Учебный процесс» и «Образовательное учреждение» (рис. 1.6.1). Каждый из этих блоков является сложной иерархической системой, состоящей в свою очередь из иерархических уровней. Каждый уровень включает в себя структурные звенья. Структурные звенья одного уровня могут быть соединены горизонтальными связями, а разных уровней – вертикальными. Деятельность структурных звеньев и связи между ними описываются определенными функциями, причем функции (связи) представляют собой управляющие сигналы. На рис. 1.6.1 они показаны стрелками. Такие же стрелки соединяют структурные звенья. Указанные функции зависят от различных показателей, которые служат оценками функционирования звеньев и связей.

Важнейшими среди показателей являются показатели качества функционирования системы. Как отмечается в [38], показатели качества во многом определяют **устойчивость** системы воздействия образовательного процесса на развитие гражданского общества, а поэтому, прежде всего, отражают его состояние. Кроме того, взаимосвязи показателей качества и оценки создают базу для прогнозирования возможных исходов развития общества и способов корректирования этих исходов. Учебный процесс в вузе сложен, протекает в иерархической, многоуровневой системе и зависит от множества различных факторов. Эти факторы определяются учебными планами, программами, контрольными мероприятиями, профессиональной подготовленностью и деятельностью руководящих структур, профессорско-преподавательского состава, контингента обучаемых, инноваций, объемом и распределением субсидий и т.д.

Опишем некоторые наиболее важные показатели качества, связанные с учебным процессом: коэффициент компетентности преподавателей; коэффициент интеллекта обучаемых; коэффициент интереса; коэффициент трудолюбия; дисциплинарный коэффициент; коэффициент сложности усвоения изучаемого материала; средний балл успеваемости группы; разброс балла успеваемости; стоимость портфеля оценочных баллов $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$, введенную в работе [16] и рассматриваемую как общую сумму оценок X_i всей группы изучаемых дисциплин; доходность портфеля оценочных баллов, определяемую как относительный прирост его стоимости [16]; эффективность портфеля, определяемую как среднее значение его доходности [16]; риск портфеля, или разброс его доходности [16].

Коэффициентам компетентности и интеллекта посвящено много работ, в которых рассматриваются различные методики их оценок экспертным путем с использованием соответствующих тестов (см., например, [74]).

Дисциплинарный коэффициент, или коэффициент посещений в группе, можно определить как среднее значение отношений $N_ф / N$, где N – общее число учебных часов; $N_ф$ – среднее число отработанных группой часов.

Коэффициент трудолюбия учащихся можно найти с учетом выполненных заданий разной сложности и потраченного на это времени. При этом необходимо принимать во внимание коэффициент интеллекта данного учащегося, который разумно брать обратно пропорциональным коэффициенту трудолюбия T_p. С учетом сказанного коэффициент трудолюбия может быть определен по формуле

$$T_p = \left(\frac{\tilde{N}_1}{N_1} \frac{\tilde{t}_1}{t_1} q_1 + \frac{\tilde{N}_2}{N_2} \frac{\tilde{t}_2}{t_2} q_2 + \ldots + \frac{\tilde{N}_s}{N_s} \frac{\tilde{t}_s}{t_s} q_s \right) \frac{1}{J},$$

где N_i – количество заданий на самостоятельную работу (домашнюю или классную) по *i*-й теме; $\tilde{t}_i$ – время потраченное на их решение; $\tilde{N}_i$ – фактическое количество заданий по данной теме; t_i – среднее время, затрачиваемое на решение задач по данной теме.

Получаем

$$q_i = \begin{cases} 0, & \text{если задачи списаны;} \\ 1, & \text{если задачи решены самостоятельно;} \\ 0{,}5, & \text{если задачи решены с подсказками.} \end{cases}$$

Следует отметить, что q_i определяется по результатам индивидуальных проверочных работ. Оценку коэффициента трудолюбия данного обучаемого можно обобщить, если дополнить среднюю оценку трудолюбия данного студента (ученика) $T_р$ оценками других студентов (учеников). Пусть их оценка будет $T_{рстуд}$. Тогда общий коэффициент $T_{рстуд}$ можно рассчитать по формуле

$$T_{рстуд} = \frac{c_1 T_p + c_2 T_{рстуд}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}},$$

где c_1 и c_2 – веса оценивания коэффициента трудолюбия данного учащегося преподавателем и другими обучающими.

Для определения этих весов существуют различные подходы. Например, прогнозируют, согласно $T_р$ и $T_{рстуд}$, результаты предстоящих контрольных мероприятий, которые выполнит учащийся. Итоги контрольной работы или тестирования сравниваются с прогнозом для каждого из членов рассматриваемой группы. Находится среднее отклонение результата от прогноза для оценки преподавателя и студентов. Эти отклонения и берутся в качестве весов c_1 и c_2 соответственно.

Коэффициент интереса $\Phi_и$, характеризующий мотивированную увлеченность обучаемого, можно определить аналогично коэффициенту трудолюбия по формуле (1.6.2), с той разницей, что речь идет о дополнительных заданиях N_i, в том числе помеченных знаками сложности «*» и «**».

Можно обобщить $\Phi_и$, дополнив самооценкой студента $\Phi_{истуд}$ собственного интереса по формуле, аналогичной формуле расчета $T_{рстуд}$:

$$\Phi_{инт} = \frac{c_1 \Phi_и + c_2 \Phi_{истуд}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Сложность усвоения изучаемого материала представляет собой сумму сложностей составляющих фрагментов изучаемого материала. Поскольку объем материала может быть разным, удобно рассматривать относительную сложность σ как частное от деления суммарной сложности составляющих фрагментов на соответствующий объем.

Что собой представляет фрагмент изучаемого материала? Разумно воспринимать его как целостную и достаточно обозримую часть текста (например, параграфа или пункта). В данной работе мы рассмотрим оценку сложности математического текста. Основными образующими такого текста являются математические понятия, формулы и связи между ними.

Графическое изображение такого фрагмента показано на рис. 1.6.2, где вершины графа – это понятия и формулы, стрелками обозначены возможные связи между ними. Сложность формулы (понятия) зависит от числа элементарных выражений и переменных, которые следует знать, чтобы понять данную формулу (данное выражение); числа элементарных понятий, которыми нужно владеть, чтобы понять данную формулу (понятие); сложности перехода от одного понятия (формулы) к другому понятию (формуле); сложности элементарных выражений, переменных, понятий.

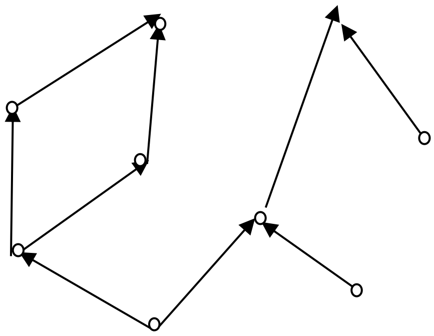


Рис. 1.6.2

К **элементарным выражениям** относятся арифметические, логические выражения, элементарные функции.

Элементарное понятие – исходное, интуитивно понятное понятие, не выразимое через другие понятия.

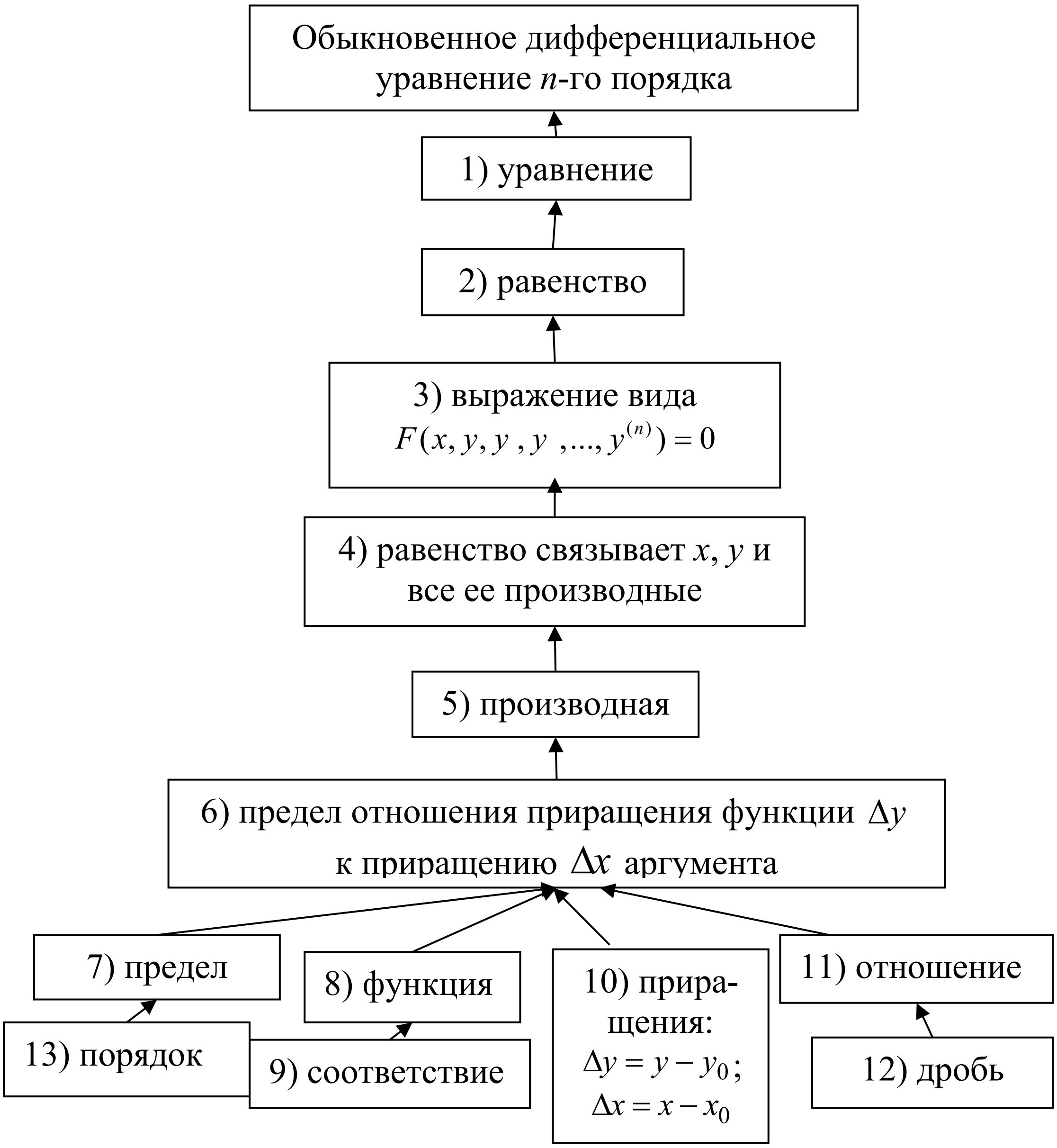
Переменные – это константы, арифметические, логические переменные и функциональные символы.

Пусть сложность переменной равна σ_1, элементарного выражения – σ_2, элементарного понятия – σ_3. Анализируемое понятие содержит n_1 переменных, n_2 элементарных выражений, n_3 элементарных понятий, сложность каждой связи равна σ. В этом случае общая сложность анализируемого понятия равна вектору $\{ n_1\sigma_1, n_2\sigma_2, n_3\sigma_3, n\ \sigma \}$.

Пример 1.6.1. Оценить сложность понятия «обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка», представляющее собой уравнение вида $F(x, y, y\ , y\ , ..., y^{(n)}) = 0$, связывающее переменную x, функцию y и все ее производные до n-го порядка включительно.

Перечислим понятия, используемые в данном определении: 1) уравнение – это: 2) равенство, справедливое для определенных значений входящих в него переменных, 3) равенство – это выражение вида $F(x, y, y\ , y\ , ..., y^{(n)}) = 0$; 4) равенство связывает x, y и все ее производные; 5) производная; 6) предел отношения; 7) функция – это 8) соответствие между переменными, когда переменной x ставится в соответствие единственное значение y; 9) предел – число A – предел функции в точке x_0, если для всех значений x, мало отличающихся от x_0, соответствующие значения y будут сколь угодно мало отличаться от A; 10) приращение функции Δy к приращению Δx аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю; 11) приращение $\Delta y = y - y_0$, приращение $\Delta x = x - x_0$; 12) отношение – дробь; 13) дробь – это выражение вида $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; 14) порядок производной показывает, сколько раз дифференцируется функция. Формулы: 1) равенство $F(x, y, y\ , y\ \ , ..., y^{(n)}) = 0$; 2) дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; 3) $\Delta x = x - x_0$; 4) $\Delta y = y - y_0$.

Структурно-логическая схема понятия «обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка» показана ниже:



Итак, рассматриваемое определение предполагает знание одиннадцати элементарных понятий, четырех формул, десяти переменных $\left(x,\ y,\ y\ ,\ y\ \ ,\ y^{(n)},\ \Delta x,\ \Delta y,\ x_0,\ y_0,\ F\right)$, тринадцати связей между элементарными понятиями. Следовательно, сложность задается вектором $(10\sigma_1, 11\sigma_2, 4\sigma_3, 13\sigma)$. Если, например, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 3$, $\sigma_4 = 4$, то понятию «обыкновенное дифференциальное уравнение *n*-го порядка» ставится в соответствие вектор сложности (10, 22, 12, 52). Если при этом соответствующий объем измеряется строками текста и равен v = 3,2 то относительная сложность будет $\frac{1}{3,2}\left(10;\,22;\,12;\,52\right)=\left(3{,}13;\,6{,}88;\,3{,}75;\,16{,}25\right)$.

Пример 1.6.2. Оценить сложность формулы $P(t)=c\quad -\frac{n}{b}^{\;t}+\frac{a-m}{b+n}$.

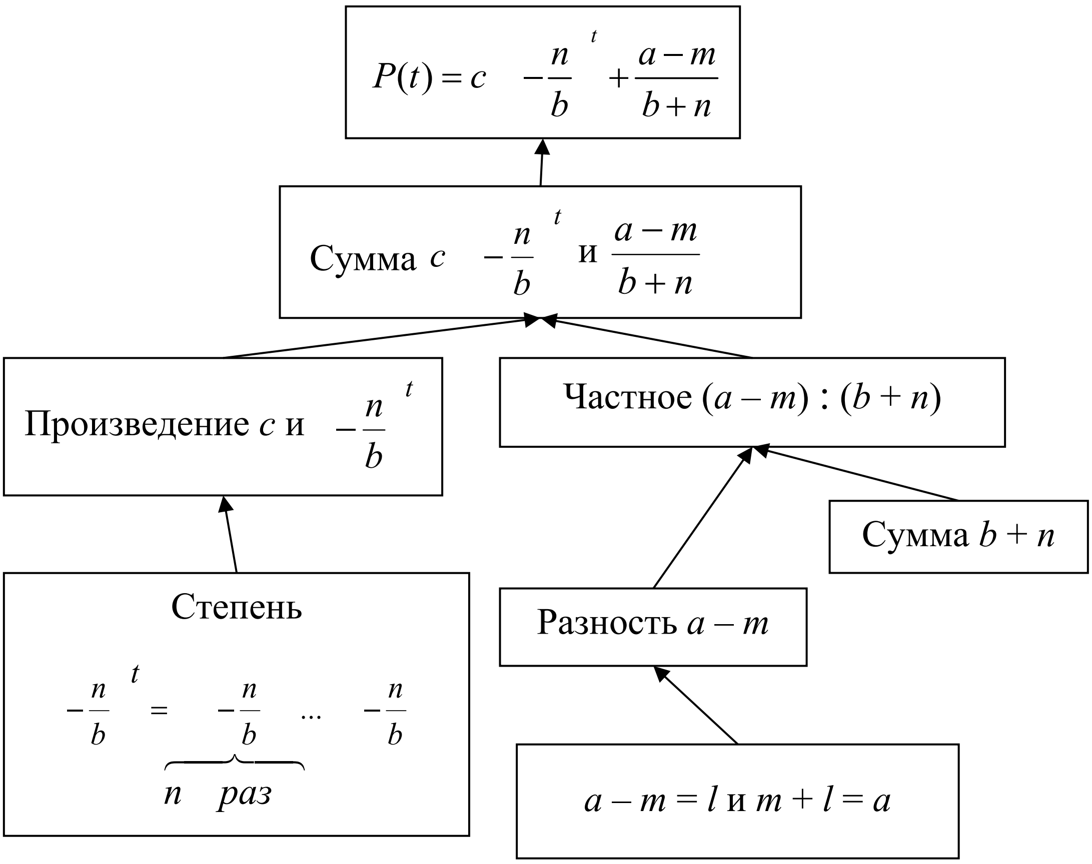
Имеем:

1) переменные: c, n, b, a, m, t;

2) элементарные выражения: $-\frac{n}{b},\ a-m,\ b+n,\ \frac{a-m}{b+n},\ -\frac{n}{b},\ P(t)$;

3) элементарные понятия («частное», «разность», «сумма», «степень», «умножение»).

Структурно-логическая схема формулы $P(t)=c\quad -\frac{n}{b}^{\;t}+\frac{a-m}{b+n}$ показана ниже:



Выражение $\frac{a-m}{b+n}$ связано с $a-m$ и $b+n$, $P(t)$ через равенство – с правой частью. Степень определяется через умножение, разность – через сложение. Поэтому имеем семь связей. Тогда сложность находим как

$$(5\sigma_1,\ 6\sigma_2,\ 5\sigma_3,\ 7\sigma) = (5;\ 12;\ 15;\ 28).$$

Итак, мы рассмотрели наиболее важные показатели качества образования, для некоторых привели формульное описание. Отметим, что для всех показателей часто применяется экспертное оценивание на основе тестирования, а также самооценка обучаемых.

§ 1.7. Физические показатели учебного процесса

Многие исследователи [69, 74, 77, 80] отмечают важность новых показателей для оценки качества учебного процесса.

Рассмотрим новый метод измерения (оценки) показателей учебного процесса, основанный на введенных в работе [14] понятиях важности, объема и веса показателя.

Показатели (компоненты) учебного процесса будем подразделять на информационные и оценочные. Первые связаны с получением знаний; к ним относятся изучаемые дисциплины, разделы, темы, параграфы дисциплин. Вторые связаны с контрольными и проверочными мероприятиями, характеризуемыми средними баллами, процентами посещаемости, участия в НИР и т.п. Каждую компоненту (показатель) можно описать через объем, вес, важность, массу, скорость изменения веса и массы, активность. Дадим определения этим понятиям и приведем примеры.

Под **объемом компоненты** в момент времени t понимается число слагающих ее составляющих (компонент или единиц) в это мгновение. Используется обозначение $q(t)$. Так, объемом темы в момент времени t можно считать число параграфов (пунктов, фрагментов) этой темы, изученных к моменту времени t.

Под **фрагментом** будем понимать ключевые понятия, свойства, теоремы, формулы, таблицы, графики, словосочетания или предложения. Здесь речь может идти и об одном учащемся, и о группе учащихся. При этом изучение происходит с определенной вероятностью. Поэтому целесообразно рассматривать среднее число, например, изучаемых параграфов в момент t. Пусть в качестве показателя берется оценочная компонента – средний балл успеваемости данного обучаемого (группы обучаемых). Объем данного показателя можно трактовать по-разному (например, объем полагается равным значению показателя). Другой подход предполагает выделение структурных компонент среднего балла. Так, если рассматривается средний балл по текущей успеваемости, то он рассчитывается как средняя арифметическая оценок за конкретный промежуток времени. Эти оценки и рассматриваются как структурные составляющие среднего балла.

Аналогичным образом определяется объем показателя посещаемости, участия в научных кружках и т.п. В качестве структурных компонент показателя посещаемости можно рассматривать либо те занятия, на которых присутствовал данный обучаемый, либо изучаемые темы или фрагменты. Показатель участия в научных кружках можно охарактеризовать, например, темами соответствующих занятий либо докладов и т.д. Объемом контрольной работы в момент t считается число ключевых понятий, планируемых решить к моменту t. Конечно, задания могут выполняться в разной последовательности и с определенной вероятностью, поэтому можно рассматривать среднее число понятий, отработанных к моменту времени t. Отметим, что к моменту t в общем случае объем $q(t)$ может быть как целым числом, так и числом с дробной частью.

Понятие **веса показателя** дано в § 1.2. Вес параграфа обусловливается его вкладом в изучение данного курса и базирующихся на нем дисциплин. Обычно вес обозначается как $p(t)$.

Введенные функции формально будем описывать следующим образом. Фиксируются определенные моменты времени (t_1, t_2, ..., t_n), а для изучаемой дисциплины – академические часы занятий (аудиторные, могут рассматриваться и часы самостоятельной работы) либо часы изучения определенных компонент (например, параграфов и т.п.). Для контрольной работы в качестве фиксируемых моментов могут выступать пятиминутные интервалы. Значения функции $q(t)$ в точках $t_i\,(i=\overline{1,n})$ целесообразно соединить отрезками. Полученная ломаная будет представлять собой аппроксимацию графика данной функции.

Действительно, объем изученного материала в течение каждого академического часа изменяется преимущественно постепенно, а не скачками, т.е. мы говорим об одной четверти, четырех пятых изученного параграфа и т.д. Поэтому самый простой вид зависимости на частичном интервале – это линейная. При этом, очевидно, чем меньше длина отрезка, тем точнее аппроксимация, а также то, что любой другой вид зависимости q от t на каждом частичном отрезке будет близок к линейной функции. Что же касается зависимости p от t, то обычно вес компоненты оценивается как постоянная величина на каждом частичном промежутке времени. Вследствие этого p рассматривается как ступенчатая функция со «ступеньками» на частичных промежутках со стрелками в правых концах.

На каждом частичном промежутке **важность** $П(t)$ показателя (компоненты) определяется как произведение объема на вес, т.е. $П(t)=q(t)\ \ p(t)$. При этом в каждой точке t_i $(i=\overline{2,n})$ слева рассматривается левый односторонний предел функции $П(t)$. Важность обычно измеряется в баллах. При рассмотрении нескольких показателей можно говорить об общей важности этих показателей как суммарной важности слагаемых. Такой подход дает возможность сравнивать учебные процессы по совокупности разнородных показателей.

При оценке важностей показателей большая роль отводится оценке скорости их изменения. **Скорость** $v_n(t)$ **изменения важности** показателя определим как первую производную от важности, т.е. $v_n(t) = \Pi\ (t)$.

Важность $\Pi(t)$ на каждом частичном интервале времени, согласно функциональному описанию функций $q(t)$ и $p(t)$, задается как линейная функция вида $bt + d$, где b и d – постоянные, откуда следует, что $v_n(t) = b$, т.е. постоянной величине. Заметим, что в точках $t_i\,(i = \overline{1,n})$ слева рассматриваются правые односторонние производные, а справа – пределы левых односторонних производных.

Успешность усвоения дисциплины, средний балл успеваемости и другие показатели связаны с успешным усвоением ключевых понятий. В связи с этим вводится соответствующая характеристика показателя. Будем называть **плотностью** показателя (компоненты) количество ключевых понятий (возможно, с повторениями) в единице объема в момент *t*. Плотность будем обозначать через $\rho(t)$. Если единица объема дисциплины изучается за данный промежуток времени $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = \overline{1,n})$, длина которого достаточно мала, то целесообразно $\rho(t)$ считать постоянной величиной, равной количеству ключевых слов на этом частичном участке времени.

Произведение объема на плотность $q(t)\ \rho(t)$ будем называть **массой** ключевых понятий в данном объеме или просто массой данного показателя в момент *t*. В общем случае, если объем выражен числом тем, то масса может быть выражена количеством параграфов, пунктов, фрагментов; если объем выражен через количество параграфов, то масса может быть выражена через количество пунктов, фрагментов. Наконец, если объем выражается через количество пунктов, то масса – через количество фрагментов.

Не нарушая общность, мы будем говорить о массе как множестве ключевых понятий. Для массы используется стандартное обозначение $m(t)$. Функцию $m(t)$ удобно аппроксимировать ломаной (аналогично тому, как это было показано для объема $q(t)$). **Скорость изменения массы** определяется как первая производная от массы, т.е. $v_m(t) = m\ (t)$. На каждом промежутке времени это постоянная величина, если $q(t)$ – линейная, а $\rho(t)$ – постоянная на этом участке функции. Единицы измерения – ключевые понятия в единицу времени (ключ/ед. вр.). Еще одной важной характеристикой показателя является его **активность**, которая определяется как произведение важности показателя на скорость изменения массы. Единицы измерения: балл·ключ/ед. вр.

Пусть в данный момент времени t^0 скорость равна $v_m(t^0)$, а в момент времени t – $v_m(t)$ соответственно. Важность в момент t^0 составляет $\Pi(t^0)$, в момент t – $\Pi(t)$. Тогда разность $\Pi(t) \ \ v_m(t) - \Pi(t^0) \ \ v_m(t^0)$ характеризует изменение активности на промежутке времени $[t^0, t]$. Эту разность будем называть **усилием** по изменению активности и обозначать через f; единицы измерения: балл·ключ/ед. вр. В общем случае f зависит от t^0 и t, при фиксированном t^0 является функцией от t. Таким образом, при фиксированном t^0

$$\Pi(t) \ \ v_m(t) - \Pi(t^0) \ \ v_m(t^0) = f(t). \qquad (1.7.1)$$

Следовательно, получаем возможность оценивать величину усилий по изменению активности изучения дисциплины, получения среднего балла, получения данной оценки научной работы и т.п.

Рассмотрим **пример.** На экономическом факультете некоего вуза на протяжении ряда лет читался курс «Матричные игры в управлении», продолжительность которого составила 32 аудиторных часа. Курс состоял из 11 параграфов, содержащих 36 ключевых понятий и 225 ключевых понятий с повторениями, которые распределились по параграфам следующим образом: первый параграф – 26 ключевых понятий (1 час); второй – 34 (3 часа); третий – 31 (3 часа); четвертый – 20 (2 часа); пятый – 19 (4 часа); шестой – 16 (4 часа); седьмой – 20 (1 час); восьмой – 18 (4 часа); девятый – 15 (3 часа); десятый – 11 (4 часа); одиннадцатый – 15 (3 часа). Веса параграфов на основе опроса обучаемых и преподавателей по пятибалльной шкале распределились в зависимости от порядка следования параграфов следующим образом: 2,1; 3,2; 5; 4,1; 4,9; 4,1; 5; 4,8; 4,9; 4; 4,2.

Требуется охарактеризовать данную дисциплину в любой момент времени с точки зрения объема (по количеству параграфов), важности, скорости изменения важности, массы, скорости ее изменения, а также активности изучения данного курса. Оценить усилие по изменению активности на временном участке изучения десятого и одиннадцатого параграфов.

Прежде всего определим частичные интервалы. Положим начальный момент времени $t_0 = 1$, остальные моменты времени зададим согласно времени изучения соответствующих параграфов, т.е. $t_1 = 4$; $t_2 = 7$; $t_3 = 9$; $t_4 = 13$; $t_5 = 17$; $t_6 = 18$; $t_7 = 22$, $t_8 = 25$; $t_9 = 29$; $t_{10} = 32$. В качестве единицы объема будем рассматривать параграф. Тогда

$$q(1)=1,\ q(4)=2,\ q(7)=3,\ q(9)=4,\ q(13)=5,\ q(17)=6,\ q(18)=7,\ q(22)=8,$$
$$q(25)=9,\ q(29)=10,\ q(32)=11.$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(t_i, q(t_i))$ и $(t_{i+1}, q(t_{i+1}))$:

$$(t-t_i)/(q(t)-q(t_i)) = (t_{i+1}-t_i)/(q(t_{i+1})-q(t_i)),$$

откуда находим выражение для $q(t)$ на любом участке $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0,10}$:

$$q(t)=\frac{q(t_{i+1})-q(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\ \ t-\frac{q(t_{i+1})-q(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\ \ t_i+q(t_i). \qquad (1.7.2)$$

Обозначим через p_i весовой коэффициент i-го параграфа (эти коэффициенты заданы в условии). Тогда при $t\ \ [t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,10}$ важность $\Pi(t)=p_i\ \ q(t)$, где p_i – вес i-го параграфа $i=\overline{0,11}$, $q(t)$ определяется из выражения (1.7.2), скорость изменения важности $v_n(t)$ будет равна $p_i\ \ [q(t_{i+1})-q(t_i)]/(t_{i+1}-t_i)$. Так, для рассматриваемого примера функция $q(t)$ при $t\ \ [t_2,t_3]=[7,9]$ равна $\frac{4-3}{9-7}\ \ t-\frac{4-3}{9-7}\ \ 7+3=\frac{1}{2}\ \ t-\frac{1}{2}$. Тогда при $t\ \ [7,9]\ \ v(t)=\frac{1}{2}$.

Для массы показателя $m(t_0)=26$; $m(t_1)=34$; $m(t_2)=31$; $m(t_3)=20$; $m(t_4)=19$; $m(t_5)=16$; $m(t_6)=20$; $m(t_7)=18$; $m(t_8)=15$; $m(t_9)=11$; $m(t_{10})=15$. Функция $m(t)$ определяется аналогично функции $q(t)$ (по формуле (1.7.2)) с заменой всюду в формуле q на m. Тогда $v_m(t)=[m(t_{i+1})-m(t_i)]/(t_{i+1}-t_i)$.

Активность $\Pi(t)$ изучения данного курса в момент t при $t\ \ [t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,10}$ будет равна $p_i\ \ q(t)\ \ v_m(t)$. Усилие $f(t)$ по изменению активности изучения дисциплины на временном участке десятого и одиннадцатого параграфов, т.е. на участке $[t_9, t_{10}]=[29, 32]$ будет, согласно определению $\Pi(t)$, составлять

$$\Pi(t)\ \ v_m(t)-\Pi(29)\ \ v_m(29)=p_{10}\ \ q(t)\ \ v_m(t)-p_9\ \ q(29)\ \ v_m(29).$$

По условию p_{10} = 4,2; p_9 = 4. Кроме того, $q(29)$ = 10; $q(32)$ = = 11; $v_m(t)=(15-11)/(32-29)=4/3=1{,}3$; $v_m(29)=1{,}3$; $p_{10}\ \ q(32)\ \ v_m(32)= =4{,}2\ \ 11\ \ 1{,}3=60{,}1$; $p_9\ \ q(29)\ \ v_m(29)=4\ \ 10\ \ 1{,}3=52$. Следовательно, на участке [29, 30] активность увеличивается на 8,1 усл. ед. На указанном участке по формулам (1.7.1) и (1.7.2) находим, что

$$f(t)=4{,}2\ \ \left(\frac{11-10}{32-29}\ \ t-\frac{11-10}{32-29}\ \ 29+10\right)\ \ 1{,}3-4\ \ 10\ \ 1{,}3=1{,}8\ \ (t-28).$$

Следовательно, при $t\ \ [29, 32]\ \ f(t)=1{,}8(t-28)$. Очевидно, что $f(t)$ – возрастающая функция на рассматриваемом участке. Значит, усилие по изменению активности в промежутке [29, 32] увеличивается с увеличением времени.

Предположим, что $v_m^n(t)(v_m^n(t^0))$ – скорость потока ключевых понятий в момент $t(t^0)$ у преподавателя, $v_m^y(t)(v_m^y(t^0))$ – то же самое в восприятии учащегося (группы учащихся – в случае средней скорости), причем $t^0 < t$.

Пусть $\Pi_1(t)$ – важность данного показателя с точки зрения преподавателя (коллектива преподавателей), $\Pi_2(t)$ – важность с точки зрения обучаемого (группы обучаемых).

Одна из основных задач в учебном процессе заключается в определении усилий $f_1(t)$ преподавателя и $f_2(t)$ учащегося (группы учащихся) по изменению активности соответственно с $\Pi_1(t^0)\ \ v_m^n(t^0)$ до $\Pi_1(t)\ \ v_m^m(t)$ и с $\Pi_2(t^0)\ \ v_m^y(t^0)$ до $\Pi_2(t)\ \ v_m^y(t)$ при общей скорости $v_m(t) = v_m^n(t) = v_m^y(t)$. Для решения данной задачи на основе формулы (1.7.1) составим систему уравнений

$$\begin{array}{l} \Pi_1(t)\ \ v_m(t) - \Pi_1(t^0)\ \ v_m^n(t^0) = f_1(t) \\ \Pi_2(t)\ \ v_m(t) - \Pi_2(t^0)\ \ v_m^y(t^0) = f_2(t) \end{array}, \qquad (1.7.3)$$

откуда при заданных t, t^0, $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$, $\Pi_1(t^0)$, $\Pi_2(t^0)$; $v_m^n(t^0)$, $v_m^y(t^0)$ находим $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Если $\Pi_1(t)\ \ v_m^n(t) - \Pi_1(t^0)\ \ v_m^n(t^0)\ \ \ 0$, то $f_1(t)\ \ \ 0$, в противном случае $f_1(t) < 0$ (аналогично для второго уравнения системы (1.7.3)).

Из системы (1.7.3) получаем необходимое условие существования $v_m(t)$:

$$\Pi_1(t)\Pi_2(t^0)\ \ v_m^y(t^0) - \Pi_2(t)\Pi_1(t^0)\ \ v_m^n(t^0) = \Pi_2(t)f_1(t) - \Pi_1(t)f_2(t).$$

Однако часто указанную скорость $v_m(t)$ найти трудно. Поэтому более актуальной является другая ситуация. Предположим, что для некоторого момента времени t выполнено условие

$$v_m^n(t^0) + v_m^y(t^0)\ \ \ v_m^n(t) + v_m^y(t). \qquad (1.7.4)$$

Возможны случаи:

1) $v_m^n(t^0)\ \ \ v_m^n(t)$, $v_m^y(t^0)\ \ \ v_m^y(t)$;

2) $v_m^n(t^0)\ \ \ v_m^n(t)$, $v_m^y(t^0)\ \ \ v_m^y(t)$;

3) $v_m^n(t^0)\ \ \ v_m^n(t)$, $v_m^y(t^0)\ \ \ v_m^y(t)$.

Очевидно, что второй случай не подходит, так как плохо, если скорость усвоения уменьшается.

В первом случае из условия (1.7.4) следует, что

$$v_m^n(t^0) - v_m^n(t)\ \ \ v_m^y(t) - v_m^y(t^0), \qquad (1.7.5)$$

т.е. снижение скорости потока ключевых слов преподавателя должно быть не менее той величины, на которую увеличивается поток ключевых понятий, воспринимаемых обучаемым (обучаемыми). При этом $v_m^n(t^0)$ должна быть не меньше, чем $v_m^y(t^0)$ и $v_m^n(t)$ не меньше $v_m^y(t)$, так как иначе учащиеся будут неактивными. Отсюда с учетом неравенства (1.7.5) получаем $v_m^n(t^0) \quad v_m^n(t)$. В третьем случае одновременное снижение скорости для преподавателя и ученика (учеников) может быть связано с возрастанием сложности предлагаемого материала. Тогда такое уменьшение скорости допустимо. Однако если сложность не увеличивается, то снижение скорости является индикатором недостаточного педагогического мастерства преподавателя на временном участке $[t^0, t]$. В случае если выполняется неравенство, противоположное неравенству (1.7.4), увеличение $v_m^n(t)$ должно быть связано с увеличением $v_m^y(t)$, а при снижении скорости потока ключевых слов преподавателя это снижение должно быть не более величины, на которую увеличивается поток ключевых понятий обучаемого (обучаемых), причем $v_m^n(t) \quad v_m^y(t^0)$.

Итак, используя понятие активности и скорости, мы описали различные ситуации, имеющие место в образовательном процессе. Во время обучения и преподаватель, и учащиеся совершают определенную работу. Возникает задача оценки этой работы. Рассмотрим один из возможных подходов решения указанной задачи. Проведем аналогию из механики. Если направление воздейсвия силы на тело совпадает с направлением движения этого тела (его скорости), то работа силы по перемещению тела равна произведению величины силы (с соответствующим знаком) на величину перемещения. Мы подставляем вместо силы усилие по изменению активности показателя, вместо перемещения по прямой, которое характеризуется изменением координаты центра тяжести тела, – изменение массы показателя.

Таким образом, работа $A_1(t)$, проделанная преподавателем с момента t^0 до момента времени t может быть вычислена по формуле

$$A_1(t) = f_1(t) \quad m_1(t) - f_1(t^0) \quad m_1(t^0),$$

где $m_1(t)$ и $m_1(t^0)$ – количество ключевых понятий, сообщенных преподавателем учащимся в моменты времени t и t^0 соответственно.

Проделанная учащимся (учащимися) работа вычисляется аналогично:

$$A_2(t) = f_2(t) \quad m_2(t) - f_2(t^0) \quad m_2(t^0),$$

где $m_2(t)$ и $m_2(t^0)$ – количество ключевых понятий, изученных данным учащимся (группой учащихся) к моменту времени t и t^0 соответственно.

Приведенные характеристики могут быть использованы для оценки работы преподавателей и учащихся. Можно привлечь экспертов и выработать классификацию педагогического мастерства преподавателей и способности к изучению данного материала учащимися.

Вернемся к рассмотренному примеру. Пусть t^0 = 29,2, t = 31,5 и $П_1(29{,}2) = П_2(29{,}2)$, $П_1(31{,}5) = П_2(31{,}5)$. Найдем, что

$$q(29,2) = \frac{q(32) - q(29)}{32 - 29} 29,2 - \frac{q(32) - q(29)}{32 - 29} 29 + q(29) = \frac{1}{3}\ 29,2 - \frac{1}{3} 29 + 10 = 10,07.$$

Расчетами по такой же формуле получаем:

$$q(31,5) \approx 10,83 \text{ усл. ед.};$$

$$П_1(29{,}2) = П_2(29{,}2) = 42 \cdot 10{,}07 = 42{,}29 \text{ усл. ед.};$$

$$П_1(31{,}5) = П_2(31{,}5) = 42 \cdot 10{,}83 = 45{,}49 \text{ усл. ед.};$$

$$m_1(29,2) = \frac{m_1(32) - m_1(29)}{32 - 29}\ 29,2 - \frac{m_1(32) - m_1(29)}{32 - 29}\ 29 + m_1(29) =$$

$$= \frac{15 - 11}{3}\ 29.2 - \frac{15 - 11}{3}\ 29 + 11 \approx 11,27 \text{ усл. ед.},$$

аналогично приведенным выше расчетам ($m_1(31,5) \approx 14,33$ усл. ед. , $v_m^n(29,2) = v_m^n(31,5) = (14,33 - 11,27) / (32 - 29) \approx 1,02$ усл. ед.). По формуле (1.7.1) вычисляем, что $f_1(29{,}2)$ = 1,8 · (29,2 – 28) ≈ 2,16 усл. ед., $f_1(31,5) \approx 6,3$ усл. ед., откуда с учетом формулы для работы $A_1(t)$ получаем $A_1(31,5) = 6,3\ \ 14,33 - 2,16\ \ 11,27 \approx 11,77$ усл. ед.

Допустим, что $m_2(29) = 10$, $m_2(32) = 11$. Тогда так же, как это делали для функции m_1, определяем, что

$m_2(29,2) \approx 10,07$;

$m_2(31,52) \approx 10,83$ усл. ед.;

$v_m^y(29{,}2) = v_m^y(31{,}5) = (10{,}87 - 10{,}07) / 3 \approx 0,27$ усл. ед.

Найдем $f_2(t)$ при t [29,32]. Имеем

$$f_2(t) = 4,2\ \ (\frac{11 - 10}{32 - 29}\ t - \frac{11 - 10}{32 - 29}\ 29 + 10)\ \frac{11 - 10}{32 - 29} - 4\ \ 10\ \ \frac{11 - 10}{32 - 29} = 0,46\ \ (t - 27,24).$$

Тогда $f_2(29,2) = 0,9$ усл. ед. ; $f_2(31,5) = 1,96$ усл. ед. и $A_2(31,5) =$ $= 1,96\ \ 10,83 - 0,9\ \ 10,07 \approx 12,17$ усл. ед.

Таким образом, объем работы, выполненной данным учащимся (данной группой учащихся) на временном участке $[29,2;\ 31,5]$ больше объема работы преподавателя.

Введенные характеристики показателей учебного процесса позволяют проводить анализ и сравнительную оценку динамики учебного процесса. Предложенные модели могут использоваться при оценке показателей любых процессов: технологических, экономических, социальных и т.д.

§ 1.8. Определение траектории обучения

Процесс цифровизации производственной и социально-экономической сфер жизни общества вызывает необходимость применения новых показателей оценки эффективности операций, мероприятий и процессов. В качестве таких показателей могут выступать:

объем,
вес [31],
скорость,
плотность,
масса,
активность и т.д. [47].

Важной проблемой является использование новых показателей эффективности организации и управления учебным процессом, которые не только выявят многомерность процесса образования, но и помогут сформировать индивидуальные траектории обучения учащихся. Можно выделить типы личности студентов [1, 26] и использовать эту информацию при проектировании траектории обучения.

Обычно качество обучения оценивается посредством баллов промежуточной и итоговой аттестации, которые слагаются из взвешенной суммы показателей посещаемости занятий, ответов у доски, результатов контрольных работ и выполненных заданий из самостоятельных работ. Однако, во-первых, вне поля зрения оказывается развитие процесса как функции качества, зависящей от времени (задача 1), во-вторых, почти не учитывается замедление (также рассматриваемое в динамике) в получении максимальных баллов (задача 2).

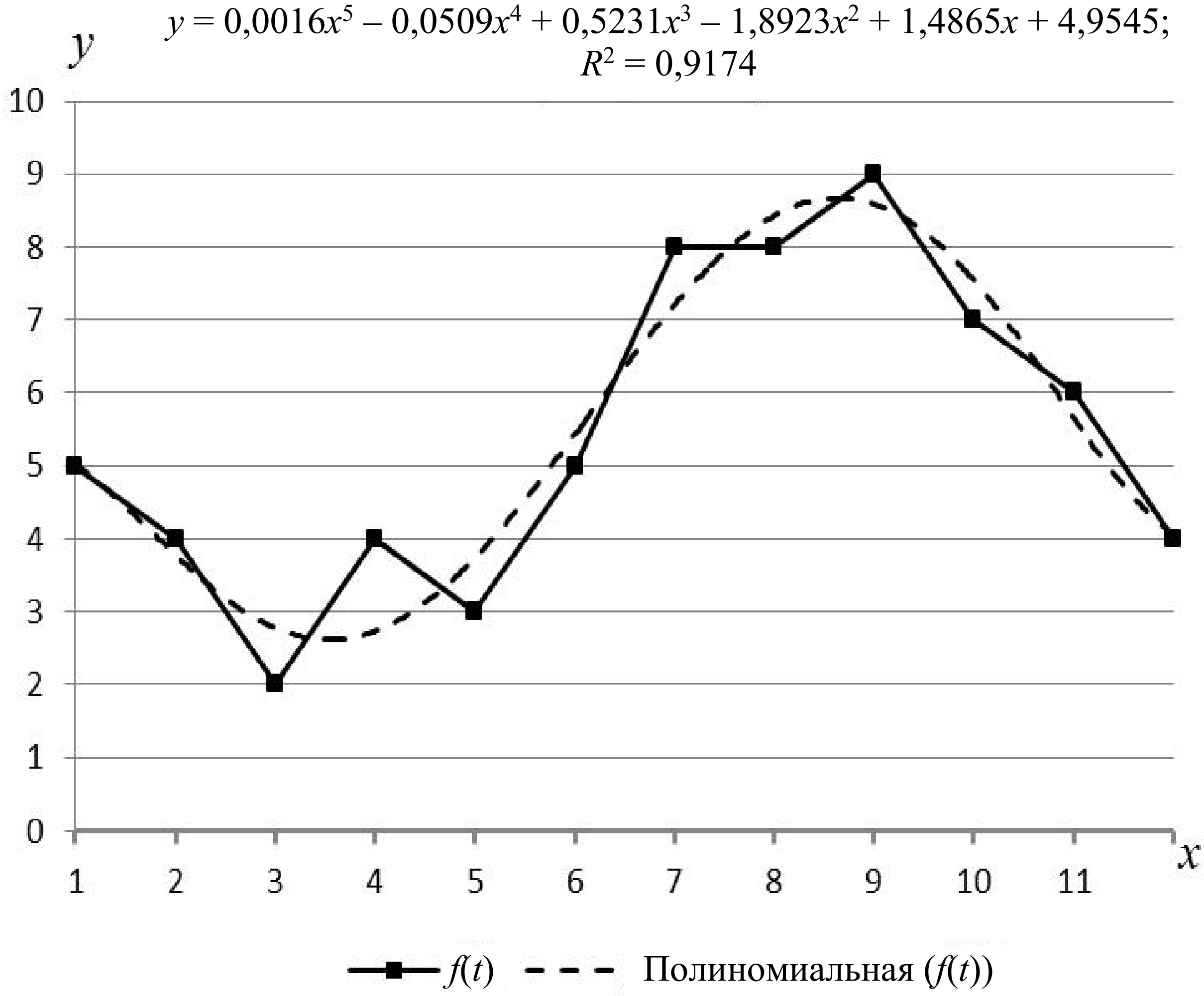
В параграфе предлагается новый метод оценки качества обучения, решающий указанные выше задачи 1 и 2. Суть его заключается в следующем. На каждом занятии для конкретного обучаемого вычисляется взвешенная (с учетом важности и сложности учебного материала) сумма баллов рейтинговой оценки: 2 балла дается за присутствие; 1 балл – за правильную реплику; 1–10 баллов – за решение задачи (задания) у доски; 2–5 баллов – за самостоятельное решение заданий. Эту сумму баллов по каждому заданию можно считать скоростью изменения оценки качества обучения. На основе этих данных строится эконометрическая модель динамики оценки качества обучения. Пусть это будет некоторая функция $f(t)$ при $t_0 \quad t \quad t_n$, где t_0 – начало отсчета времени; t_n – заключительное время.

Рассмотрим **пример** построения эконометрической модели на основе экспериментальных данных:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	5	4	2	4	3	5	8	8	9	7	6	4

В верхней строке указаны номера занятий (это могут быть практические, лабораторные занятия, а также лекции). Границы интервала времени: $t_0 = 1$, $t_n = 12$. В нижней строке указаны полученные в результате наблюдений значения функции $f(t)$.

Построим график и с помощью средства MS Excel «Линия тренда» разработаем эконометрическую модель процесса. График будет выглядеть следующим образом:



Приведенная в примере на с. 49 зависимость хорошо аппроксимируется полиномом пятой степени вида

$$y = f(x) = 0{,}0016x^5 - 0{,}0509x^4 + 0{,}5231x^3 - 1{,}8923x^2 + 1{,}4865x + 4{,}9545.$$

Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}9174$.

Эконометрическая модель характеризует скорость изменения оценки качества и показывает динамику данного учебного процесса.

Величина $A = \int_{t_0}^{t_n} f(t)dt$ равна работе по получению знаний, проделанной данным обучаемым под руководством преподавателя.

Введенные показатели $f(t)$ и A можно использовать, во-первых, для выставления соответствующих баллов аттестаций, во-вторых, для характеристики успеваемости как данного учащегося, так и в сравнении с другими учащимися. Однако процент отличников в вузе, согласно статистическим данным, колеблется от 0,06 до 0,17. Это означает, что у каждого учащегося возникает в процессе получения знаний определенная тормозящая сила, обусловленная различными причинами (обстоятельствами), например отсутствием соответствующей мотивации, неподготовленностью к занятию и т.п. Такое торможение (обозначим его как $R(t)$) можно рассматривать в качестве разности между максимальным значением A и полученным об обучаемом данным. При этом значение A можно рассматривать в каждый момент временного интервала $[t_0,\ t_n]$. Таким образом, в любое мгновение времени можно сказать, на сколько конкретный учащийся отстает от номинала (можно оценивать его в процентах). Такое торможение можно сравнить с эффектом сопротивления в физических явлениях. Процесс подачи знаний похож на поток информации. Этот поток характеризуется соответствующей плотностью $\lambda(t)$, которая может быть выражена как количество ключевых понятий, правил, алгоритмов в единицу времени, например за учебную пару; дидактических единиц; произнесенных преподавателем слов, связанных с изложением и демонстрацией учебного материала. В последнем случае величину $\lambda(t)\ R(t)$ возможно рассматривать как своеобразное напряжение в усвоении учебного материала.

Можно ввести (на основе обработки экспериментальных статистических данных) номинальное напряжение, которое будет учитываться в каждый момент времени и являться для преподавателя своеобразным индикатором различных проявлений индивидуального процесса усвоения знаний каждым обучаемым.

Введенные характеристики качества обучения могут выступать в качестве траектории обучения.

ГЛАВА 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ПОВЫШЕНИЮ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ

§ 2.1. Математическая модель оценки качества обучения

При функционировании любой организации одной из основных целей является повышение качества работы персонала. Для этого используются поощрительные (премии) и наказующие (штрафы) мероприятия. Осуществление таких мероприятий требует наличия резерва средств и оптимального управления их применением. Для наглядности изложения эта проблема рассмотрена на примере поощрения и порицания учащихся учебного заведения. Математические модели оценки качества обучения показаны, например, в работах [28, 32]. В рамках данной книги для стимулирования качественной учебы предлагается использовать балльную систему поощрений и наказаний. В качестве поощрений обычно применяются оценки «отлично», «хорошо» и вербальные средства («молодец!», «сделано прекрасно» и т.п.). Удачные реплики учащихся и их грамотные комментарии можно оценивать, например, в 1 балл. Наказующими мероприятиями могут быть предупреждение, оценка «неудовлетворительно», сильное словесное порицание (выговор). В балльном выражении перечисленные оценки могут соответствовать баллам 1, 2, 3. При присоединении к поощрительным оценкам удовлетворительной оценки получаем систему допустимых оценок для признания процесса обучения соответствующим норме. Наказующие оценки, в отличие от допустимых, выходят за границы нормы и подлежат исправлению. Допустимые и порицательные оценки образуют общее множество оценок.

При реализации учебного процесса актуальной является задача определения оптимального резерва поощрительных, наказующих, допустимых и общих баллов во время проведения занятий. Резервы поощрений, порицаний, а также удовлетворительных оценок необходимы, чтобы избежать их обесценивания.

Основные задачи решаемые в данной главе:

1. Описать в общем виде изменение доли резерва поощрений, порицаний, а также общих и допустимых оценок.

2. Показать, как осуществляется оптимальное управление резервными средствами.

3. Провести анализ различных ситуаций, обусловленных соответствующими соотношениями между параметрами, характеризующими данную систему.

2.1.1. Построение разностной модели резерва оценок в учебном процессе

Неотъемлемой составляющей процесса обучения является повседневное оценивание успешности его реализации во всех учебных группах, выраженное через систему соответствующих оценок. Будем анализировать работу учащихся на практических занятиях, контрольные мероприятия не будем рассматривать, иначе может нарушиться однородность выборочных данных, поскольку эти мероприятия предполагают фронтальный опрос, а далеко не на всех практических занятиях он может быть осуществим. Требуется определить для каждой дисциплины показатель M, равный взвешенной сумме поощрительных (наказующих, допустимых, общих) баллов, в общем случае зависящий от времени и такой, чтобы он обеспечивал минимально необходимое количество поощрительных (наказующих, допустимых, общих) оценок, задействованных в процессе формирования компетентности по данной дисциплине. В дальнейшем будем говорить о поощрительных баллах. Для наказующих, допустимых и общих все аналогично, только для них весовые коэффициенты берутся со знаком «минус», а доля резервных средств – по абсолютной величине.

Оценка присваивается данному учащемуся, если его ответ был аттестован этой оценкой; вместе со своим весом приходит из резерва, если она прикреплена к какому-то (только одному) учащемуся. Помещение оценки (вместе с ее весом) в резерв означает выполнение одного из условий:

1) это была оценка «отлично», но обладатель ее в следующий промежуток времени снизил успеваемость до 2, 3 или 4 баллов, или получил порицание; при этом, если оценка снизилась до 2, 3 или 4 баллов, то эта новая оценка закрепляется за данным учащимся до следующего опроса;

2) это была оценка «хорошо», но в следующий период ухудшилась успеваемость обучаемого или, наоборот, улучшилась (преобладание оценок «отлично»): в любом из этих случаев за учеником закрепляется новая оценка, а прежняя уходит в резерв;

3) это были слова поощрения, которые были заменены на порицание (словесное) либо удовлетворительную или неудовлетворительную оценку.

Рассмотрим прогнозируемые учебно-воспитательные мероприятия. При этом возможно определение функции резервов как по одному предмету, так и по нескольким предметам для группы обучаемых или потока.

Прежде всего отметим, что выводы, которые делаются в данной работе, основаны на использовании статистических данных обучения на протяжении ряда лет студентов одного из вузов. Был проведен анализ качества обучения математике 16 групп студентов дневного отделения с одинаковыми программами на протяжении 8 лет по специальностям «Бухгалтерский учет», «Менеджмент». Курс математики изучался в течение года. Временной отрезок рассматривался от нуля до конечного значения, определяемого количеством часов практических занятий. В качестве частичного промежутка времени рассматривался интервал в 20, 40, 80 минут (в одном из вузов учебная пара составляет 80 минут). Целесообразно деление группы на подгруппы по типу (слабая в плане успеваемости, средняя, хорошо успевающая, отличники), а также индивидуальные задания (активизируют процесс обучения). Отметим, что процесс управления резервным множеством оценок (так же, как и изучение дисциплины) существенно упрощается и может быть более наглядным для обучаемых при проведении занятий в специализированных классах на ЭВМ. Преподаватель, находящийся за своим компьютером, может в любой момент времени проконтролировать работу каждого учащегося и группы в целом (например, задавав им вопросы, скорректировав их вопросы и ответы, дав моментальную оценку степени усвоения материала).

Была разработана специальная методика оценивания. Например, при поощрительных баллах вес правильного ответа на вопрос составлял $l_1 = 2$ балла. При оценке самого ответа (в свете его полноты, четкости изложения) использовалась оценочная система «хорошо, отлично, устное поощрение». Вес правильного решения задач у доски оценивался как $l_2 = 25$ баллов (в зависимости от сложности задания), вес правильного самостоятельного подхода к решению – как $l_3 = 1$ балл, правильное решение у доски и подход к решению анализировались по системе «хорошо, отлично, устное поощрение». Разумеется, перечень этих мероприятий можно расширить.

Рассмотрим дискретную модель описания резервных средств. Пусть момент времени t_n фиксирован, $n = 0,1,\ldots,N$.

Предположим, что для поощрительных оценок для n-го интервала на основе статистических данных было спрогнозировано количество отличных $n_1(t_n)$, хороших $n_2(t_n)$ оценок, устных поощрений учащихся за хорошую работу на уроке $n_3(t_n)$. При этом $n_i(t_n) = n_{i1}(t_n) + n_{i2}(t_n) + n_{i3}$ ($i = \overline{1,3}$), где $n_{i1}(t_n)$ – число оценок за правильный ответ на вопрос; $n_{i2}(t_n)$ – за верное решение у доски; $n_{i3}(t_n)$ – за правильное самостоятельное решение. Для определения весовых коэффициентов отличных, хороших оценок и сло-весных поощрений были опрошены 600 обучаемых и 10 преподавателей, которым было предложено по десятибалльной шкале установить важность получения отличной, хорошей оценки, словесного поощрения. Затем полученные результаты усреднялись с учетом коэффициентов компетентности: коэффициент компетентности преподавателей, согласно экспертной оценке, полагался в 5 раз большим, чем у обучаемых. Для данного множества опрошенных весовые коэффициенты составили c_1 = 9,5; c_2 = 9,3; c_3 = 8,4. Количество данных мероприятий может быть измерено как взвешенная средняя арифметическая:

$$M(t_n) = \sum_{i=1}^{3} c_i \sum_{j=1}^{3} l_j n_{ij}(t_n) \Big/ \sum_{i=1}^{3} c_i \sum_{j=1}^{3} l_j .$$

В общем случае, если число видов указанных баллов равно k и каждая оценка состоит из r составляющих, то $M(t_n)$ вычисляется аналогично, но суммирование идет до k и r. Положим, что $c_i = c_i / \sum_{i=1}^{k} c_i$, $l_j = l_j \Big/ \sum_{j-1}^{r} l_j$, где c_i l_j – приведенные веса. Тогда $M_o(t_n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{r} l_j n_{ij}(t_n)$, где $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$; $\sum_{j=1}^{r} l_j = 1$. Для этого случая приведенные веса не рассматриваются.

Пусть $m_i\left(t_n\right) = \sum_{j=1}^{r} l_j \; m_{ij}(t_n)$ – резервная часть i-го вида поощрительных оценок; $m_{i1}\left(t_n\right)$ – резервная часть баллов за ответ на вопрос; $m_{i2}\left(t_n\right)$ – за решение у доски; $m_{i3}\left(t_n\right)$ – за самостоятельное решение. Тогда $c_i m_i(t_n)$ – соответствующая взвешенная величина. Доля i-го $(i = \overline{1,k})$ вида резервной части указанных оценок составит $c_i \; m_i(t_n) / M_0(t_n)$. Пусть в данный момент времени t_n доля резервной части таких оценок будет $P(t_n)$. В этом случае

$$P(t_n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \; m_i\left(t_n\right) / M_0\left(t_n\right). \qquad (2.1.1)$$

За время Δt эта доля либо увеличится, либо уменьшится. В первом случае $P(t_n)$ возрастет тем больше, чем будет больше доля $1 - P(t_n)$, которая за Δt не была использована, т.е. $P(t_n)$ представляет собой некоторую функцию, зависящую от $1 - P(t_n)$. По результатам анализа влияния на успеваемость обучаемых различных поощрений на основе статистических данных 16 групп было выявлено, что это линейная зависимость вида

$$\alpha(1 - P(t_n)) \; \Delta t ,$$

где $\alpha > 0$.

Для получения этой зависимости фиксируется промежуток времени (например, равный $\Delta t = 0{,}5$ учебной пары). Весь промежуток изучения дисциплины разбивается на временные участки одинаковой длины, равной 0,5 учебной пары. Для каждого промежутка $\Delta t = (t_n, t_{n+1})$

($n = \overline{1,N}, t_0 = 0, t_{n+1} = t_n + \Delta t,$ N – количество промежутков) для каждой s-й группы обучаемых $(s = \overline{1,m})$ определяется количество оценок «отлично» и «хорошо», словесных поощрений и т.п., полученных до момента времени t_n и перемещенных в резерв на данном временном интервале. Взвешенная сумма числа этих поощрений и оценок $\sum_{i=1}^{k} c_i \, m_i^{(s)}(t_n)$ определяет величину оценок, «ушедших» в резерв за время $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ в s-й группе (здесь $m_i^{(s)}(t_n)$ – резервная часть i-го вида поощрений s-й группы). Обозначим как P_{sn} долю оценок, отправленных в резерв на промежутке (t_n, t_{n+1}) $(n = \overline{1,N})$ в s-й $(s = \overline{1,m})$ учебной группе.

Введем в рассмотрение N случайных величин X_n по количеству рассматриваемых временных участков, задаваемых выборками $\left\{ x_{sn} \mid x_{sn} = (P_{s,n+1} - P_{s,n}) / (1 - P_{s,n}), s = \overline{1,m} \right\}$. Тогда выборочная средняя $\overline{X}_n$ случайной величины X_n вычисляется по формуле

$$\overline{X}_n = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} (P_{s,n+1} - P_{s,n}) / \left(1 - P_{s,n}\right).$$

Обозначим через Y среднюю выборочную случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$, которая также является случайной величиной. Средняя выборочная величины Y составляет

$$\overline{Y} = \frac{1}{N\,m} \sum_{n=1}^{N} \sum_{s=1}^{m} (P_{s,n+1} - P_{s,n}) / \left(1 - P_{s,n}\right).$$

При N > 30–40 случайная величина Y имеет нормальное распределение, а генеральная средняя $M[Y]$ – интервальную оценку, которая составляет

$$\overline{Y} - t_{N-1,\beta_1} \frac{S[Y]}{\sqrt{N-1}} \le M[Y] \le \overline{Y} + t_{N-1,\beta_1} \frac{S[Y]}{\sqrt{N-1}},$$

где $S[Y] = \left(\frac{1}{N\,m^2} \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{s=1}^{m} x_{sn} \right)^2 - \left(\overline{Y}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; $t_{N-1,\beta 1}$ – табличное значение распределения Стьюдента для степеней свободы $N-1$ и доверительной вероятности β_1.

Положим, что $\alpha = M[Y]$. При $\beta_1 = 0{,}99$, т.е. для β_1, близкого к 1, можно с высокой точностью предположить, что α принадлежит неслучайному отрезку $[\alpha_1, \alpha_2]$, где

$$\alpha_1 = \overline{Y} - t_{N-1,\beta 1} \frac{S[Y]}{\sqrt{N-1}} \text{ и } \alpha_2 = \overline{Y} + t_{N-1,\beta_1} \frac{S[Y]}{\sqrt{N-1}}.$$

В случае уменьшения $P(t_n)$, когда за время Δt часть незадействованных поощрительных оценок начинает использоваться, из статистических данных получен наиболее простой вид

$$\gamma \quad P(t_n)$$

уменьшения $P(t_n)$, где γ > 0. Методика определения γ аналогична методике определения α. Соответствующую доверительную вероятность будем обозначать через β_2 . При β_2 = 0,99 с высокой точностью можно считать, что γ принадлежит неслучайному отрезку $[\gamma_1, \gamma_2]$, где γ_1 и γ_2 находят аналогично α_1 и α_2 соответственно.

Отметим, что в одном из вузов α и γ оказались принадлежащими соответственно отрезкам $[0{,}25;0{,}42]$ и $[0{,}33;0{,}5]$ при $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}99$.

Таким образом, изменение $\Delta P(t_n)$ величины $P(t_n)$ за время Δt будет

$$\Delta P(t) = P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha(1 - P(t)) - \gamma P(t),$$

или

$$P(t_{n+1}) - P(t_n) = \alpha(1 - P(t_n)) - \gamma \quad P(t_n);$$

$$P(t_{n+1}) + P(t_n) \quad (\alpha + \gamma - 1) = \alpha . \qquad (2.1.2)$$

Следовательно, решение уравнения (2.1.2) запишем в виде

$$P(t_n) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \quad (1 - (\alpha + \gamma))^{t_n - t_0}, \qquad (2.1.3)$$

где t_0 – начальное значение аргумента; $P(t_0) = P_0$.

Уравнение (2.1.3) справедливо в квадрате: $\alpha_1 \quad \alpha \quad \alpha_2$ и $\gamma_1 \quad \gamma \quad \gamma_2$.

При фиксированных значениях t_0, t_n, P_0 функция P зависит от α и γ . Для отыскания промежутка изменения P как функции α и γ достаточно решить оптимизационную задачу нелинейного программирования (например, численными методами) в прямоугольнике $\alpha_1 \quad \alpha \quad \alpha_2$ и $\gamma_1 \quad \gamma \quad \gamma_2$. Тогда P заключено между своим минимальным P_1 и максимальным P_2 значениями в указанном прямоугольнике.

2.1.2. Оптимальное управление резервом оценок для дискретного случая

Пусть зафиксировано значение $P(t_n) = P$. Необходимо решить ряд важных задач. Первая состоит в определении времени t_n , для которого $P(t_n) = P$. Из формулы (2.1.3) при $\alpha + \gamma < 1$ находим

$$t_n = t_0 + \ln[(P(t_n) - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \Big/ (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma})] \Big/ \ln(1 - (\alpha + \gamma)) . \qquad (2.1.4)$$

Вторая задача заключается в отыскании резервной части P_0 в начальный момент времени для данного значения P. Эта задача решается с использованием уравнения (2.1.3):

$$P_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + (P(t_n) - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\ \ (1-(\alpha+\gamma))^{t_0-t_n}\,. \qquad (2.1.5)$$

Формулы (2.1.4) и (2.1.5) позволяют осуществлять управление резервной частью за счет корректировки t_n и P_0.

Для описания промежутка изменения t_n (при фиксированном t_0) решается оптимизационная задача нелинейного программирования для функции t_n при условиях $\alpha_1 \quad \alpha \quad \alpha_2$, $\gamma_1 \quad \gamma \quad \gamma_2$, $P_0^{(1)} \quad P_0 \quad P_0^{(2)}$, $P_1 \quad P(t_n) \quad P_2$. Аналогичная задача решается во время поиска промежутка изменения P_0 при $\alpha_1 \quad \alpha \quad \alpha_2$, $\gamma_1 \quad \gamma \quad \gamma_2$, $P_1 \quad P(t_n) \quad P_2$ для фиксированных t_0 и t_n.

Возможны следующие случаи соотношения параметров:

1. $\alpha+\gamma > 1$, $P_0 > \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. Тогда функция $P(t_n)$ колеблется вокруг оси $\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. При этом при $(\alpha+\gamma)-1 < 1$ колебания затухают.

Если $(\alpha+\gamma)-1 > 1$, то с ростом t_n амплитуда колебаний возрастает. В этом случае анализируют только те значения t_n, при которых амплитуда не уходит в отрицательную область. Смысловая трактовка для учебного процесса следующая. Если рассматриваются поощрительные (наказующие) оценки, то с возрастанием t_n происходит стабилизация доли резервных поощрительных (наказующих) оценок около значения $\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ для случая $(\alpha+\gamma)-1 < 1$.

2. $\alpha+\gamma > 1$, $P_0 < \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$, функция $P(t_n)$ имеет колебательный характер. В остальном рассуждения такие же, как и в случае 1.

3. $\alpha+\gamma = 1$. Тогда $P(t_n) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ – прямая линия.

4. $\alpha+\gamma < 1$, $P_0 < \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. В этом случае $P(t_n)$ возрастает, приближаясь снизу к линии $P(t_n) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ (рис. 2.1.1, на котором для наглядного представления точки на графике соединены ломаной линией). Содержательная трактовка такая же, как и для случая 1.

5. $\alpha + \gamma < 1$, $P_0 > \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma}$. В этом случае $P(t_n)$ убывает, приближаясь сверху к линии $P(n) = \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ (рис. 2.1.2).

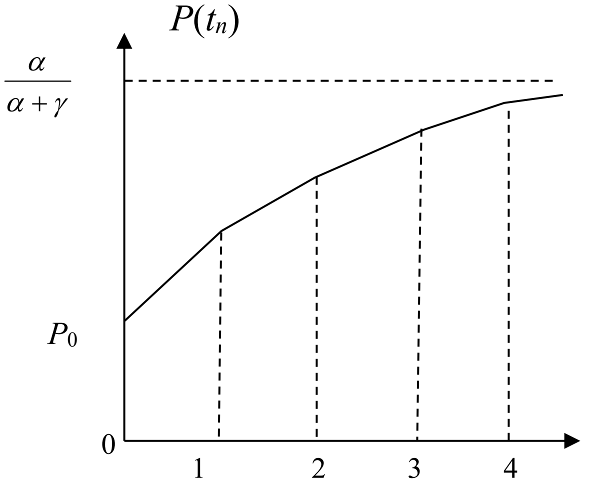


Рис. 2.1.1

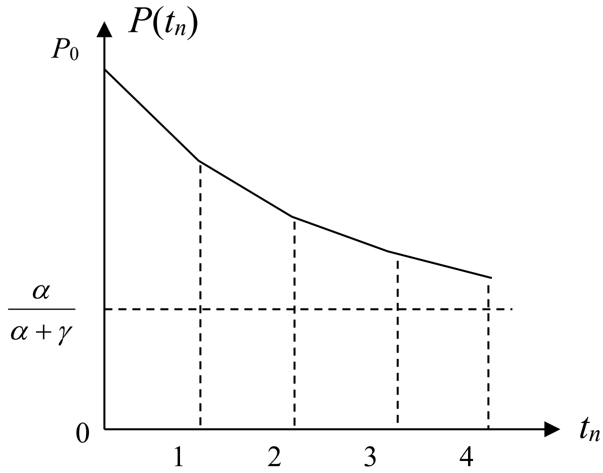


Рис. 2.1.2

Приведем результаты моделирования по данным, полученным в одном из вузов при $\alpha_1 = 0{,}25$; $\gamma_1 = 0{,}33$; $P_1(0) = 0{,}71$; $\alpha_2 = 0{,}42$; $\gamma_2 = 0{,}5$; $P_2(0) = 0{,}67$:

$t_n(t_0 = 0)$	0	1	2	3	4	5	6
$P(t_n)$	[0,67; 0,7]	[0,48; 0,55]	[0,46; 0,48]	[0,45; 0,46]	[0,44; 0,46]	[0,43; 0,46]	[0,43; 0,46]

Покажем, как осуществляется оптимальное управление резервными оценками. Из равенства (2.1.3) следует, что P является возрастающей функцией относительно P_0. Пусть P_0 P_0 P_0. Если $P(t_n)$ характеризует долю резервных поощрительных оценок, то значением P_0, минимизирующим $P(t_n)$, будет значение P_0. В случае отрицательных оценок их максимальное резервное количество будет достигаться при $P_0 = P_0$. При перемещении границ P_0 изменяется резерв минимального количества поощрительных и максимального порицательных оценок.

Отметим, что при изменении начального значения P_0 на величину ε функция $P(t_n)$ изменяется на величину ε $(1-(\alpha+\gamma))^{t_0 - t_n}$. Действительно,

$$\Delta P(t_n) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + (P_0 + \varepsilon - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\ (1-(\alpha+\gamma))^{t_n - t_0} - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} -$$
$$-(P_0 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\ (1-(\alpha+\gamma))^{t_n - t_0} = \varepsilon\ (1-(\alpha+\gamma))^{t_n - t_0}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\varepsilon \to 0$, то $\Delta P(t_n) \to 0$.

Решение $P(t_n)$ является асимптотически устойчивым. В самом деле, если $\widetilde{P}(t_n) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + (\widetilde{P}_0 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\ (1-(\alpha+\gamma))^{t_n - t_0}$ – произвольное решение уравнения (2.1.3), причем $\widetilde{P}(t_0) = \widetilde{P}_0$, то

$$\left|\widetilde{P}(t_n) - P(t_n)\right| = (1-(\alpha+\gamma))^{t_n - t_0}\ \left|\widetilde{P}_0 - P_0\right|.$$

Тогда $\left|\widetilde{P}(t_n) - P(t_n)\right|$ будет меньше, чем ε, при всех $t_n \quad t_0$, если $\left|\widetilde{P}_0 - P_0\right| < \delta = \varepsilon$, где ε – произвольное число, большее нуля. При этом, очевидно, что $\lim\limits_{t_n \to} \left|\widetilde{P}(t_n) - P(t_n)\right| = 0$.

Возвращаясь к составляющим $P(t_n)$ долям различных видов оценок поощрительного (порицательного, допустимого, общего) характера. Заметим, что для любого фиксированного момента времени t_n имеем оптимизационную задачу, которая формулируется следующим образом. Требуется найти целые неотрицательные значения $m_{ij}(t_n)$, $(i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,s})$, такие, что целевая функция $L = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \sum\limits_{j=1}^{s} l_j m_{ij}(t_n) - M_0(t_n)P(t_n)$ имеет минимум, причем $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i \sum\limits_{j=1}^{s} l_j m_{ij}(t_n) - P(t_n)\ M_0(t_n) \quad 0$.

Действительно, в любой момент времени t_n числовое значение $P(t_n)$ известно. Нужно найти целые неотрицательные значения $m_{ij}(t_n)$, которые дают минимум разности между указанной суммой и $P(t_n)M_0(t_n)$, при этом, очевидно, и разность, и ее минимум равны нулю. Изложенная задача целочисленного программирования численно решается, например, с помощью средства «Поиск решения» MS Excel. Таким образом, определяется долевое участие различных видов поощрительных оценок в формировании резерва.

Процесс управления резервными оценками может быть эффективным или неэффективным. В качестве показателя эффективности можно рассматривать отношение значения $P(t_n)$ для конкретной учебной группы по данной дисциплине к планируемому или оптимальному в данных условиях его значению для фиксированного момента времени. На основе этого коэффициента проводится градация относительно процесса управления резервным множеством оценок на данном временном промежутке. Так, если этот коэффициент превышает 0,9, то можно сделать вывод об отличном управлении; если он находится в пределах 0,8–0,9, то, скорее всего, перед нами хорошее управление, в пределах 0,7–0,8 – удовлетворительное. Если коэффициент меньше чем 0,7, то можно говорить о неудовлетворительном управлении. Возможна также ситуация, когда этот коэффициент будет больше 1. Значит, планируемые показатели оказываются заниженными, поэтому необходима корректировка программы и планов изучения дисциплины.

Научная значимость и новизна данной работы заключаются в описании модели множества резервных оценок системы обучения и анализе зависимости резервной части от параметров уравнений, описывающих данную модель. На основе построенной модели можно осуществлять оптимальное управление резервом. Полученные результаты могут применяться, прежде всего, для решения задач управления персоналом в социально-экономической сфере, а также в технике, экологии, военном деле и прочих областях.

§ 2.2. Математическая модель оптимального управления резервными средствами в учебном процессе для непрерывного случая

Математические модели оценки качества обучения исследованы, например, в работах [22, 24, 28, 32]. В предыдущем параграфе было рассмотрено управление резервными средствами для дискретного случая. В данном параграфе для стимулирования качественной учебы предлагается использовать балльную систему поощрений и штрафов для непрерывного случая.

2.2.1. Определение основных выборочных характеристик резерва оценок в учебном процессе для непрерывного случая

В качестве частичного промежутка можно рассматривать промежуток времени в 0,25 учебной пары, 0,5 учебной пары и т.д. Пусть все промежутки будут длины Δ.

Имеют место формулы, аналогичные (2.1.1), и определение $M(t_n)$, но для времени *t*.

Введем *N* случайных величин X_n, которые задаются выборками $\{x_{sn} \mid x_{sn} = P_{s,n+1}/(1-P_{s,n})\Delta,\ s=\overline{1,m}\}$ и содержат выборочные средние $\overline{X}_n$:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} P_{s,n+1}/\left(1 - P_{s,n}\right)\Delta .$$

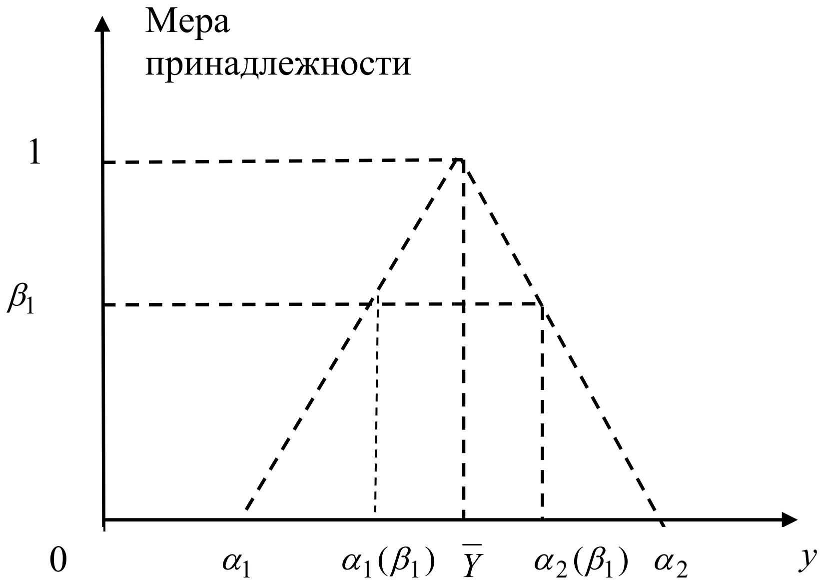
Пусть Y – средняя выборочная случайных величин X_1, X_2, …, X_N, которая также является случайной величиной со средней выборочной:

$$\overline{Y} = \frac{1}{N\ m}\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{m} P_{s,n+1}/\left(1 - P_{s,n}\right)\Delta .$$

Случайная величина Y при N > 30–40 имеет нормальное распределение.

Интервальную оценку генеральной средней $M[Y]$ находим так же, как и в дискретном случае при доверительной вероятности β.

Положим, что $\alpha = M[Y]$. Однако точного значения $M[Y]$ мы не знаем, т.е. имеем дело с нечетким числом, которое при уровне принадлежности $\beta = 0{,}99 \approx 1$ можно задать парой чисел $[\alpha_1, \alpha_2]$ [82], причем $\alpha_1 = \overline{Y} - t_{N-1,\beta}\dfrac{S[Y]}{\sqrt{N-1}}$ – левая граница числа α, $\alpha_2 = \overline{Y} + t_{N-1,\beta}\dfrac{S[Y]}{\sqrt{N-1}}$ – правая. Тогда при произвольном уровне принадлежности β_1 значение α (обозначим его через $\alpha(\beta_1)$) будет определяться парой $[\alpha_1(\beta_1), \alpha_2(\beta_1)]$, где $\alpha_1(\beta_1) = \alpha_1 + \beta_1(\overline{Y} - \alpha_1)$, $\alpha_2(\beta_1) = \alpha_2 - \beta_1(\alpha_2 - \overline{Y})$ (это следует из треугольного представления нечетких чисел [82]). Ниже показано представление нечеткого числа для меры принадлежности, равной 1, и произвольного значения $0 < \beta_1 < 1$:



Чтобы запись не была громоздкой, в дальнейшем вместо $\alpha_1(\beta_1)$ и $\alpha_2(\beta_1)$ будем использовать обозначения α_1 и α_2 соответственно, подразумевая уровень принадлежности β_1. Величина α является характеристикой отношения доли перемещенных в резерв оценок к доле прикрепленных на предыдущем временном промежутке. Таким же образом определяется показатель отношения доли ушедших в резерв оценок в данном промежутке к аналогичной доле на предыдущем. Показатель γ будем обозначать как $[\gamma_1, \gamma_2]$ при уровне значимости β_2. Вернемся к равенству (2.2.1) для непрерывного случая, чтобы составить дифференциальную модель резерва оценок.

2.2.2. Построение дифференциальной модели резерва оценок

За время Δt $(\Delta t \quad \Delta_n)$ доля резерва, определяемого по формуле (2.1.1), либо увеличится, либо уменьшится. В первом случае $P(t)$ возрастет тем больше, чем будет больше доля $1 - P(t)$, которая за Δt не была использована, и чем больше Δt. Таким образом, $P(t)$ представляет собой некоторую функцию, зависящую от $1 - P(t)$ и Δt. Из определения α и статистических данных анализа успеваемости различных учебных групп следует, что это линейная зависимость вида

$$\Delta_1 P(t + \Delta t) = \alpha(1 - P(t)) \quad \Delta t.$$

В случае уменьшения $P(t)$, когда за время Δt часть незадействованных поощрительных оценок начинает применяться, из статистических данных с учетом определения показателя γ получен наиболее простой вид, а именно

$$\Delta_2 P(t + \Delta t) = \gamma \quad P(t)\Delta t,$$

где $\gamma > 0$.

Таким образом, изменение $\Delta P(t)$ величины $P(t)$ за время Δt будет составлять

$$\Delta P(t) = \Delta_1 P(t) + \Delta_2 P(t) = \alpha(1 - P(t))\Delta t - \gamma P(t)\Delta t. \qquad (2.2.1)$$

Предположим, что внутри и в левой границе каждого n-го интервала функция резерва $P(t)$ непрерывна. Данное допущение имеет следующую основу. Из формулы (2.2.1) следует, что приращение $\Delta P(t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Поскольку α и γ – нечеткие числа, целесообразно функцию $P(t)$ также характеризовать парой чисел $P_1(t)$ и $P_2(t)$, соответствующих левой и правой границе $P(t)$. Аналогично $\Delta P(t)$ характеризуется парой $\Delta P_1(t)$ и $\Delta P_2(t)$. Таким образом, изменение $\Delta P_i(t), (i = 1,2)$ величины $P_i(t)$, за время Δt на n-м интервале будет

$$\Delta P_i(t) = P_i(t + \Delta t) - P_i(t) = (\alpha_i(1 - P_i(t)) - \gamma_i P_i(t))\Delta t.$$

Разделив это равенство на Δt и устремив Δt к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \alpha_i (1 - P_i(t)) \Delta t \gamma_i P_i(t) \Delta t = \alpha_i \big(1 - P_i(t)\big) - \gamma_i P_i(t),$$

откуда согласно операциям над нечеткими числами в треугольной форме [89] для $i = 1, 2$ на каждом n-м интервале $\Delta_n = [t_n, t_{n+1}]$ имеем

$$P_i(t) + (\alpha_1 + \gamma_i) P_i(t) - \alpha_i = 0 .$$

Как известно,

$$P_i(t) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \gamma_i} + (P_n^{(i)} - \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \gamma_i}) \; e^{\alpha_i + \gamma_i \quad (t_n^{(i)} - t)}, \tag{2.2.2}$$

где t_n – начальный момент времени и $P(t_n) = P_n$.

По формуле (2.2.2) можно найти резервное множество оценок для любых внутренних точек промежутков $[\alpha_1, \alpha_2]$ и $[\gamma_1, \gamma_2]$. Используя запись нечетких чисел, равенство (2.2.2) для $i = 1, 2$ можно записать в общем виде, т.е.

$$\big[P_1(t), P_2(t)\big] = \frac{[\alpha_1, \alpha_2]}{[\alpha_1, \alpha_2] + [\gamma_1, \gamma_2]} + \quad P_n^{(1)}, P_n^{(2)} \quad - \frac{[\alpha_1, \alpha_2]}{\alpha_1, \alpha_2 \quad + [\gamma_1, \gamma_2]}$$

$$e^{\left(\; \alpha_1, \alpha_2 \; + \; \gamma_1, \gamma_2 \; \right) \;\; t_n, t_n \; - [t,t]} . \tag{2.2.3}$$

В дальнейшем во избежание громоздкости записи будем опускать индекс i в записи переменных. Приведенные ниже результаты будут верны как для левой, так и для правой границы нечеткого числа, а также и для любой внутренней точки промежутка, определяемого данными границами. Можно сказать, что линия $P(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ будет горизонтальной асимптотой.

Кроме того, очевидно, что $P(t) \to \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma} + (P_0 - \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \; e^{(\alpha + \gamma) t_1}$ при $t \to 0$ и $P(t) \to P_n$ при $t \; \to t_n$. Найдем, что

$$P\,(t) = -(P_n - \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}) \;\; (\alpha + \gamma) \;\; e^{(\alpha + \gamma)(t_n - t)} .$$

При $P_n - \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma} < 0$ производные $P\,(t) > 0$ и $P\;\,(t) < 0$, поэтому $P(t)$ – возрастающая выпуклая функция на данном n-м промежутке. При $P_n - \dfrac{\alpha}{\alpha + \gamma} > 0$ производные $P\,(t) < 0$ и $P\;\,(t) > 0$, т.е. $P(t)$ – убывающая вогнутая функция. Если $P(t)$ – доля резервных средств поощрительных мероприятий, то увеличение $P(t)$ связано с ухудшением успеваемости, а уменьшение – с ее улучшением. Предельная граница падения соответствует значению $P(t)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$, и эта ситуация задается условием $P(t_n)<\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. Предельная граница повышения успеваемости определяется тем же значением ($P(t)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$), но при условии $P(t_n)>\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$.

В случае когда $P(t)$ характеризует долю резервных порицательных оценок, увеличение $P(t)$ соответствует повышению успеваемости, а снижение – ухудшению успеваемости.

2.2.3. Оптимальное управление резервными средствами

Покажем, как осуществляется оптимальное управление резервными оценками. Из формулы (2.2.2) следует, что $P(t)$ является возрастающей функцией относительно P_n . Пусть P_n $\quad P_n$ $\quad P_n$. Если $P(t)$ характеризует долю резервных поощрительных оценок, то значением P_n , минимизирующим $P(t)$, будет значение P_n . В случае порицательных оценок их максимальное резервное количество будет достигаться при $P_n = P_n$.

По формуле (2.2.4) находим время *t*, для которого $P(t)=P$:

$$t=\frac{1}{\alpha+\gamma}\ \ln[(P_n-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\Big/(P-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})]+t_n, \qquad (2.2.4)$$

при этом нечеткое описание резерва $\left[P_1(t),P_2(t)\right]$ предполагает решение в виде $\left[t_1, t_2\right]$.

Из равенства (2.2.2) получается резервная часть P_n в начальный момент времени t_n для данного значения P и промежутка $[t_n, t_{n+1}]$:

$$P_n=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+(P-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\ e^{(\alpha+\gamma)(t-t_n)}. \qquad (2.2.5)$$

Нечеткое описание сводится к результату $\left[P_n^{(1)}, P_n^{(2)}\right]$.

С помощью формул (2.2.4) и (2.2.5) можно регулировать резервную долю $P(t)=P$ за счет изменения рассматриваемого момента времени или корректировки P_n . При нечетком моделировании для данного нечеткого числа $P(t)=\left[P_1(t),P_2(t)\right]$ (при $t \quad [t_n,t_{n+1}]$) оценки резервных средств в случае отсутствия других данных анализ соответствия этой оценки допустимому уровню происходит следующим образом. Из формул для определения α_1, α_2, γ_1, γ_2 , а также уравнения (2.2.3) находят соответствующие уровни принадлежности β_1 и β_2 . Определяется значение $\beta=\min\{\beta_1, \beta_2\}$, которое характеризует степень принадлежности доли резервных поощрительных средств $P(t)$ промежутку $\left[P_1(t),P_2(t)\right]$. Полученное значение β сравнивается с нормативным. Если оно оказывается меньше нормы, то это значит, что возможная оценка $P(t)=\left[P_1(t),P_2(t)\right]$ должна быть откорректирована в сторону сужения слева и справа, т.е. изменения левой и правой границы $P(t)$. Возможно, будет достаточно изменения только одной границы.

Так же как и в дискретном случае, можно показать, что $P(t)$ является асимптотически устойчивым решением. Аналогично решается задача отыскания числа резервных поощрительных оценок каждого вида [21] для фиксированного времени t и осуществляется классификация процесса управления резервными оценками по критерию эффективности.

Для процесса управления в нечетких условиях в непрерывном случае вводится понятие оценки риска неэффективности управления, похожее на оценку риска неэффективности проекта [89]. Делается это относительно значения $P(t)=\left[P_1(t),P_2(t)\right]$, показывающего долю резервных оценок, и критериального значения $G=\left[G_1,G_2\right]$. Проверяется условие $P(t)\quad G$. Для этого графически при разных соотношениях $P_1(t),P_2(t),G_1,G_2$ находят площадь зоны неэффективности. Степень неэффективности определяется через геометрическую вероятность для данного уровня принадлежности с последующим интегрированием полученной функции на участке изменения вышеназванного уровня.

§ 2.3. Модели развития учебного процесса

2.3.1. Модель динамики качества обучения

При описании уровня реализации учебного процесса важную роль играют показатели качества обучения, которые либо оцениваются точечно оценками, полученными в результате тестирования, либо задаются эконометрическими уравнениями, построенными на основе соответствующего статистического материала. В данном параграфе предлагается новая модель такого описания. В ней используется аппарат разностных уравнений, что дает возможность анализировать зависимость значений показателей в данный период времени от предыдущих периодов и тем самым определить динамику показателя.

Основные показатели качества обучения были рассмотрены в предыдущих параграфах.

Построим некоторые модели математического описания изменения качества обучения. Пусть $X(t)$ – значение показателя качества, вычисленное в определенной балльной системе в период времени t, $X(t-1)$, $X(t-2)$ – значения этого показателя в $(t-1)$-м и $(t-2)$-м периодах, $A(t)$ и $B(t)$ – значения факторов, повышающих и снижающих соответственно показатель качества в период t. Если таких факторов несколько, то рассматривается их взвешенная сумма в заданной балльной системе. Будем использовать предположение о представлении показателя качества в виде суммы «движущей» и «тормозящей» составляющих, т.е.

$$X(t) = A(t) + B(t)\,. \tag{2.3.1}$$

Рассмотрим наиболее распространенные (согласно статистическим данным) зависимости. Предположим, что значение $A(t)$ прямо пропорционально приросту показателя качества, т.е.

$$A(t) = k\left[X(t-1) - X(t-2)\right], \tag{2.3.2}$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности, показывающей прирост показателя качества, приходящийся на единицу величины $A(t)$.

Пусть, кроме того, значение показателя $B(t)$ на данном этапе зависит линейно от показателя качества на предыдущем, т.е.

$$B(t) = aX(t-1) + b\,, \tag{2.3.3}$$

где a – скорость изменения $B(t)$; b – начальное значение $B(t)$.

Из формул (2.3.1)–(2.3.3) получаем линейное неоднородное уравнение II порядка:

$$X(t) = (a+k)X(t-1) - kX(t-2) + b\,, \tag{2.3.4}$$

аналогичное известной в экономике модели делового цикла Самуэльсона – Хикса и связывающее показатель качества с его значениями в предыдущий, настоящий и будущий периоды. качестве частного решения данного уравнения можно взять равновесное решение X_p, такое, что $X_p = X(t) = X(t-1) = X(t-2)$, тогда из формул (2.3.1)–(2.3.3) следует, что $X_p = b(1-a)^{-1} = \dfrac{b}{1-a}$. Напомним, что общее решение выражения (2.3.4) слагается из частного X_p и общего решений соответствующего однородного уравнения. Для отыскания общего решения этого уравнения составим характеристическое уравнение $r^2 - (a+k)\ r + k = 0$ и найдем его корни. Итак, $r_{1,2} = \dfrac{a+k\pm\sqrt{D}}{2}$, где $D = a^2 + 2ak + k^2 - 4k$. Далее рассматриваем разные случаи:

1) пусть $D = 0$. Тогда $a_{1,2} = -k \pm 2\sqrt{k}$ и $r_1 = r_2 = (a+k)/2$. Получаем, что общее решение имеет вид

$$X(t) = \frac{b}{1-a} + C_1 \ \frac{a+k}{2}^{\,t} + C_2\ t\ \frac{a+k}{2}^{\,t},$$

где C_1 и C_2 – постоянные, которые находят из начальных условий;

2) пусть $D > 0$. Тогда $a \in (-\infty, -k - 2\sqrt{k}) \cup (-k + 2\sqrt{k}, +\infty)$ и

$$X(t) = \frac{b}{1-a} + C_1 \left(\frac{a+k+\sqrt{D}}{2}\right)^t + C_2 \left(\frac{a+k-\sqrt{D}}{2}\right)^t;$$

3) если $D < 0$, то $a \in (-k - 2\sqrt{k}, -k + 2\sqrt{k})$ и $X(t) = \dfrac{b}{1-a} +$ $+ C_1\rho^t \cos\gamma\, t + C_2\rho^t \sin\gamma\, t$, где $\rho = \sqrt{\left(\dfrac{a+k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-D}}{2}\right)^2} = \sqrt{k}$; $\mathrm{tg}\gamma = \dfrac{\sqrt{-D}}{a+k}$.

Таким образом, в зависимости от значений a и k возможны разные типы динамики качества обучения. Она может быть растущей или затухающей и при этом иметь или не иметь колебательный характер.

Возможны и другие варианты формул (2.3.2) и (2.3.3), например:

$$A(t) = aX(t-1) + b, \qquad A(t) = k\left[X(t-1) - X(t-2)\right] + c,$$

$$B(t) = k\left[X(t-1) - X(t-2)\right] + d; \qquad B(t) = l\left[X(t-1) - X(t-2)\right] + e;$$

$$A(t) = a\,X(t-1) + b,$$

$$B(t) = c\,X(t-1) + d.$$

Научное значение рассмотренных моделей заключается в том, что они могут быть использованы для решения одной из самых главных задач – задачи управления качеством обучения.

2.3.2. Модель поиска равновесного значения показателя качества

Одна из важнейших задач в учебном процессе заключается в отыскании равновесных значений показателей качества. Эти значения находят следующим образом. Пусть X, Y, Z – показатели качества, причем $X = X(Z)$ и $Y = Y(Z)$. Тогда значение $Z = z_0$ называется равновесным для *X* и *Y*, если $X(z_0) = Y(z_0)$.

В качестве примера исследуем паутинообразную модель процесса обучения, представляющую собой простую модель поиска равновесного значения сложности усвоения материала p_0, в которой объемы предложенного $D_1(p)$ и усваиваемого $D_2(p)$ учебного материала, рассматриваемые как функции от сложности *p*, равны между собой, т.е. $D_1(p_0) = D_2(p_0)$.

Предположим, что решение об объеме предложенного для изучения материала принимается в зависимости от сложности материала в предыдущий период времени.

Пусть в конкретный период времени предложен учебный материал в объеме $D_1(p) = q_1$, обусловленный трудностью предлагаемого материала p_1 в предыдущий период (рис. 2.3.1; на рис. 2.3.2 показан расходящийся процесс). Эта сложность больше равновесной p_0, поэтому на кривой $D_2(p)$ ей соответствует объем $D_2(p_1)$, равный q_2, который меньше равновесного значения q_0. Следовательно, преподавателю приходится упрощать предлагаемый материал до величины сложности p_2, которая оказывается меньше равновесной. Это приводит к увеличению объема усвоения до величины q_3, что соответствует сложности усвоения p_3, которая больше равновесной p_0, поэтому ей на кривой $D_2(p)$ соответствует значение q_4. Оно меньше равновесного q_0, а значит, преподаватель должен снизить сложность изучения до значения p_4, которое по-прежнему меньше равновесного p_0. Поэтому данному значению соответствует объем усвояемого материала q_5, меньший q_0. В результате преподаватель снижает сложность предлагаемого материала до величины p_5, что соответствует объему усвоения q_6. Таким образом, получаем последовательность значений q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, …, сходящуюся к равновесному значению q_0, и последовательность p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, …, сходящуюся к равновесному значению p_0. Графически процесс изменения показателя качества представляет собой спираль, которая сходится к точке равновесия (q_0, p_0). Но так бывает не всегда (как мы говорили выше, рис. 2.3.2 иллюстрирует расходящийся процесс). На сходимость спирали влияют различные факторы, в частности эластичность.

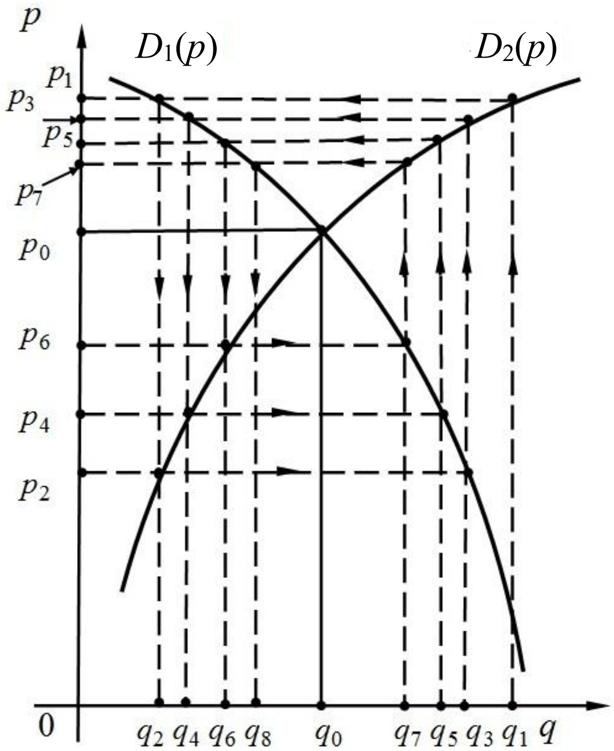


Рис. 2.3.1

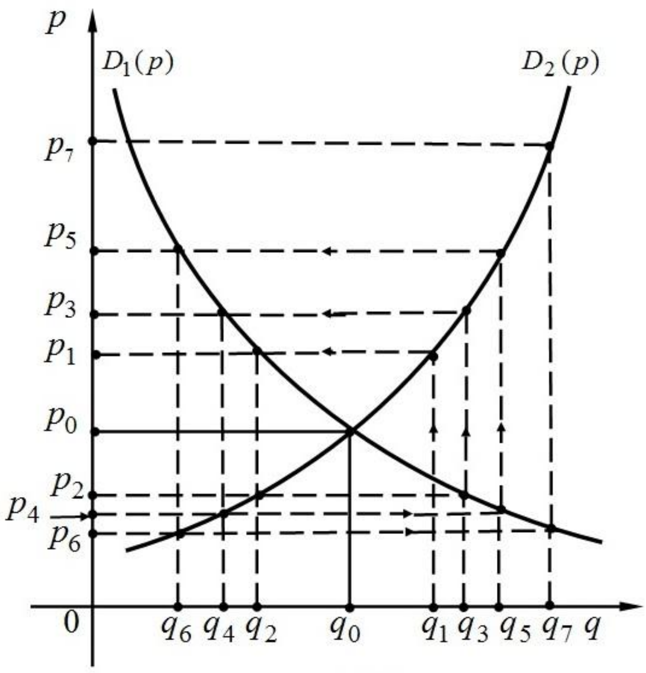


Рис. 2.3.2

Аналогично тому, как это делается для известной математической модели «спрос – предложение», построенная модель в случае линейной зависимости объемов D_1 и D_2 от сложности p с учетом того, что объем D_1 зависит от сложности на предыдущем этапе, а D_2 – от сложности на данном этапе, описывается системой

$$\begin{aligned} D_2(t) &= a - bp(t), \\ D_1(t) &= m + np(t-1), \end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

где a, b, m, n – постоянные величины.

При условии, что $D_1 = D_2$, система (2.3.5) преобразуется в разностное уравнение первого порядка, а именно

$$bp(t) + np(t-1) = a - m,$$

решением которого является зависимость сложности усвоения учебного материала от времени:

$$p(t) = C\left(-\frac{n}{b}\right)^t + \frac{a-m}{b+n}, \qquad (2.3.6)$$

где C – постоянная величина, определяемая из начальных условий.

Из формулы (2.3.6) следует, что в случае линейной зависимости объемов D_1 и D_2 от сложности p динамика сложности имеет колебательный вид, причем при $n < b$ последовательность $\{p(t)\}$ сходится к равновесному значению $p_0 = \frac{a-m}{b+n}$ (см. рис. 2.3.1), при $n > b$ последовательность $\{p(t)\}$ расходится (см. рис. 2.3.2), при $n = b$ имеет место циклическое колебание сложности относительно равновесного состояния. Похожая модель может быть построена для оценки любого показателя качества учебного процесса.

§ 2.4. Модель повышения эффективности усвоения знаний

Современный учебный процесс предполагает использование новых технологий [80], подходов, методов и инструментов [6, 24, 64]. При реализации цифрового обучения следует учитывать особенности обучающихся [84], в частности те, что касаются усвоения ими учебной информации [86].

В отличие от традиционного учебного процесса, в котором оценивался прежде всего объем транслируемой информации, процесс приобретения и усвоения знаний в информационном обществе направлен на получение знаний, умений и навыков, необходимых для реализации компетенций, требующихся для успешной реализации будущей профессиональной деятельности. Одним из современных направлений в организации учебного процесса является STEM-образование [12]. Оно предполагает междисциплинарный подход и применение метода моделирования. Необходимо разработать новые модели управления знаниями, пригодные для информационного общества.

Цель данного параграфа – разработка модели усвоения знаний в учебном процессе и контроля за этим процессом.

Новизна работы состоит в том, что предлагается пошаговая ликвидация пробелов в сфере понятий. В предыдущих исследованиях авторов процесс ликвидации полученных неудовлетворительных оценок трактовался иначе: начальное состояние системы было связано с количеством неудовлетворительных оценок, полученных к концу рассматриваемого временного периода с последующей ликвидацией – при переходе от одного состояния к другому – одной неудовлетворительной оценки.

Предлагаемый в этой книге метод является более эффективным, так как неусвоенные понятия разбираются сразу. Естественно, вероятность полного усвоения этих определений можно рассчитать по формулам, приводимым в следующем параграфе.

2.4.1. Модель получения и усвоения знаний

Процесс повышения качества знаний студентов связан с двумя информационными потоками: получением новой информации и ее усвоением. Под получением информации по учебной дисциплине будем понимать донесение до студентов определенного количества сведений (ключевых понятий, определяющих содержание изучаемых компетенций). Запоминание новой информации определяется достаточным уровнем умений, навыков, приемов и т.д. Будем называть этот поток усвоенными ключевыми понятиями дисциплины. Можно исследовать индивидуальный процесс приобретения знаний или коллективный (учебной группы, нескольких групп, всего учебного заведения в целом), качество усвоения знаний по конкретному предмету или по совокупности дисциплин.

С точки зрения системного анализа обучаемый (группа или группы обучаемых) – это некоторая система, которая в учебном процессе может находиться в одном из *n* состояний. Обозначим эти состояния как $S_0, S_1, ..., S_n$. Будем считать, что состояние S_i $(i = \overline{0, n})$ связано с количеством знаний (ключевых понятий), сообщаемых преподавателем. Переход из состояния системы S_i в состояние S_{i+1} $(i = \overline{0, n-1})$ происходит под воздействием пуассоновского потока неусвоенных ключевых понятий с плотностью $\lambda(t)$, обратный переход вызывается также пуассоновским потоком, но уже усвоенных ключевых понятий. Плотность второго потока обозначим как $\mu(t)$.

Свойство пуассоновского потока – отсутствие последействия – определяется тем, что количества не усвоенных обучаемым (группой обучаемых) понятий в *k*-ю и *l*-ю учебные недели ($k < l$), не зависят друг от друга. Другое свойство пуассоновского потока – ординарность – связано с тем обстоятельством, что за достаточно малый временной интервал (например, за 1 минуту) у обучаемого будет не более одного неусвоенного понятия. Аналогичные свойства пуассоновского потока справедливы и для потока усвоенных понятий. Данный поток обусловливается успеваемостью обучаемых, которая зависит от множества факторов. Поэтому количество усвоенных ключевых понятий за конкретное время определяется успеваемостью обучаемых в данном интервале и почти не зависит от успеваемости в предыдущие периоды. Интервал времени можно выбрать таким образом, чтобы было возможно усвоение только одного понятия.

Как показано в работе [11], в системе протекает марковский процесс, если смена ее состояний вызвана пуассоновским потоком событий. Для указанного процесса характерно то, что его дальнейшее развитие не зависит от предыстории, а обусловливается только его настоящим состоянием. Процесс формирования компетенций у данного обучаемого (группы обучаемых) по предмету можно считать марковским, так как уровень знаний, умений и навыков учащегося в будущем определяется его подготовкой в настоящем.

Учебный процесс получения и усвоения знаний, рассматриваемый как марковский процесс, представлен на рис. 2.4.1.

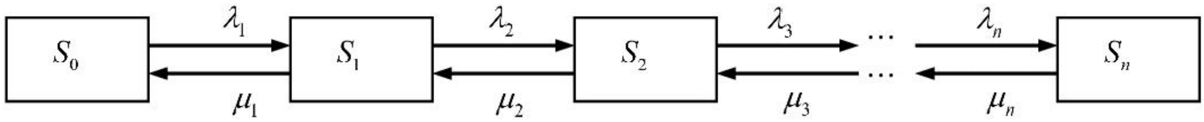


Рис. 2.4.1

На рис. 2.4.1 S_i $(i = \overline{0,n})$ – состояния, показывающие достигнутый уровень усвоения знаний данным обучаемым (группой) на данный момент времени. Эти состояния могут характеризовать балльную (или рейтинговую) успеваемость. Начальное состояние системы обозначено как S_0, конечное – как S_n; $\lambda_i = \lambda_i(t)$ – плотность прямого информационного потока неусвоенных знаний (ключевых понятий), переводящего систему из состояния S_{i-1} в состояние S_i $(i = \overline{1,n})$; $\mu_i = \mu_i(t)$ – плотность обратного потока (из S_{i+1} в S_i $(i = \overline{1,n-1})$; P_i – вероятность нахождения системы в состоянии S_i. Будем считать все плотности потоков (λ_i и $\mu_i (i = \overline{1,n})$) постоянными на интервале наблюдений учебного процесса. В этом случае граф на рис. 2.4.1 описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 P_0 = \mu_1 P_1 \\ &\lambda_2 P_1 = \mu_2 P_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\lambda_n P_{n-1} = \mu_n P_n \end{aligned} \qquad (2.4.1)$$

при этом

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1. \qquad (2.4.2)$$

Из условий (2.4.1) и (2.4.2) получаем предельные вероятности состояний системы:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\mu_2 \mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_1}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_1}\right)^{-1}; \qquad (2.4.3)$$

$$P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_0;\ P_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\mu_2 \mu_1} P_0;\ \ldots;\ P_n = \frac{\lambda_n \ldots \lambda_1}{\mu_n \ldots \mu_1} P_0. \qquad (2.4.4)$$

Будем рассматривать стационарный (установившийся) режим, при котором вероятности P_i постоянны. Вероятность P_i характеризует среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i.

Не нарушая общности, исследуем описанную выше ситуацию для четырех интервалов времени (рис. 2.4.2).

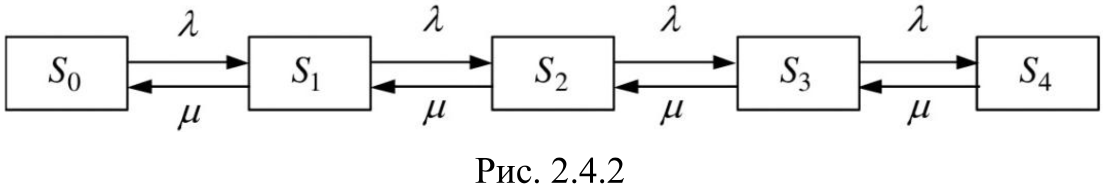


Рис. 2.4.2

Пусть на каждом временном интервале преподавателем излагается ровно одно ключевое понятие. Имеется два потока:

1) ключевое понятие не усвоено студентом (поток λ_i);

2) усвоено (поток μ_i).

На основе своего опыта преподаватель оценивает среднее время $\bar{t}$ усвоения каждого ключевого понятия (равно 0,53 недели). Начальное состояние S_0 соответствует началу учебного процесса, когда нет неусвоенных ключевых понятий; S_4 – конечное состояние (четыре неусвоенных понятия); S_3 – три неусвоенных понятия; S_2, S_1 – два или одно неусвоенное понятие соответственно. При этом плотность потока неусвоенных понятий $\lambda = 1$. Плотность усвоенных понятий можно вычислить как $\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{0,53} = 1,9$ понятия в неделю.

По формуле (2.4.3) и совокупности формул (2.4.4) определяем вероятности P_0, P_1, P_2, P_3 и P_4:

$$P_0 = \left(1 + \frac{1}{1,9} + \frac{1}{(1,9)^2} + \frac{1}{(1,9)^3} + \frac{1}{(1,9)^4}\right)^{-1} \approx 0,49;$$

$$P_1 = \frac{1}{1,9}\, 0,49 \approx 0,26;\ P_2 = \left(\frac{1}{1,9}\right)^2 0,49 \approx 0,14;$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{1,9}\right)^3 0,49 \approx 0,07;\ P_4 = \left(\frac{1}{1,9}\right)^4 0,49 \approx 0,04.$$

Можно сделать выводы:

1) при значениях $\lambda = 1$ (одно ключевое понятие в неделю), $\mu = 1,9$ (после округления получаем два ключевых понятия в неделю) в среднем 49 % временного учебного интервала данный обучаемый студент не будет иметь неусвоенных ключевых понятий;

2) 26 % учебного времени – будет иметь одно неусвоенное ключевое понятие;

3) 14 % времени – два неусвоенных ключевых понятия;

4) 7 % времени – три понятия;

5) 4 % времени – четыре понятия.

В рассматриваемом примере результат получился не очень эффективным. Для повышения эффективности следует определить такое значение μ, для которого вероятность состояния P_0 будет близка к 1. Если взять $P_0 = 0,94$, $\lambda = 1$, то по формуле (2.4.3) получаем

$$P_0 = \left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^4}\right)^{-1},$$

т.е. $1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^4} = \frac{1}{P_0}$, или $\left(1 - \frac{1}{P_0}\right)\mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0.$

При $P_0 \approx 0{,}94$ выходит, что $\mu \approx 16{,}9$ ключевых понятий в неделю. Таким образом, при плотности потока усвоенных ключевых понятий, близкой к 16,9, в среднем 94 % временного учебного интервала данный обучаемый не будет иметь неусвоенных ключевых понятий. В этом случае по формулам (2.4.4) получаем:

$$P_1 = \frac{1}{16{,}9}\, 0{,}94 = 0{,}056;\; P_2 = \left(\frac{1}{16{,}9}\right)^2 0{,}94 = 0{,}003;\; P_3 = \left(\frac{1}{16{,}9}\right)^3 0{,}94 \approx 0;$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{16{,}9}\right)^4 0{,}94 \approx 0,$$

т.е. образовательный процесс проходит достаточно эффективно.

2.4.2. Управление процессом усвоения знаний

Предположим, что после некоторого состояния $S_i (i = n, n-1, ..., 1)$ решено было оценить результативность проводимых мероприятий. Как это можно сделать? Один из действенных способов заключается в следующем. Задается вероятность P_{i-1} того, что неусвоенных понятий будет на одно меньше, чем было в состоянии S_i, и гарантийная вероятность

$$P(i-1)_{\text{гарант}} = 1 - (P_n + P_{n-1} + ... + P_{i-2} + P_{i-1}).$$

Эта вероятность для $i = 1$ равна, очевидно, нулю. Указываются найденные (или заданные) на предыдущих шагах плотности λ_j и μ_k $(j = \overline{i,n};\quad k = \overline{i+1,n})$. Составляем систему, аналогичную системе (2.4.1), но для вероятностей $P_{i-1}, P_i, ..., P_{n-1}, P_n$ (вместо P_0 здесь рассматривается вероятность P_{i-1}):

$$\begin{aligned} &\lambda_i P_{i-1} = \mu_i P_i \\ &\lambda_{i+1} P_i = \mu_{i+1} P_{i+1} \\ &.......................... \\ &\lambda_n P_{n-1} = \mu_n P_n \end{aligned}$$

и записываем условие

$$P_{i-1} + P_i + ... + P_n = 1 - P(i-1)_{\text{гарант}}.$$

Находим решение данной системы:

$$P_{i-1} = (1 - P(i-1)_{\text{гарант}}) \left[1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \frac{\lambda_{i+1}\lambda_i}{\mu_{i+1}\mu_i} + ... + \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} ... \lambda_i}{\mu_n \mu_{n-1} ... \mu_i}\right]^{-1}; \qquad (2.4.5)$$

$$P_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} P_{i-1}; ...; P_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} ... \lambda_i}{\mu_n \mu_{n-1} ... \mu_i} P_{i-1}. \qquad (2.4.6)$$

При заданных P_{i-1}, $P(i-1)_{\text{гарант}}$, плотностях $\lambda_i,...,\lambda_n, \mu_{i+1},...,\mu_n$ из выражений (2.4.5) и (2.4.6) определяются значения плотности μ_i и вероятностей $P_i,...,P_{n-1},P_n$.

Пусть $A(i-1) = 1+\frac{\lambda_i}{\mu_i}+\frac{\lambda_{i+1}\lambda_i}{\mu_{i+1}\mu_i}+...+\frac{\lambda_n\lambda_{n-1}...\lambda_i}{\mu_n\mu_{n-1}...\mu_i}$, $B(i-1)=\lambda_n\lambda_{n-1}...\lambda_i$ и $C(i-1)=\mu_n\mu_{n-1}...\mu_{i+1}$. Тогда формулу (2.4.5) с учетом принятых обозначений записываем в виде

$$P_{i-1} = (1-P(i-1)_{\text{гарант}}) \left[A(i-1) + \frac{B(i-1)}{C(i-1)\ \mu_i} \right]^{-1}.$$

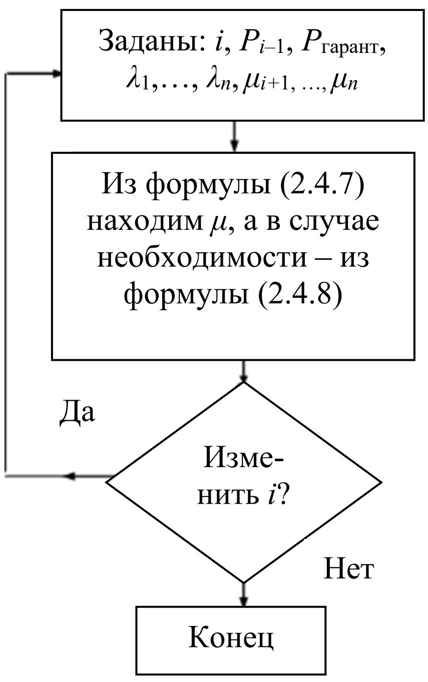
Отсюда

$$\mu_i = \frac{P_{i-1}\ B(i-1)}{(1-P(i-1)_{\text{гарант}})\ C(i-1) - P_{i-1}\ A(i-1)\ C(i-1)}. \qquad (2.4.7)$$

Для того чтобы μ_i имело смысл «плотность потока», необходимо, чтобы знаменатель выражения (2.4.7) был положительным, т.е. $(1-P(i-1)_{\text{гарант}})C(i-1)-P_{i-1}A(i-1)C(i-1)>0$, откуда

$$1-P(i-1)_{\text{гарант}} > P_{i-1}\ A(i-1). \qquad (2.4.8)$$

Следовательно, $P(i-1)_{\text{гарант}}$, P_{i-1} и плотности, входящие в $A(i-1)$, должны удовлетворять условию (2.4.8), которое можно трактовать как необходимое и достаточное для успешной реализации процесса. Таким образом, рассматриваемый процесс усвоения знаний (ликвидации неусвоенных основных понятий) является **управляемым.** Схема алгоритма управления процессом усвоения знаний приведена ниже:



Вернемся к приведенному в пункте 2.4.1 примеру. Допустим, имеем переход из состояния S_2 (два неусвоенных понятия) к S_1 (одно неусвоенное), при этом $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda = 1$; $\mu_3 = 1{,}9$; $\mu_4 = 1{,}9$; $P_1 = 0{,}6$; $P(i-1)_{\text{гарант}} = 0{,}2$. Тогда из формулы (2.4.7) находим, что $\mu_2 = 5{,}48$.

Одним из важных вопросов, возникающих при рассмотрении процесса, является вопрос о возможности решения поставленной задачи в указанные сроки. Пусть μ_i – плотность пуассоновского потока, переводящего систему из состояния S_i в состояние $S_{i-1} (i = n, n-1, ..., 1)$, причем μ_i не зависит от *t*, т.е. поток простейший. Тогда время T_i ликвидации неусвоенных понятий на данном участке имеет показательное распределение. Вероятность того, что это время будет в диапазоне от t_1 до t_2, усл. ед., вычисляется по формуле

$$P(t_1 \quad T_i \quad t_2) = e^{-\mu_i t_1} - e^{-\mu_i t_2}. \qquad (2.4.9)$$

Вероятность того, что это время будет не менее *t*, определяем по формуле

$$P(T_i \quad t) = e^{-\mu_i t}, \qquad (2.4.10)$$

а вероятность того, что оно будет менее или не более *t*, – по формуле

$$P(T_i \quad t) = 1 - e^{-\mu_i t}. \qquad (2.4.11)$$

Различные варианты изменения указанного времени (обычно в условных единицах, для рассмотренного примера – в неделях) в зависимости от μ (также в условных единицах, для рассмотренного примера – неусвоенное понятие в неделю) для конкретных *t*, t_1 и t_2, приведены ниже:

№ варианта	μ	$P(2 \le T \le 4)$	$P(T \ge 3)$	$P(T \le 2)$
1	1,9	0,022	0,003	0,978
2	16,9	0	0	1
3	5,48	0	0	1

Из этих данных следует, что переход к правильному пониманию ключевого понятия, которое ранее было не усвоенным в течение не более чем 2 усл. ед. времени, при первом варианте может не закончиться примерно в 2 % случаев, а во втором и третьем вариантах со 100%-й уверенностью можно утверждать, что это произойдет именно так. Что же касается других интервалов времени, то во всех вариантах соответствующие вероятности ничтожно малы. Формулы, аналогичные (2.4.9)–(2.4.11), верны и для интервала времени появления очередного неусвоенного понятия для рассмотренного примера при плотности двоек, равной $\lambda = 1$ понятие в неделю. В этом случае

$$P(2 \quad T \quad 4) = e^{-2} - e^{-4} = 0{,}12;\ P(T \quad 3) = e^{-3} = 0{,}05;$$
$$P(T \quad 2) = 1 - P(T \quad 2) = 0{,}86.$$

Первые две вероятности малы. Согласно анализу третьей можно ожидать, что в 86 % случаев интервал между появлениями неусвоенных понятий будет не более чем 2 усл. ед. (двух недель), а в 14 % случаях это будет не так (более двух недель).

2.4.3. Характеристики эффективности системы

Пусть все λ_i ($i = \overline{1,n}$) равны между собой, их общее значение равно λ и все μ_i равны между собой и имеют общее значение μ. Данная модель представляет собой многоканальную систему массового обслуживания с отказами [11]. Рассмотрим **характеристики эффективности** такой системы:

величина $\rho = \lambda/\mu$ – предельная интенсивность потока неудовлетворительных оценок, выражающая среднее число двоек, которые получает обучающийся за время ликвидации одной двойки;

вероятность $P_{\text{отказа}}$, когда система находится в конечном состоянии P_n и вновь получаемые двойки не исправляются: $P_{\text{отказа}} = P_0 = \dfrac{\rho^n}{n!} P_n$;

относительная пропускная способность Q – вероятность того, что неудовлетворительная оценка будет исправлена в ходе различных мероприятий: $Q = 1 - P_{\text{отказа}} = 1 - \dfrac{\rho^n}{n!} P_n$;

абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda \quad 1 - \dfrac{\rho^n}{n!} P_n \quad$;

среднее число ликвидированных двоек $\overline{k} = A/\mu$.

Теперь представим себе такую ситуацию: поток неудовлетворительных оценок так велик, что к определенному моменту спланированных мероприятий не хватает на их ликвидацию, в итоге образуется «очередь» неудовлетворительных оценок, например длины m (число двоек в очереди). В этом случае по формулам, аналогичным приведенным в [11], можно найти все вероятности ($P_i (i = \overline{0,n})$, $P_{\text{отказа}}$, q, A), а также среднее число двоек в «очереди». Если не все неудовлетворительные оценки ликвидированы в результате данных мероприятий, то вводим вероятность p ликвидации. В этом случае плотность устранения двоек будет $\mu \quad p$.

Остановимся кратко на анализе причинно-следственной связи в потоках событий. Дело в том, что очень часто поток событий является результатом действия нескольких причин – факторов, которые следует рассматривать в совокупности, т.е. как координаты вектора. Для потока неудовлетворительных оценок при переходе из состояния S_i в состояние S_{i+1} $(i=\overline{1,n-1})$ двойка является результатом действия факторов, связанных с разного рода обстоятельствами:

1) с самочувствием и настроением учащегося (x_{i_1});

2) обстановкой в семье (x_{i_2});

3) влиянием друзей (x_{i_3});

4) способностями к изучению данной дисциплины (x_{i_4});

5) отношением к учебе (x_{i_5}).

Коэффициенты $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}$ можно вычислить на основе статистического материала согласно опросу обучаемых, их родственников и преподавателей с использованием, допустим, методов ранжировки и шкального оценивания. Поэтому двойке ставится в соответствие вектор $\overline{\beta_i}=(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4},x_{i_5})$, имеющий длину

$$\left|\overline{\beta}_i\right|=\sqrt{x_{i_1}^2+x_{i_2}^2+x_{i_3}^2+x_{i_4}^2+x_{i_5}^2}\,. \qquad (2.4.12)$$

Плотность потока мероприятий по ликвидации неудовлетворительных оценок также целесообразно рассматривать как некоторую векторную величину $\overline{\eta_i}=(y_{i_1},y_{i_2},y_{i_3},y_{i_4},y_{i_5})$ с тем же количеством координат, что и у $\overline{\beta}_i$. При этом следует считать, что величина y_{i_j} $(j=\overline{1,5})$ «противостоит» величине x_{ij}, т.е. способствует устранению факторов группы *j* возникновения неудовлетворительных оценок.

В общем случае в переходный период из состояния S_i в состояние S_{i+1} плотность λ_i – функция от x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5} и от $\left|\overline{\beta_i}\right|$, а плотность μ_i выражается через $\left|\overline{\eta_i}\right|$ и является функцией от y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, y_{i_4}, y_{i_5}, т.е.

$$\lambda_i=\lambda_i(x_{i_1},...,x_{i_5});\ \lambda_i=\varphi_i(\left|\overline{\beta}_i\right|);\ \mu_i=\mu_i(y_{i_1},...,y_{i_5});\ \mu_i=f_i(\left|\overline{\eta}_i\right|). \qquad (2.4.13)$$

Из выражений (2.4.12) и (2.4.13) следует, что

$$\begin{aligned}\lambda_i&=\varphi_i((x_{i_1}^2+x_{i_2}^2+x_{i_3}^2+x_{i_4}^2+x_{i_5}^2)^{\frac{1}{2}});\\ \mu_i&=f_i((y_{i_1}^2+y_{i_2}^2+y_{i_3}^2+y_{i_4}^2+y_{i_5}^2)^{\frac{1}{2}}).\end{aligned} \qquad (2.4.14)$$

Особый интерес представляет взаимно однозначная зависимость между λ_i и $\left|\overline{\beta_i}\right|$ и между μ_i и $\left|\overline{\eta_i}\right|$. В этом случае для функции $\varphi_i\ (i=\overline{1,n})$ существует обратная функция ψ_i, причем $\left|\overline{\beta_i}\right|=\psi_i(\lambda_i)$, а для функции $f_i\ (i=\overline{1,n})$ – обратная функция ξ_i и $\left|\overline{\eta_i}\right|=\xi_i(\mu_i)$.

Заметим, что шкальное оценивание (по шкале отношений) факторов x_{i_j} и y_{i_j} $(j=\overline{1,5})$ зачастую трудно осуществить даже экспертам (не говоря уже об обучаемых и их родителях). Однако долевое процентное сравнение могут сделать даже школьники. Поэтому знание шкальной оценки хотя бы одного фактора x_{i_j} (y_{i_j}) и долевого (процентного) отношения остальных дает возможность определить шкальные оценки всех указанных факторов.

Допустим, из статистического материала известно, что влияние факторов 1–5 на плотность λ_i потока двоек оценивается как

$$x_{i_1}:x_{i_2}:x_{i_3}:x_{i_4}:x_{i_5}=\alpha_{i_1}:\alpha_{i_2}:\alpha_{i_3}:\alpha_{i_4}:\alpha_{i_5}, \qquad (2.4.15)$$

где α_{i_j} – известные константы ($j=\overline{1,5}$).

Тогда из выражения (2.4.15) получаем, что

$$\frac{x_{i_1}}{x_{i_2}}=\frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_2}};\ \frac{x_{i_1}}{x_{i_3}}=\frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_3}};\ \frac{x_{i_1}}{x_{i_4}}=\frac{\alpha_{i_1}}{\alpha_{i_4}};\ \frac{x_{i_5}}{x_{i_5}}=\frac{\alpha_{i_{15}}}{\alpha_{i_5}},$$

т.е. при известной оценке x_{i_1} находят оценки остальных факторов:

$$x_{i_2}=\frac{\alpha_{i_2}\ x_{i_1}}{\alpha_{i_1}};\ x_{i_3}=\frac{\alpha_{i_3}\ x_{i_1}}{\alpha_{i_1}};\ x_{i_4}=\frac{\alpha_{i_4}\ x_{i_1}}{\alpha_{i_1}};\ x_{i_5}=\frac{\alpha_{i_5}\ x_{i_5}}{\alpha_{i_5}}. \qquad (2.4.16)$$

Покажем, как при известных $\alpha_{i_j}\ (j=\overline{1,5})$ и x_{i_1} определяем обратную функцию $\psi_i(\lambda_i)$. Из (2.4.14) и (2.4.16) находим, что

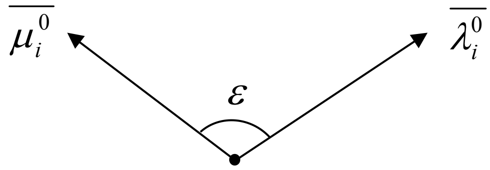
$$\lambda_i=\varphi_i\left(\left[\frac{x_{i_1}^2}{\alpha_{i_1}^2}(\alpha_{i_1}^2+\alpha_{i_2}^2+\alpha_{i_3}^2+\alpha_{i_4}^2+\alpha_{i_5}^2)\right]^{1/2}\right),$$ откуда

$$x_{i_1}=\frac{\psi_i(\lambda_i)\alpha_{i_1}}{\sqrt{\alpha_{i_1}^2+\alpha_{i_2}^2+\alpha_{i_3}^2+\alpha_{i_4}^2+\alpha_{i_5}^2}};$$

$$\psi_i(\lambda_i)=\frac{x_{i_1}}{\alpha_{i_1}}\sqrt{\alpha_{i_1}^2+\alpha_{i_2}^2+\alpha_{i_3}^2+\alpha_{i_4}^2+\alpha_{i_5}^2}.$$

Вектор $\overline{\lambda_i^0} = grad\lambda_i = grad\varphi_i((x_{i_1}^2 + x_{i_2}^2 + x_{i_3}^2 + x_{i_4}^2 + x_{i_5}^2)^{\frac{1}{2}})$ характеризует наиболее быстрое изменение проявлений факторов 1–5. При этом каждая координата вектора показывает скорость изменения плотности двоек в зависимости от трансформации соответствующего фактора при постоянных значениях остальных факторов.

Вектор $\overline{\mu_i^0} = grad\mu_i = grad\ f_i((y_{i_1}^2 + y_{i_2}^2 + y_{i_3}^2 + y_{i_4}^2 + y_{i_5}^2)^{\frac{1}{2}})$ – оптимальный вектор противодействия: в этом направлении происходит самая интенсивная борьба с неудовлетворительными оценками для данных значений факторов y_{i_j} $(j = \overline{1,5})$. Каждая координата вектора $\overline{\mu_i^0}$ показывает скорость изменения исправленных двоек в зависимости от соответствующего фактора y_{i_j} $(j = \overline{1,n})$ при постоянных значениях остальных факторов. В общем случае $\overline{\mu_i^0}$ и $\overline{\lambda_i^0}$ расположены под углом ε друг к другу:



Чем больше $\left|\overline{\mu_i^0}\right| \cos\varepsilon$ по сравнению с $\left|\overline{\lambda_i^0}\right|$, тем успешнее осуществляется исправление неудовлетворительных оценок.

В дальнейшем для удобства изложения индекс i, указывающий переход из состояния S_i в S_{i+1}, будем опускать, не нарушая общности.

Можно рассмотреть матричное описание мероприятий по ликвидации неудовлетворительных оценок. Для этого из пяти разных вариантов значений (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) задаются пять разных векторов $\overline{\beta_l}$ $(l = \overline{1,5})$, координаты которых образуют не равный нулю определитель, т.е. эти векторы образуют базис [13], поэтому любой вектор $\overline{\beta}$ негативных факторов может быть представлен в виде $\overline{\beta} = k_1\ \overline{\beta_1} + {}$ $+ k_2\ \overline{\beta_2} + k_3\ \overline{\beta_3} + k_4\ \overline{\beta_4} + k_5\ \overline{\beta_5}$. После проведения мероприятий по ликвидации двоек, связанных с уменьшением координат векторов $\overline{\beta_l}$, составляется матрица $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1,5})$, столбцами которой являются уменьшенные векторы $\overline{\beta_l}$ $(l = \overline{1,5})$. Преобразование, задаваемое матрицей A, автоматически переносится на любой вектор пространства, в том числе на $\overline{\beta}$, так как $A\ \overline{\beta} = k_1\ A\ \overline{\beta_1} + k_2\ A\ \overline{\beta_2} + k_3\ A\ \overline{\beta_3} + k_4\ A\ \overline{\beta_4} + k_5\ A\ \overline{\beta_5}$. Если вектор $\overline{\beta}$ задан, то $A\ \overline{\beta}$ представляет собой результат мероприятий по ликвидации двоек. Если вектор $\overline{\beta}$ не задан, то возникает задача его поиска, сводящаяся к отысканию собственных векторов и собственных чисел матрицы A . Для этого рассматривается условие превращения вектора $\overline{\beta}$ в коллинеарный и уменьшенный (например, в r раз):

$$A\ \overline{\beta} = r\ \overline{\beta}. \qquad (2.4.17)$$

Особый случай имеет место при $r = 1$, когда результат, несмотря на все предпринятые усилия, по-прежнему остается неизменно плохим.

Разберем **пример**. Факторы $x_j\ (j = \overline{1{,}5})$, связанные с получением неудовлетворительных оценок, оценивались по десятибалльной системе 5 раз. Были получены следующие оценки: x_1 : 7; 6; 5; 8; 4 ; x_2 : 6; 9; 8; 7; 7 ; x_3 : 5; 6; 3; 8; 9 ; x_4 : 9; 8; 7; 6; 5 ; x_5 : 5; 5; 4; 3; 8 . Таким образом, $\overline{\beta_1} = (7;6;5;9;5)$, $\overline{\beta_2} = (6;9;6;8;5)$, $\overline{\beta_3} = (5;8;3;7;4)$, $\overline{\beta_4} = (8;7;8;6;3)$, $\overline{\beta_5} = (4;7;9;5;8)$. В результате реализованных мероприятий, направленных на устранение неудовлетворительных оценок, значения $x_j\ (j = \overline{1{,}5})$ изменились: x_1 : 3; 2; 4; 7; 1 ; x_2 : 5; 6; 3; 3; 2 ; x_3 : 3; 3; 2; 1; 1 ; x_4 : 4; 4; 4; 3; 1 ; x_5 : 4; 4; 3 3; 7 , т.е. векторы $\overline{\beta_1}$, $\overline{\beta_2}$, $\overline{\beta_3}$, $\overline{\beta_4}$, $\overline{\beta_5}$ соответственно преобразовались в векторы с меньшими координатами: $(3;\ 5;\ 3;\ 4;\ 4)$, $(2;\ 6;\ 3;\ 4;\ 4)$, $(4;\ 3;\ 2;\ 4;\ 3)$, $(7;\ 3;\ 1;\ 3;\ 3)$, $(1;\ 2;\ 1;\ 1;\ 7)$. Следует найти матрицу A и ее собственные числа. Условие (2.4.17) в данном случае записываем в виде

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{matrix}\ \overline{\beta} = r\ \overline{\beta},$$

откуда определяем собственные значения: $r_1 = 16{,}33$; $r_2 = 5{,}1$; $r_3 = -0{,}72 + 0{,}95i$; $r_4 = -0{,}72 + 0{,}95i$; $r_5 = 1$.

Таким образом, для рассмотренной матрицы A условие (2.4.17) выполняется только для векторов, координаты которых увеличиваются в 16,33 раза или в 5,1 раза либо для $r = 1$ остаются неизменными. Такая ситуация, конечно, неприемлема, поэтому целесообразно решить обратную задачу: для данных значений собственных чисел $r_i\ (i = \overline{1{,}5})$ таких, что

$r_i > 0$, и хотя бы одно из них меньшего, чем 1, найдем соответствующую матрицу A. Рассмотрим общий вид этой задачи.

Пусть

$$A = \begin{matrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{matrix} .$$

Как известно [13], ненулевой вектор $\overline{\beta}$, удовлетворяющий условию (2.4.17), существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2.4.18)$$

Если в определителе (2.4.18) вычеркнуть i строк и i столбцов $(i = \overline{1, n-1})$, то пересечение невычеркнутых строк и столбцов образует минор $n - i$ -го порядка. Всего таких миноров будет C_n^i . Введем для них обозначение $\Delta_j(i)$, где $j = \overline{1, C_n^i}$. Нетрудно показать, что равенство (2.4.18) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} (-1)^n \, r^n + (-1)^{n-1} \, r^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \Delta_j(1) + (-1)^{n-2} \, r^{n-2} \sum_{j=1}^{C_n^2} \Delta_j(2) + \ldots \\ + (-1)^{n-i} \, r^{n-i} \sum_{j=1}^{C_n^i} \Delta_j(i) + \ldots + (-1) \, r \sum_{j=1}^{n} \Delta_j(n-1) + \Delta_n = 0, \end{gathered} \qquad (2.4.19)$$

где Δ_n – определитель матрицы A.

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – корни уравнения (2.4.19). Из формул Вьета [76] получается система равенств, которая при заданных значениях r_i $(i = \overline{1,5})$ представляет собой систему уравнений относительно неизвестных элементов a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ матрицы A:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \Delta_j(1) = r_1 + r_2 + \ldots + r_n; \\ &\sum_{j=1}^{C_n^2} \Delta_j(2) = r_1 \, r_2 + r_1 \, r_3 + \ldots + r_1 \, r_n + r_2 \, r_3 + \ldots + r_{n-1} \, r_n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{j=1}^{n} \Delta_j(n-1) = r_1 \, r_2 \, \ldots \, r_{n-1} + r_1 \, r_2 \, \ldots r_{n-2} \, r_n + \ldots + r_2 \, r_3 \, \ldots \, r_n; \\ &\Delta_n = r_1 \, r_2 \, \ldots \, r_n. \end{aligned} \qquad (2.4.20)$$

Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда $n = 3$. Система (2.4.20) в этом случае примет вид

$$\sum_{j=1}^{3} \Delta_j(1) = r_1 + r_2 + r_3;$$

$$\sum_{j=1}^{3} \Delta_j(2) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3;$$

$$\Delta_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Причем

$$\sum_{j=1}^{3} \Delta_j(1) = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$\sum_{j=1}^{3} (2) = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) + (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}) + (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32});$$

$$\Delta_3 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} -$$
$$- a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

Пусть, например, $r_1 = 0{,}9;\ r_2 = 1;\ r_3 = 2.$ Тогда

$$\sum_{j=1}^{3} \Delta_j(1) = 0{,}9 + 1 + 2 = 3{,}9; \quad \sum_{j=1}^{3} \Delta_j(2) = 0{,}9 \cdot 1 + 0{,}9 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4{,}7;$$

$$\Delta_3 = 0{,}9 \cdot 1 \cdot 2 = 1{,}8. \qquad (2.4.21)$$

Решая систему (2.4.21) относительно неизвестных a_{ij} $(i, j = \overline{1{,}3})$, находим искомую матрицу A. Эту задачу можно конкретизировать следующим образом. Во-первых, поскольку значения переменных x_j $(j = \overline{1{,}5})$ оценивались по десятибалльной системе, целесообразно оценивать по этой же системе и значения a_{ij}. Во-вторых, желательно, чтобы матрица A отражала минимальные затраты на мероприятия по ликвидации факторов, ведущих к получению неудовлетворительных оценок. Поэтому система (2.4.21) должна быть дополнена системой неравенств $0 < a_{ij} \le 10$ $(i, j = \overline{1{,}3})$ и условием минимальности суммы $L = \sum_{i,j}^{3} a_{ij}$. Следовательно, имеем задачу нелинейного программирования. Решая эту задачу с помощью средства «Поиск решения» MS Excel, получаем, что

$$a_{11} = 0{,}564;\ a_{12} = 0{,}094;\ a_{13} = 0{,}095;\ a_{21} = 0{,}095;\ a_{22} = 0{,}769;\ a_{23} = 0{,}095;$$
$$a_{31} = 0{,}095;\ a_{32} = 0{,}095;\ a_{33} = 0{,}769;\quad L = 2{,}671.$$

Отметим, что из трех значений ($r_1 = 0{,}9,\ r_2 = 1$ и $r_3 = 2$) для уменьшения вектора негативных явлений используется только первое: $r_1 = 0{,}9$. При таком значении находим собственный вектор:

$$\overline{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}72 \\ 1{,}71 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор негативных воздействий на обучаемого в результате мероприятий, оцениваемых с помощью матрицы A, преобразуется в вектор $0{,}9\ \overline{\beta} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}548 \\ 1{,}539 \end{pmatrix}$, который связан с меньшими негативными воздействиями.

Итак, построена модель системы массового обслуживания, которая связана с процессом ликвидации неудовлетворительных оценок. Рассмотрены характеристики эффективности данной системы. С помощью аппарата линейной алгебры был осуществлен анализ причинно-следственной связи в потоках событий. Была предложена методика оценки эффективности процесса борьбы с двойками.

§ 2.5. Модель системной динамики процесса обучения

Для описания и исследования процессов в сложных динамических системах применяется аппарат системной динамики, разработанный Дж. Форрестером [87]. Реализация моделей системной динамики осуществляется с помощью метода имитационного моделирования. Этот метод используется:

для исследования процессов взаимодействия интеллектуальных агентов в многоагентных системах [73, 83];

оценки качества образовательного процесса в вузе [90];

моделирования задачи системной динамики «Ассимиляция этносов» [70] и в других приложениях.

Наиболее часто для разработки имитационных исполняемых моделей и последующего их применения для анализа процессов используется средство AnyLogic.

Исследованиям, выполняемым с помощью метода имитационного моделирования, присущи известные достоинства и недостатки, которые мы здесь разбирать не будем. При построении моделей системной динамики недостаточное внимание, на наш взгляд, уделяется вопросам получения аналитического решения систем дифференциальных уравнений ввиду их сложности. Однако многие задачи системной динамики могут быть решены аналитически, например описания динамики качества обучения [30], планирования мероприятий [23], управления резервом оценок в учебном процессе [21].

В данном параграфе предложена динамическая модель учета взаимного влияния обучающихся в учебной группе и получения аналитического решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс динамического взаимодействия учащихся. Для достижения данной цели осуществлены следующие действия:

1. В качестве модели динамического взаимовлияния учащихся использована система дифференциальных уравнений Форрестера, аналогичная системам, используемым в работах [73, с. 147; 90, с. 79].

2. Получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений модели.

3. Исследованы важные частные случаи общей системы дифференциальных уравнений путем задания соотношений между коэффициентами влияния.

Новизна данного исследования заключается в аналитическом решении системы дифференциальных уравнений определенного вида для модели системной динамики.

2.5.1. Система дифференциальных уравнений модели и ее решение

Рассмотрим учебную группу, состоящую из трех типовых подгрупп. Например, можно выделить три типа учащихся по качеству усвоения ими знаний: полностью обучаемые; частично обучаемые; необучаемые.

Обозначим:

$N_1(0)$, $N_2(0)$, $N_3(0)$ – начальное количество учащихся первого, второго и третьего типов соответственно;

$N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ – численность учащихся, меняющаяся со временем;

$\alpha_{12}(t)$, $\alpha_{13}(t)$ – коэффициенты влияния учащихся первого типа на учащихся второго и третьего типов соответственно;

$\alpha_{21}(t)$, $\alpha_{23}(t)$ – коэффициенты влияния учащихся второго типа на учащихся первого и третьего типов соответственно;

$\alpha_{31}(t)$, $\alpha_{32}(t)$ – коэффициенты влияния учащихся третьего типа на учащихся первого и второго типов соответственно;

$t = \overline{0,T}$, где T – конечное значение времени наблюдения.

Под влиянием одних подгрупп обучаемых другие приобретают такой же тип, как и у первых. Степень влияния зависит от величины коэффициентов влияния, а также от начальной и меняющейся со временем численности учащихся в каждой подгруппе. Чем больше учащихся в определенной подгруппе, тем больше сила их влияния на учащихся из других подгрупп.

Модель динамического взаимовлияния обучаемых, приводящего к корректировке численности представителей каждого типа, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1(t)}{dt}&=\frac{\alpha_{12}(t)\ N_2(0)}{N_2(t)}+\frac{\alpha_{13}(t)\ N_3(0)}{N_3(t)}-\frac{\alpha_{21}(t)\ N_1(0)}{N_1(t)}-\frac{\alpha_{31}(t)\ N_1(0)}{N_1(t)};\\
\frac{dN_2(t)}{dt}&=\frac{\alpha_{21}(t)\ N_1(0)}{N_1(t)}+\frac{\alpha_{23}(t)\ N_3(0)}{N_3(t)}-\frac{\alpha_{12}(t)\ N_2(0)}{N_2(t)}-\frac{\alpha_{32}(t)\ N_2(0)}{N_2(t)};\\
\frac{dN_3(t)}{dt}&=\frac{\alpha_{31}(t)\ N_1(0)}{N_1(t)}+\frac{\alpha_{32}(t)\ N_2(0)}{N_2(t)}-\frac{\alpha_{13}(t)\ N_3(0)}{N_3(t)}-\frac{\alpha_{23}(t)\ N_3(0)}{N_3(t)}.
\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Объясним смысл коэффициентов влияния. Допустим, в первом уравнении системы (2.5.1) все коэффициенты, кроме $\alpha_{12}(t)$, равны нулю. Тогда $\alpha_{12}(t)=\dfrac{N_1\ (t)}{N_2(0)/N_2(t)}$, т.е. коэффициент влияния $\alpha_{12}(t)$ характеризует относительную скорость изменения численности первой группы при отсутствии воздействия на эту группу двух других групп, а также первой группы на третью. Совершенно так же описываются остальные коэффициенты влияния.

Предположим, что имеет место зависимость $\alpha_{13}(t)=m_1\ \ N_1(t)\ \ N_3(t)$, где m_1 = const.

Она означает прямо пропорциональную зависимость коэффициента влияния учащихся первого типа на учащихся третьего типа от численности групп первого и третьего типов в каждый момент времени. Аналогично задаем остальные коэффициенты влияния:

$$\alpha_{12}(t) = m_2 \cdot N_1(t) \cdot N_2(t);\ \alpha_{21}(t) = m_3 \cdot N_1(t) \cdot N_2(t);\ \alpha_{31}(t) = m_4 \cdot N_1(t) \cdot N_3(t);$$
$$\alpha_{23}(t) = m_5 \cdot N_2(t) \cdot N_3(t);\ \alpha_{32}(t) = m_6 \cdot N_2(t) \cdot N_3(t),$$

где $m_i\ \ (i=\overline{2-5})$ – числовые коэффициенты.

Введем следующие обозначения: $x=N_1(t);\ y=N_2(t);\ z=N_3(t)$.

Для данного случая запишем систему (2.5.1) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=m_1\ \ N_1(t)\ \ N_2(0)+m_2\ \ N_1(t)\ \ N_3(0)-m_3\ \ N_1(0)\ \ N_2(t)-m_4\ \ N_1(0)\ \ N_3(t);\\
\frac{dy}{dt}&=m_3\ \ N_1(0)\ \ N_2(t)+m_5\ \ N_3(0)\ \ N_2(t)-m_2\ \ N_1(t)\ \ N_2(0)-m_6\ \ N_2(0)\ \ N_3(t)\\
\frac{dz}{dt}&=m_4\ \ N_1(0)\ \ N_3(t)+m_6\ \ N_2(0)\ \ N_3(t)-m_1\ \ N_1(t)\ \ N_3(0)-m_5\ \ N_3(0)\ \ N_2(t)
\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

Для простоты изложения введем обозначения:

$m_1\ \ N_3(0)+m_2\ \ N_2(0)=u_1;\ \ m_3\ \ N_1(0)=u_2;\ \ m_4\ \ N_1(0)=u_3;$

$m_2\ \ N_2(0)=v_1;\ \ m_3\ \ N_1(0)+m_5\ \ N_3(0)=v_2;\ \ m_6\ \ N_2(0)=v_3;$

$m_1\ \ N_3(0)=w_1;\ \ m_5\ \ N_2(0)=w_2;\ \ m_4\ \ N_1(0)+m_6\ \ N_2(0)=w_3;$

Тогда система (2.5.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=u_1\ \ x-u_2\ \ y-u_3\ \ z;\\
\frac{dy}{dt}&=-v_1\ \ x+v_2\ \ y-v_3\ \ z;\\
\frac{dz}{dt}&=-w_1\ \ x-w_2\ \ y+w_3\ \ z.
\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

Система (2.5.3) – линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. Не нарушая общности, будем считать, что все корни действительные и различные.

Пусть числу $\lambda_k\ \left(k=\overline{1,3}\right)$ соответствует собственный вектор (p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}).

Система (2.5.3) имеет три решения:

1) $x_{11}=p_{11}\ \ e^{\lambda_1 t},\ x_{21}=p_{21}\ \ e^{\lambda_1 t},\ x_{31}=p_{31}\ \ e^{\lambda_1 t};$

2) $x_{12}=p_{12}\ \ e^{\lambda_2 t},\ x_{22}=p_{22}\ \ e^{\lambda_2 t},\ x_{32}=p_{32}\ \ e^{\lambda_2 t};$

3) $x_{13}=p_{13}\ \ e^{\lambda_3 t},\ x_{23}=p_{23}\ \ e^{\lambda_3 t},\ x_{33}=p_{33}\ \ e^{\lambda_3 t}.$

Общее решение системы:

$$\begin{aligned} x&=D_1\ \ x_{11}+D_2\ \ x_{12}+D_3\ \ x_{13};\\ y&=D_1\ \ x_{21}+D_2\ \ x_{22}+D_3\ \ x_{23};\\ z&=D_1\ \ x_{31}+D_2\ \ x_{32}+D_3\ \ x_{33}. \end{aligned} \qquad (2.5.4)$$

где D_1, D_2, D_3 – постоянные, которые находят из системы (2.5.4) при заданных начальных условиях.

Рассмотрим **пример**.

Пусть $N_1(0)=12$, $N_2(0)=18$, $N_3(0)=10$, $m_1=0{,}002$, $m_2=0{,}003$, $m_3=$ $=0{,}002$, $m_4=0{,}001$, $m_5=0{,}002$, $m_6=0{,}001$. Тогда

$u_1=0{,}074$, $u_2=0{,}024$, $u_3=0{,}012$, $v_1=0{,}054$, $v_2=0{,}044$, $v_3=0{,}018$,

$w_1=0{,}02$, $w_2=0{,}02$, $w_3=0{,}03$;

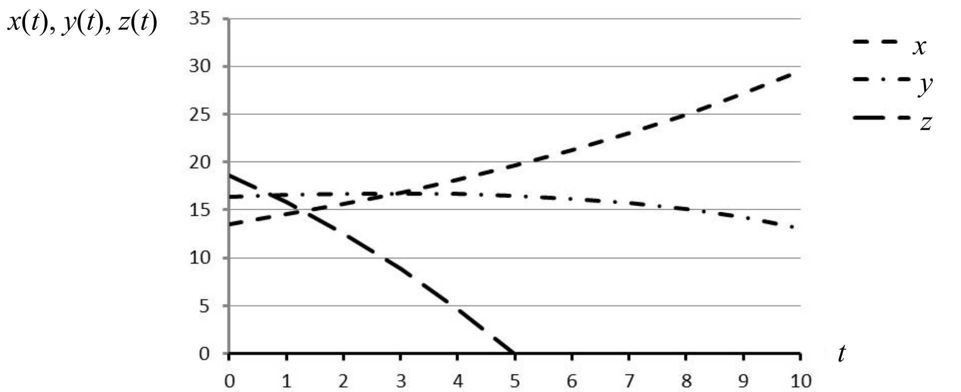
$$\begin{aligned} x\ &=(74x-24y-12z)\ \ 0{,}001;\\ y\ &=(-54x+44y-18z)\ \ 0{,}001;\\ z\ &=(-20x-20y+30z)\ \ 0{,}001. \end{aligned}$$

При этом $t\ \ [0,\ 36]$ академических часов.

Решение данной системы запишем в виде

$$\begin{aligned} x\ &=(74x-24y-12z)\ \ 0{,}001;\\ y\ &=(-54x+44y-18z)\ \ 0{,}001;\\ z\ &=(-20x-20y+30z)\ \ 0{,}001. \end{aligned}$$

Графическое решение показано ниже:



2.5.2. Частные случаи системы дифференциальных уравнений модели

Рассмотрим некоторые важные частные случаи системы (2.5.1). Сначала упростим ее, используя ряд обозначений. Пусть

$x = N_1(t),\ y = N_2(t),\ z = N_3(t);$

$a_1 = \alpha_{21}(t)\ N_1(0) + \alpha_{31}(t)\ N_1(0),\ \ a_2 = \alpha_{22}(t)\ N_2(0),\ \ a_3 = \alpha_{13}(t)\ N_3(0);$

$b_1 = \alpha_{21}(t)\ N_1(0),\ \ b_2 = \alpha_{12}(t)\ N_2(0) + \alpha_{32}(t)\ N_2(0),\ \ b_3 = \alpha_{23}(t)\ N_3(0);$

$c_1 = \alpha_{31}(t)\ N_1(0),\ \ c_2 = \alpha_{23}(t)\ N_2(0),\ \ c_3 = \alpha_{13}(t)\ N_3(0) + \alpha_{23}(t)\ N_3(0).$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{y} + \frac{a_3}{z}; \\ y &= \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{y} + \frac{b_3}{z}; \\ z &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y} - \frac{c_3}{z}. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Заметим, что из системы (2.5.1) следуют соотношения:

$$a_1 = b_1 + c_1;\ -a_2 = c_2 - b_2;\ a_3 = c_3 - b_3.$$

С учетом этого систему (2.5.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b_1 + c_1}{x} + \frac{c_2 - b_2}{y} + \frac{c_3 - b_3}{z}; \\ y &= \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{y} + \frac{b_3}{z}; \\ z &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y} - \frac{c_3}{z}. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Предположим, что $c_2 = b_2$, т.е. $a_2 = 0$. Такая ситуация возникает, когда существует большое различие в успеваемости полностью обучаемых и частично обучаемых. Поэтому частично обучаемые, в отличие от полностью обучаемых, намного хуже реагируют на учебный процесс.

Тогда систему (2.5.6) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b_1 + c_1}{x} + \frac{c_3 - b_3}{z}; \\ y &= \frac{b_1}{x} - \frac{c_2}{y} + \frac{b_3}{z}; \\ z &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{y} - \frac{c_3}{z}. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Заметим, что в случае $a_2 = 0$ сумма правых частей уравнений системы (2.5.7) равна нулю. Тогда $dx + dy + dz$ – первая интегрируемая комбинация и $\Phi_1 = x + y + z$ – первый интеграл. Рассмотрим ситуацию, когда влияние учащихся третьей группы на обучающихся первой группы очень сильное, причем $\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{y}=\frac{c_3}{z}$. В этом случае влияние третьей группы на остальных равносильно противодействию. При этом

$$\frac{\alpha_{31}(t)\ \ N_1(0)}{N_1(t)}+\frac{\alpha_{32}(t)\ \ N_2(0)}{N_2(t)}=\frac{\alpha_{13}(t)\ \ N_3(0)}{N_3(t)}+\frac{\alpha_{23}(t)\ \ N_3(0)}{N_3(t)}.$$

Умножив первое и второе уравнение на $\frac{1}{x}$, а третье – на $\frac{1}{y}$ и сложив все три уравнения, получим

$$x\ \ \frac{1}{x}+y\ \ \frac{1}{x}+z\ \ \frac{1}{y}=-\frac{b_1}{x^2}+\frac{b_1}{xy}-\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_1}{xy}=\ \frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{y}-\frac{c_3}{z}\qquad -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ \ =0.$$

Таким образом, $\frac{1}{x}dx+\frac{1}{x}dy+\frac{1}{y}dz$ – вторая интегрируемая комбинация и $2\ln x+\ln y=\Phi_2$ – первый интеграл. Поскольку $rank\ \begin{matrix}1 & 1 & 1\\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \frac{1}{y}\end{matrix}\ =2,$ то Φ_1 и Φ_2 образуют базис первых интегралов. Следовательно, общее решение данной системы выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}x+y+z=D_1;\\ 2\ln x+\ln y=\ln D_2,\end{cases}$$

где D_1 и D_2 – постоянные, определяемые из начальных условий.

Данная система преобразуется к виду

$$\begin{cases}x+y+z=D_1;\\ x^2y=D_2,\end{cases}$$

где $D_1=N_1(0)+N_2(0)+N_3(0);\ D_2=N_1{}^2(0)\ \ N_3(0).$

Рассмотрим важный частный случай, когда численность групп одинаковая и коэффициенты влияния постоянные. Пусть, например, $x = y$. Тогда из системы (2.5.6) имеем равенство правых частей первого и второго уравнений, откуда

$$\frac{2b_1+c_1-c_2}{x}+\frac{2b_3-c_3}{z}=0;$$

$$z\ =\frac{c_1+c_2}{x}-\frac{c_3}{z}.$$

В итоге получаем соотношения $x=\frac{(2b_1+c_1-c_2)z}{2b_3-c_3}$, $z=$ $=\frac{(2b_3-c_3)(c_1+c_2)}{(2b_1+c_1-c_2)z}-\frac{c_3}{z}$ и $\frac{z^2}{2}=\frac{2(c_1b_3+c_2b_3-c_1c_3-b_1c_3)}{2b_1+c_1-c_2}t+D,$ где D – постоянная, выводимая из начальных условий. Для рассматриваемого случая $D=\frac{N_3^2(0)}{2}.$

Пусть, например, $N_1(t) = N_2(t)$, при $t = 0$ $N_1(0) = N_2(0) = 13$; $N_3(0) = 12$; $\alpha_{12} = 0{,}5$; $\alpha_{13} = 0{,}2$; $\alpha_{21} = 0{,}2$; $\alpha_{23} = 0{,}3$; $\alpha_{31} = 0{,}3$; $\alpha_{32} = 0{,}4$.

Тогда

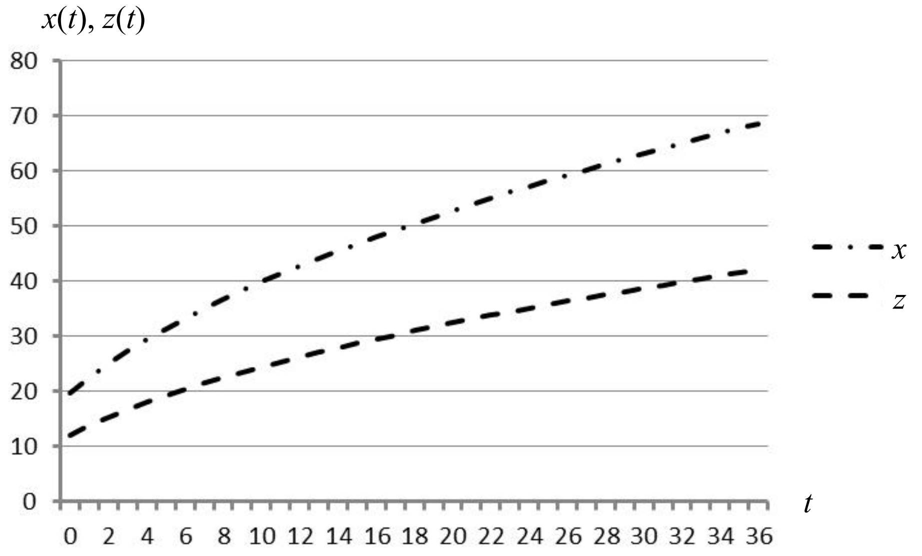
$$b_1 = 0{,}2 \ \ 13 = 2{,}6; \ b_2 = 0{,}5 \ \ 13 + 0{,}4 \ \ 13 = 11{,}7; \ b_3 = 0{,}3 \ \ 12 = 3{,}6;$$

$$c_1 = 0{,}3 \ \ 13 = 3{,}9; \ c_2 = 0{,}4 \ \ 13 = 5{,}2; \ c_3 = 2 \ \ 0{,}2 \ \ 12 = 4{,}8,$$

откуда

$$z = \sqrt{42{,}5t + 144};$$
$$x = 1{,}63 \ \ \sqrt{45{,}2t + 144}.$$

Графики функций $z(t)$, $x(t)$ показаны ниже:



Совершенно аналогично строится модель для случая, когда все коэффициенты влияния имеют вид kt^l, где k и l – постоянные, причем l – постоянная для всех коэффициентов влияния.

Для того чтобы численности учащихся всех групп совпадали (т.е. $x = y = z$), должна выполняться система уравнений

$$-b_1 - b_2 + 2c_3 - b_3 = 0;$$
$$b_1 - c_1 - b_2 - c_2 + b_3 = 0;$$
$$-b_1 - 2c_1 - b_2 - 2c_3 - b_3 = 0.$$

Теоретическая значимость полученных в данном параграфе результатов связана с выведением аналитического решения для модели системной динамики для трех типов обучаемых.

Практическая значимость результатов заключается прежде всего в том, что разработанная динамическая модель может быть использована для повышения качества учебного процесса, особенно при групповой форме обучения.

Модель системной динамики для числа типов обучаемых больше трех становится слишком сложной для аналитического решения. В этом случае следует применять метод имитационного моделирования.

ГЛАВА 3
МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ И КОМПЕТЕНТНОСТИ ОБУЧАЕМЫХ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

§ 3.1. Сетевое планирование и управление формированием компетенций и компетентности

Вопросы, связанные с компетенциями и компетентностью, рассмотрены во многих работах отечественных и зарубежных авторов.

В [34, с. 71–74] проанализирован вопрос управления качеством образования на основе компетентностного подхода. В [28, с. 19–23] предложен метод анализа и0 оценки компетенций и на их основе – компетентности с применением дерева компетенций, трансформируемого в сеть.

Цель предлагаемого параграфа состоит в разработке метода сетевого планирования и управления формированием компетенций и компетентности обучаемых, а также оценки параметров сетевого графика данного процесса. Решаются задачи построения сетевого графика формирования компетенций и компетентности; определения разреза знаний и его пропускной способности; оценки параметров (характеристик) сетевого графика при детерминированных, вероятностных и нечетких условиях.

Как показано в [28, с. 20–21], любую компетенцию, а также совокупность компетенций можно представить в виде дерева, вершины которого – подкомпетенции разных уровней. Дерево превращается в сеть при соединении вершин в одну, называемую стоком. Все формируемые за период обучения компетенции образуют дерево компетентности обучаемого.

Рассмотрим пример дерева компетенций из [28, с. 20], а именно компетенции ПК-6 по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (направление подготовки 08.01.00 Экономика). Компетенция ПК-6 формулируется как способность на основе описания экономических процессов и явлений строить (A_2) стандартные теоретические (A_5) и эконометрические модели (A_6), анализировать (A_3) и содержательно интерпретировать (A_4) полученные результаты. Эта компетенция может быть описана в виде дерева, состоящего из ряда уровней. Первый уровень A_1 – данная компетенция (ПК-6). Во второй уровень входят следующие способности:

на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели – A_2;

анализировать полученные результаты – A_3;

обоснованно интерпретировать полученные результаты – A_4.

Третий уровень составляют способности:

на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические модели – A_5;

на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные эконометрические модели – A_6;

анализировать полученные результаты, связанные с j-м $(j = \overline{1,m})$ видом или классом экономических процессов и явлений – $A_{9,j}$;

содержательно интерпретировать полученные результаты, относящиеся к j-му $(j = \overline{1,n})$ виду или классу экономических процессов и явлений – $A_{10,j}$.

На четвертом уровне расположены способности:

строить стандартные теоретические модели на основе описания j-го вида (класса) экономических явлений и процессов – $A_{7,j}$ $(j = \overline{1,k})$;

анализировать полученные результаты, связанные с j-м видом или классом экономических процессов на основе t-го вида типа математического аппарата (формулы, метода, алгоритма) – $A_{ijt}\,(i = 9,\ j = \overline{1,m},\ t = \overline{1,s_{ij}})$;

$A_{ijt}\,(i = 10,\ j = \overline{1,m},\ t = \overline{1,s_{ij}})$ – то же самое, что и в предыдущем случае, но относительно способности интерпретаций полученных результатов.

Пятый уровень: $A_{ijt}\,(i = 7,\ j = \overline{1,k};\ i = 8,\ j = \overline{1,l})$ – тот же смысл, что и у A_{ijt} четвертого уровня, но относительно построения теоретических моделей для i = 7 и эконометрических моделей для i = 8.

Общий вид дерева показан на рис. 3.1.1.

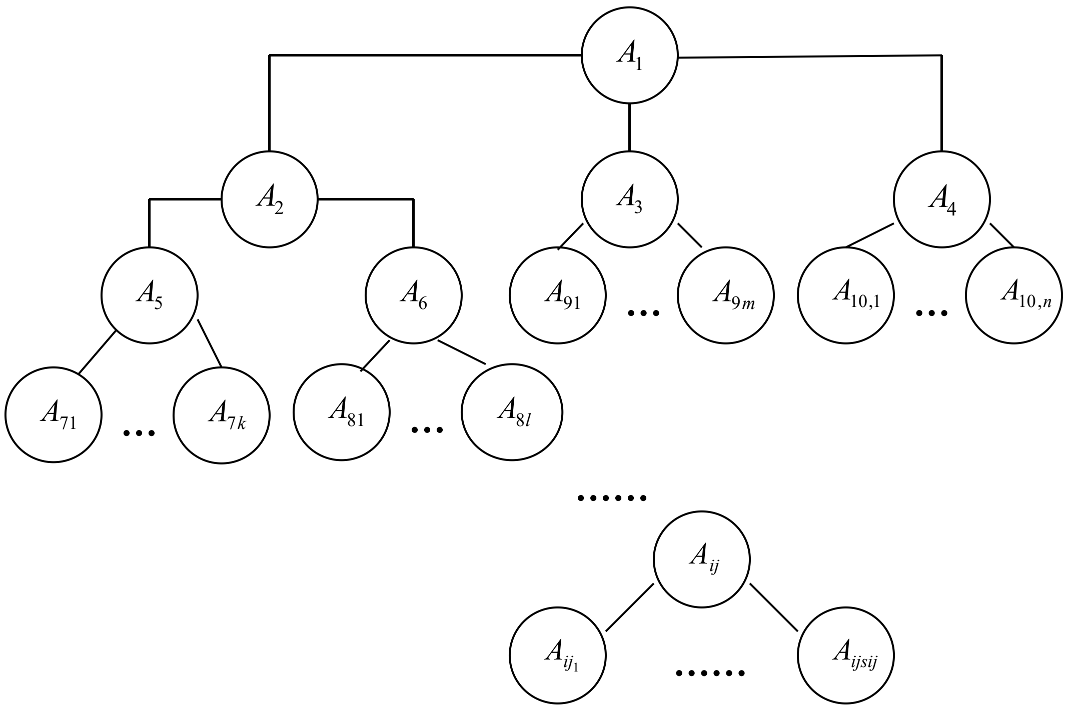


Рис. 3.1.1

Введем еще одну вершину – $A_{\text{фамилия}}$, соответствующую данному обучаемому, и соединим ее со всеми висячими вершинами. На основе полученного графа построим два орграфа графа. У первого начальная вершина – это A_1, а сток – это вершина $A_{\text{фамилия}}$, дуги – ориентированные ребра исходного графа при направлении сверху вниз. У второго начальная вершина – $A_{\text{фамилия}}$, сток – вершина A_1, а дуги – ориентированные ребра исходного графа при направлении снизу вверх. Поставим каждой дуге (A_i, A_j) первого орграфа число, характеризующее планируемую (теоретическую) степень усвоения (как номинальную, так и конкретно для данного учащегося), либо степень сложности [28, с. 24–25], либо плотность совокупной информации (плотность информационного потока), поступающей от вершины A_i в вершину A_j. Для второго орграфа дугам ставится в соответствие практическая степень усвоения (сложности, плотности) для данного учащегося.

Совокупная информация равна взвешенной сумме оценок ключевых понятий, примеров, задач, доказательств, таблиц, схем, рисунков. Плотность этих данных определяется как взвешенная сумма плотностей слагаемых.

Таким образом, каждой дуге x ставится в соответствие неотрицательное число $\varphi(x)$, которое называется потоком сети. Пусть $c(x)$ – максимально возможное значение для $\varphi(x)$, т.е. $\varphi(x)$ $c(x)$. Величина $c(x)$ называется пропускной способностью дуги x. Допустим, что для любой вершины (кроме V_1 и $A_{\text{фамилия}}$) сумма потоков по дугам, входящим в данную вершину, равна сумме потоков по дугам, исходящим из нее.

Пусть D – сеть некоторой компетенции (множества компетенций) и V – некоторое подмножество ее вершин. Разрезом знаний относительно V называется множество дуг, включающее в себя все дуги, исходящие из вершин, не принадлежащих V, и входящие в вершины, принадлежащие V. Общая сумма пропускных способностей дуг разреза именуется пропускной способностью разреза, разрез с минимальной пропускной способностью – минимальным. Для графа на рис. 3.1.1 обозначим через c_{ij} пропускную способность дуги (A_i, A_j) и через c_{ijt} – пропускную способность дуги (A_{ij}, A_{ijt}). Тогда, например, разрез сети относительно множества вершин $\{A_5, A_6\}$ в первом орграфе представляет собой множество дуг $\{(A_2, A_5), (A_2, A_6)\}$ с пропускной способностью, равной $c_{25} + c_{26}$, а разрез сети относительно множества вершин $\{A_{721}, A_{732}\}$ – множество дуг $\{(A_{72}, A_{721}), (A_{73}, A_{732})\}$ при числе классов экономических явлений k 2 и числе типов математических формул, методов и алгоритмов t 2. В этом случае пропускная способность разреза равна сумме $c_{721} + c_{732}$. Во втором орграфе пропускная способность относительно тех же множеств вершин будет равна $\sum_{j=1}^{k} c_{7j} + \sum_{j=1}^{k} c_{8j}$ и сумме пропускных способностей двух дуг, одна из которых идет от вершины $A_{\text{фамилия}}$ к A_{721}, а другая – от $A_{\text{фамилия}}$ к A_{732}.

Пропускная способность первого разреза знаний в первом орграфе дает оценку планируемой степени усвоения (сложности, плотности совокупной информации) при построении стандартных теоретических и эконометрических моделей, на базе первого и третьего класса экономических процессов и на основе первого и второго типа математического аппарата соответственно. Пропускная способность первого и второго разреза во втором орграфе дает аналогичные практические оценки для данного учащегося по итогам его работы по формированию компетенций и соответствующей компетентности.

Для второго орграфа первый уровень – это $A_{\text{фамилия}}$; второй уровень – подкомпетенции A_{ijt}, которые образуют предпоследний уровень первого орграфа. Анализ успеваемости учащегося начинается со второго уровня второго орграфа (графа его практических успехов). Если практическая пропускная способность этого уровня оказывается существенно меньше теоретической, то это говорит о недостаточном или даже плохом уровне усвоения данного учебного материала, слишком упрощенном варианте изложения информации. Поэтому на этом шаге необходимы корректировка предлагаемого для изучения учебного материала, способа ее изложения, проведение соответствующих мероприятий: консультаций, индивидуальной, домашней работы и т.п. Далее весь процесс повторяется уже для следующего уровня и т.д. Происходит процесс управления формированием компетенций и компетентности.

Особый интерес представляет минимальный разрез знаний, соответствующий малой степени усвоения данного учебного материала, его самой низкой сложности или минимальной информативности (теоретической при планировании (орграф 1) и практической при формировании компетенции и соответствующих ее подкомпетенций у данного учащегося (орграф 2)). В этом случае необходим детальный анализ со стороны преподавателя и соответствующих структур учебного отдела процедуры формирования данных подкомпетенций и компетентности учащихся с точки зрения корректировки тематического плана (может быть, и программы), структуры и содержания лекций, практических занятий, самостоятельной работы обучаемых.

При переходе от вершины $A_{\text{фамилия}}$ к A_1, согласно рис. 3.1.1, имеем шесть уровней, включая $A_{\text{фамилия}}$ и A_1. При формировании компетенции можно использовать различные уровни компетенции (познавательный, практический, репродуктивный, продуктивный, исследовательский [28, с. 22]), полагая уровень $A_{\text{фамилия}}$ соответствующим познавательному уровню, следующий уровень дерева – практическому; далее (движение снизу вверх) идет репродуктивный уровень, затем продуктивный и, наконец, совокупность вершин A_2, A_3 и A_4, которая соответствует исследовательскому уровню.

Рассмотрим орграф 2, который представляет собой графовую модель планирования и управления процессом формирования компетенции ПК-6 для данного учащегося. В качестве параметров сетевого графика можно рассматривать:

1) степень усвоения учебного материала;
2) степень сложности данного материала;
3) плотность совокупной информации.

События сетевого графика соответствуют его вершинам и имеют то же смысловое содержание, что и вершины. При переходе от одной вершины к другой совершается определенная работа по изучению учебного материала.

Сначала рассмотрим детерминированный случай определения параметров сетевого графика компетенции и совокупности компетенций. Если реализация подкомпетенции *B* *j*-й компетенции зависит от реализации подкомпетенции *A* *i*-й компетенции ($i,\ j=\overline{1,l},\ i\quad j,\ l$ – общее число компетенций), то от вершины *A* идет дуга (стрелка) в вершину *B*. По аналогии с временными параметрами сетевого графика находим параметры степени усвоения, степени сложности и плотности совокупной информации. Так, для данной вершины определяем наименьшую и наибольшую степень усвоения (т.е. сложности, плотности совокупной информации), резервное значение степени усвоения (сложности, плотности совокупной информации) как разность между наибольшим и соответствующим наименьшим значением. Совершаемая работа имеет характеристики, связанные с показателями усвоения, сложности и плотности совокупной информации учебного материала. В этом случае вместо продолжительности работы (A_i, A_j) будет рассматриваться общая (суммарная) степень усвоения (сложность усвоения, плотность совокупной информации) при движении по сетевому графику от вершины A_i к вершине A_j. Аналогично раннему и позднему срокам начала и окончания работы определяются наименьшая и наибольшая степени усвоения (сложности, плотности) учебного материала при достижении вершин A_i и A_j соответственно.

Полный путь находим как путь с началом в $A_{\text{фамилия}}$ и концом в A_1. Критический путь по степени усвоения – это полный путь с наибольшим суммарным значением степени усвоения. Аналогично определяем критический путь по степени сложности и по плотности совокупной информации. Резерв степени усвоения по данному пути равен разности между длиной критического пути и указанного данного, но для весовых значений дуг, равных соответствующим показателям степени усвоения.

Совершенно так же определяем резерв сложности учебного материала и резерв плотности совокупной информации. Полный резерв степени усвоения на данном отрезке пути показывает, на сколько можно увеличить степень усвоения на этом участке, чтобы степень усвоения на других участках пути, проходящих через данный, не изменилась. Аналогично определяется полный резерв степени сложности и плотности совокупной информации. Частный резерв степени усвоения (сложности, плотности) по указанному пути есть часть полного резерва, на которую можно увеличить степень усвоения (сложность, плотность), не изменив при этом наибольшего значения его начальной вершины.

Свободный резерв степени усвоения (сложности, плотности) по данному пути является частью полного резерва, на которую можно увеличить степень усвоения (сложность, плотность), не изменив при этом наименьшего значения его конечной вершины.

Одна из важных характеристик сетевого графика – коэффициент напряженности работ. Обычно он вводится для времени выполнения работ. Аналогичный коэффициент можно ввести для степени усвоения, сложности усвоения и плотности информационного потока.

Пусть A_i и A_j – соответственно начальная и конечная вершины рассматриваемого пути; $L_{\max}$ – длина максимального пути, проходящего через вершины A_i и A_j; L_{kp} – длина критического пути; L_{kp} – длина отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Тогда коэффициент напряженности

$$k_н(i,j) = \frac{L_{\max} - L_{кр}}{L_{кр} - L_{кр}}.$$

Этот коэффициент заключен в границах от 0 до 1. Чем ближе этот коэффициент к 1, тем труднее идет усвоение учебного материала в следующих случаях:

1) при изучении материала с заданной степенью усвоения;
2) с заданной сложностью усвоения;
3) с заданной плотностью информационного потока.

Чем меньше коэффициент $k_н(i,j)$ отличатся от нуля, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь с начальной вершиной A_i и конечной A_j.

Так, вершинам орграфа 2 (кроме $A_{\text{фамилия}}$ и A_1) соответствуют равные минимальная и максимальная степени усвоения (сложности, плотности информации). Если рассмотреть путь из начальной вершины в одну из данных вершин, не лежащей на критическом пути, то коэффициент напряженности будет $L_{\max}/L_{кр}$, где $L_{\max}$ равен сумме весов всех дуг, образующих данный путь. Для вершины, лежащей на критическом пути, коэффициент напряженности составляет единицу.

При нечетких значениях потока $\varphi(x)$ можно использовать треугольное представление нечетких чисел [76, с. 143–145].

Пусть c – нечеткое число. В этом случае можно воспользоваться треугольным представлением $c = \left[c_1, \bar{c}, c_2\right]$, где левая граница соответствует минимально возможному значению данного числа, правая граница – максимально возможному, среднее число – наиболее ожидаемому, определяемому как среднее арифметическое границ. При фиксированном уровне принадлежности α указанный сегмент преобразуется соответственно в более узкий сегмент с тем же центром.

Границы нечеткого числа будут совпадать с абсциссами точек пересечения прямой, соответствующей уровню α, с функцией принадлежности данного нечеткого числа (рис. 3.1.2). Тогда параметры сетевого графика будут определяться через исходные нечеткие числа с помощью операций сложения и вычитания, сводимых к соответствующим операциям над их границами; при расчете коэффициента напряженности используется еще операция деления.

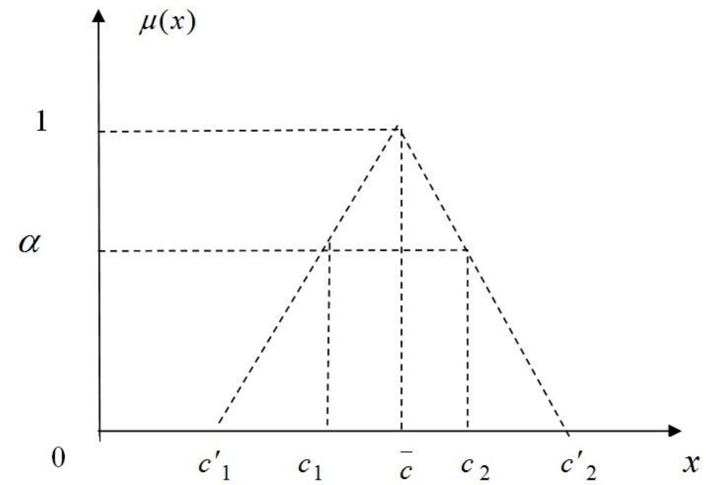


Рис. 3.1.2

Для определения вероятностных характеристик сетевого графика используем следующий подход. Рассмотрим объединение орграфов 1 и 2. Получим орграф 3, который является нагруженным: весами дуг выступают соответствующие суммы плотностей информационных потоков согласно их направлению движения. Данный граф представляет собой граф состояний системы, в которой протекают процессы планирования и управления формированием компетенций и компетентности учащегося (группы учащихся). Будем считать, что эта система в любой момент времени находится только в одном из своих состояний, которые совпадают с вершинами графа.

В системе протекает марковский процесс, так как заданное состояние системы в данный момент определяет ее переход в другие состояния, которые не зависят от предыстории процесса; кроме того, за малый промежуток времени появляется не более одной единицы потока. Таким образом, данную систему можно описать системой дифференциальных уравнений Колмогорова [66, с. 340–343], решение которой представляет собой изменяющиеся во времени вероятности состояний системы, предельные значения которых являются постоянными величинами и показывают доли времени нахождения системы в соответствующих состояниях. Данные вероятности рассматриваются в качестве вероятностных характеристик сетевого графика.

§ 3.2. Математическое моделирование составляющих учебного процесса

Процесс воспитания и формирования личности является сложной, динамически развивающейся системой. На данную систему управляющие воздействия оказывает образовательный процесс. Важными составляющими образовательного процесса являются макросистема формирования компетентности [38], системы компетенций [28], онтологий [40], учебников (учебных пособий) [41]. В [28] мы показали графическое представление компетенции в виде дерева.

Назовем висячие вершины дерева элементарными подкомпетенциями данной компетенции, а каждую висячую вершину и любое их объединение – фрагментом компетенции. Например, элементарная подкомпетенция A_{111}^{2} – анализ с применением первого математического аппарата первого результата первого расчета выступает фрагментом для компетенции ПК-5 по дисциплине «Математический анализ» (направление подготовки 08.00.00 Экономика). Любая подкомпетенция является фрагментом, если она служит поддеревом данной компетенции.

Обобщенная схема показана на рис. 3.2.1. Это прежде всего схема системы воздействия образовательного процесса на формирование компетентности учащегося (учебной группы) по учебной дисциплине. Данная система называется макросистемой учебного процесса. Состояния системы обозначены через S_i (это структурные звенья). Система имеет четыре горизонтальных уровня, связанные с формированием фрагментов компетенций.

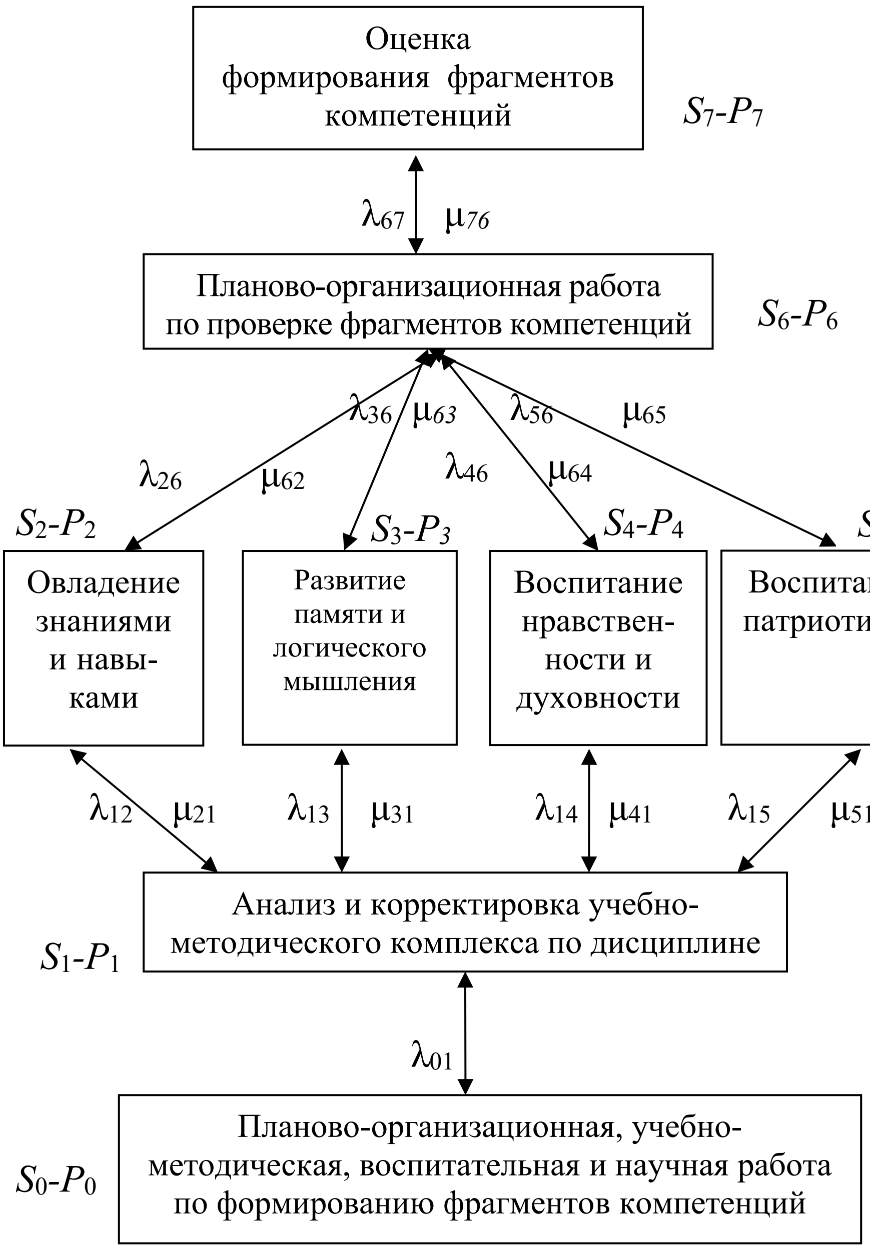


Рис. 3.2.1

Введем допущения:

1) в любой момент времени система может находиться только в одном из структурных звеньев данного уровня;

2) корректировка решения задачи конкретным структурным звеном на данном временном промежутке сводится к корректировке работы соответствующего звена (только одного) предшествующего горизонтального уровня;

3) в данный момент времени работает только один уровень системы, совокупность управляющих сигналов информационного потока переводят систему этого уровня на другой уровень. Это могут быть распоряжения,

указания, вопросы, служебные записки и т.п.; данные информационные единицы «взвешены» по степени их важности.

Следовательно, можно сделать вывод, что в любой момент времени система находится только в одном своем состоянии. Допущения верны. В любой момент времени на третьем уровне (считая снизу вверх) происходит одно из событий:

1) овладение знаниями и навыками;
2) развитие памяти и логического мышления;
3) воспитание нравственности и духовности;
4) воспитание патриотизма.

Эти четыре признака взвешены согласно их важности. Важность оценивается экспертами.

Пусть с верхнего уровня поступает сигнал о недостаточной компетентности учащегося (группы учащихся) по каким-то из этих признаков. Тогда на предыдущих уровнях последовательно происходит соответствующая отработка этих признаков (в порядке увеличения их важности). Вероятности нахождения системы в состояниях S_i обозначены через P_i . Протекающий в системе процесс условно можно считать марковским, так как переход из состояния S_i в состояние S_j не зависит от того, каким образом система попала в состояние S_i.

Опишем исходные данные в виде непрерывной марковской цепи. В данном случае рассматриваются плотности λ_{ij} потоков основных единиц. Эти единицы характеризуют учебную, воспитательную, трудовую деятельность образовательного учреждения. Для рассматриваемой системы основные единицы являются информативными единицами оценки качества обучения. Они связаны с объединенным критерием сложности, важности и степени усвоения. Потоки могут в общем случае иметь двустороннюю направленность: от S_i к S_j и от S_j к S_i (при $j>i$). Во втором случае плотности будем обозначать как μ_{ji}, которые являются потоками откликов вышестоящих уровней на поступающее воздействие нижестоящих. Параметры λ_{ij} и μ_{ji} $(i=\overline{0,6},\ j=\overline{1,7})$ соответствуют плотностям потоков реальных и нормативных показателей качества. Они могут зависеть от времени. Рассматриваемая система является системой уравнений Колмогорова:

$$
\begin{aligned}
&P_0(t)=\text{м}_{10}P_1(t)-\text{л}_{01}P_0(t);\\
&P_1(t)=\text{л}_{01}P_0(t)+\text{м}_{21}P_2(t)+\text{м}_{31}P_3(t)+\text{м}_{41}P_4(t)+\text{м}_{51}P_5(t)-\\
&-\text{л}_{12}P_1(t)-\text{л}_{13}P_1(t)-\text{л}_{14}P_1(t)-\text{л}_{15}P_1(t)-\text{м}_{10}P_1(t);\\
&P_2(t)=\text{л}_{12}P_1(t)+\text{м}_{62}P_6(t)-\text{л}_{26}P_2(t)-\text{м}_{21}P_2(t);\\
&P_3(t)=\text{л}_{13}P_1(t)+\text{м}_{63}P_6(t)-\text{л}_{36}P_3(t)-\text{м}_{31}P_3(t);\\
&P_4(t)=\text{л}_{14}P_1(t)+\text{м}_{64}P_6(t)-\text{м}_{41}P_3(t)-\text{л}_{46}P_4(t);\\
&P_5(t)=\text{л}_{15}P_1(t)+\text{м}_{65}P_6(t)-\text{л}_{56}P_5(t)-\text{м}_{51}P_5(t);\\
&P_6(t)=\text{л}_{26}P_2(t)+\text{л}_{36}P_3(t)+\text{л}_{46}P_4(t)+\text{л}_{56}P_5(t)-\\
&-\text{м}_{62}P_6(t)-\text{м}_{63}P_6(t)-\text{м}_{64}P_6(t)-\text{м}_{65}P_6(t);\\
&P_7\ (t)=\text{л}_{67}P_6(t)-\text{м}_{76}P_7(t);\\
&P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)+P_4(t)+P_5(t)+P_6(t)+P_7(t)=1.
\end{aligned}
\qquad (3.2.1)
$$

Будем считать все плотности λ_{ij} и μ_{ji} $(i=\overline{0,6},\ j=\overline{1,7})$ постоянными. Используя метод решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, запишем общее решение системы (3.2.1):

$$
\begin{aligned}
&P_0(t)=c_1x_{01}+c_2x_{02}+\ldots+c_6x_{06}+c_7x_{07};\\
&P_1(t)=c_1x_{11}+c_2x_{12}+\ldots+c_6x_{16}+c_7x_{17};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_7(t)=c_1x_{71}+c_2x_{72}+\ldots+c_6x_{76}+c_7x_{77},
\end{aligned}
$$

где $x_{ij}=P_{ij}e^{\text{л}_j t}$ $(j=\overline{1,7})$ является решением системы (3.2.1), соответствующее собственным значению л_j $(j=\overline{1,7})$ и вектору $(P_{1j},P_{2j},\ldots,P_{7j})$ матрицы системы A_0 (рис. 3.2.2).

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{л}_{01} & \text{м}_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\text{л}_{01} & -\text{л}_{12}-\text{л}_{13}-\text{л}_{14}-\text{л}_{15}-\text{м}_{10} & \text{м}_{21} & \text{м}_{31} & \text{м}_{41} & \text{м}_{51} & 0 & 0\\
0 & \text{л}_{12} & \text{л}_{26}-\text{м}_{21} & 0 & 0 & 0 & \text{м}_{62} & 0\\
0 & \text{л}_{13} & 0 & -\text{л}_{36}-\text{м}_{31} & 0 & 0 & \text{м}_{63} & 0\\
0 & \text{л}_{14} & 0 & 0 & -\text{л}_{46}-\text{м}_{51} & 0 & \text{м}_{64} & 0\\
0 & \text{л}_{15} & 0 & 0 & 0 & -\text{л}_{56}-\text{м}_{51} & \text{м}_{65} & 0\\
0 & 0 & \text{л}_{26} & \text{л}_{36} & \text{л}_{46} & \text{л}_{56} & -\text{м}_{62}-\text{м}_{63}-\text{м}_{64}-\text{м}_{65} & -\text{л}_{67}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{м}_{76} & 0
\end{array}
$$

Рис. 3.2.2

Если л_{ij} и м_{ji} зависят от времени, то используются другие методы решения. Векторная функция $F(t)=(P_{1j}(t),P_{2j}(t),\ldots,P_{7j}(t))$ является важной функциональной характеристикой системы (3.2.1). Для нее определяются такие характеристики, как кривизна, кручение, градиент. Эти характеристики можно применять для анализа и классификации образовательных систем.

В стационарном режиме (при достаточно большом периоде времени *t*) все P_i $(i = \overline{0,7})$ постоянны, все $P_i(t)$ $(i = \overline{0,7})$ равны нулю, т.е. это однородная система алгебраических уравнений. Решая эту систему, находим вероятности P_i $(i = \overline{0,7})$.

Вероятность P_i характеризует среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии. Для контроля мы составляем вектор $(P_1, \ldots, P_7)$. В случае существенных отличий происходит корректировка исходных данных, т.е. плотностей $л_{ij}$ и $м_{ji}$ переводящих потоков. Возникает задача определения того, какие отклонения от эталона считаются допустимыми. Данная задача (одна из важнейших, определяющих нормальное функционирование гражданского общества) связана с понятием устойчивости системы и направлена на сохранение нравственно-этических, юридических, экономических норм независимо от различного рода негативных влияний. Модель структурно устойчивая, если достаточно малые изменения в структуре самой модели вызывают такое ее поведение, которое качественно аналогично поведению исходной модели [60]. Мы имеем задачу устойчивого функционирования рассматриваемой системы (см. рис. 3.2.1).

Рассмотрим постановку задачи в общем виде. Пусть функциональная система описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \ i = \overline{1,n}, \qquad (3.2.2)$$

где x_i – это функции времени *t*.

Обозначим: $\overline{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$; $\overline{x^0}(t) = \{x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots, x_n^0(t)\}$; $\|\overline{x}(t)\|$ – это норма вектора и $\|\overline{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \ldots + x_n^2(t)}$.

Решение $\overline{x^0}(t)$ устойчиво [65], если достаточно близкие к нему в любой начальный момент t_0 решения $\overline{x}(t)$ целиком «погружаются» в любую узкую трубку ε , построенную вокруг решения $\overline{x^0}(t)$. Решение $\overline{x^0}(t)$ называется асимптотически устойчивым при $t \to$, если это решение устойчиво [60]; для любого t_0 (0,) существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что все решения $\overline{x}(t)$ $(t_0 \quad t <\ )$, удовлетворяющие условию $\|\overline{x}(t_0) - \overline{x^0}(t_0)\| < \Delta$, обладают свойством $\lim\limits_{t \to} \|\overline{x}(t) - \overline{x^0}(t)\| = 0$.

Линейная система (3.2.2) называется **устойчивой (асимптотически устойчивой)**, если все ее решения $\overline{x}(t)$ устойчивые (асимптотически устойчивые) при $t \to$. Пусть система имеет n уровней, каждый из которых содержит n элементов, тогда a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ является обобщающей характеристикой функционирования элемента S_{ij} . Если на некотором уровне число элементов меньше, чем n, то соответствующие a_{ij} равны нулю. В общем случае a_{ij} – это функции, в частном случае числа.

Составим из них матрицу

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix},$$

которая применяется при анализе системы на устойчивость.

Матрица A имеет ровно n собственных значений $л_1, л_2, \ldots, л_n$, которые являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - л) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - л) & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - л) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.2.3)$$

Уравнение (3.2.3) представляет собой алгебраическое уравнение

$$л^n + b_1 л^{n-1} + \ldots + b_{n-1} л + b_n = 0\,. \qquad (3.2.4)$$

Если все элементы a_{ij} – числа, то b_i $(i = \overline{1, n})$ тоже числа.

Из теории устойчивости известно, что система (3.2.2) с матрицей A является устойчивой тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют меньшие или равные нулю вещественные (действительные) части; система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части; система неустойчива тогда и только тогда, когда ее матрица A имеет хотя бы одно собственное значение λ, для которого вещественная часть или положительна, или равна нулю, но при этом ранг матрицы $A - лI$ меньше кратности собственного значения λ, где I – единичная матрица.

Уравнения типа (3.2.4) высоких степеней не имеют общих выражений для корней. Тогда используем правила (критерии), которые позволяют судить об устойчивости.

Рассмотрим **критерий Гурвица**. Составляем квадратную матрицу (матрицу Гурвица) из коэффициентов алгебраического уравнения:

$$Г = \begin{matrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \ldots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{matrix}.$$

Если $m > n$, то $b_m = 0$.

Согласно критерию устойчивости Гурвица, система (3.2.2) с матрицей A является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры соответствующей матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = b_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & 1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = b_n \ \Delta_{n-1}$$

являются положительными, т.е. $\Delta_i > 0$ при $i = 1,2,...,n$.

Система дифференциальных уравнений (3.2.1) – это линейная система дифференциальных уравнений типа (3.2.2), матрица которой имеет вид, представленный на рис. 3.2.2. При конкретных значениях плотностей, используя указанные критерии, можно исследовать систему (3.2.1) на устойчивость. Из устойчивости этой системы будет вытекать устойчивость представленной на рис. 3.2.1 системы воздействия образовательного процесса на развитие компетентности учащегося (учебной группы).

Предположим, что плотности $л_{ij}$, $м_{ji}$ потоков информативных единиц являются постоянными величинами (условие стационарности потоков). Допустим, что

$$л_{ij} = м_{ji} \ (i = \overline{0,6},\ j = \overline{1,7})$$

задает эталонный вариант функционирования системы, изображенной на рис. 3.2.1. Это условие равенства плотностей входного и выходного потоков формулируется так: реальное усвоение учебного материала соответствует нормативному (например, число усвоенных дидактических единиц соответствует норме). Следовательно, матрица A_0 в этом случае будет симметрической, а соответствующая ей квадратичная форма, представляющая собой формульную модель данной системы, – выпуклой в том и только том случае, когда все главные миноры матрицы A_0 будут неотрицательными, и вогнутой, если первый минор будет неположительным, второй – неотрицательным, третий – неположительным и т.д. В связи с этим существует три типа систем, представленной на рис. 3.2.1:

1) система представляется через выпуклую функцию;

2) система представляется через вогнутую функцию;

3) система представляется через функцию общего вида.

Квадратичные формы всех этих систем можно характеризовать такими показателями, как **кривизна** и **кручение**, и соответствующим образом классифицировать системы. Можно выделить три типа представления системы учебного процесса:

1) с использованием положительно определенной квадратичной формы;

2) применением отрицательно определенной квадратичной формы;

3) использованием знакопеременной формы.

При этом, поскольку система с матрицей A_0 устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные или равные нулю вещественные части, в случае отрицательно определенной квадратичной формы матрицы A_0 можно говорить об устойчивости определяемой ею системы.

Если матрица A_0 не является симметрической, то обозначим через x_{ji} разность $м_{ji} - л_{ij}$ при $м_{ji} > л_{ij}$ и через $-x_{ij}$ – ту же разность при $м_{ji} < л_{ij}$. В общем случае эту разность будем обозначать через $\tilde{x}_{ij}$. Для рассматриваемой задачи найдем оптимальные значения $\tilde{x}_{10}, \tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{31}$, $\tilde{x}_{41}, \tilde{x}_{51}, \tilde{x}_{62}, \tilde{x}_{63}, \tilde{x}_{64}, \tilde{x}_{65}, \tilde{x}_{76}$, такие, чтобы система с матрицей A_0 была устойчивой и в то же время сумма квадратов этих переменных $T = \tilde{x}^2{}_{10} +$ $+ \tilde{x}^2{}_{21} + \tilde{x}^2{}_{31} + \tilde{x}^2{}_{41} + \tilde{x}^2{}_{51} + \tilde{x}^2{}_{62} + \tilde{x}^2{}_{63} + \tilde{x}^2{}_{64} + \tilde{x}^2{}_{65} + \tilde{x}^2{}_{76}$ была минимальной. Обозначим множество данных переменных через *M*. Рассмотрим методику решения данной задачи.

Для матрицы A_0 находим соответствующее ей характеристическое уравнение (3.2.4). На основе этого уравнения мы составляем **матрицу Гурвица** Г. Для этой матрицы мы записываем критерий устойчивости Гурвица, который заключается в положительности главных миноров матрицы Г. При этом каждый минор $Д_k$ $(k = \overline{1,8})$ представляется в виде алгебраической суммы

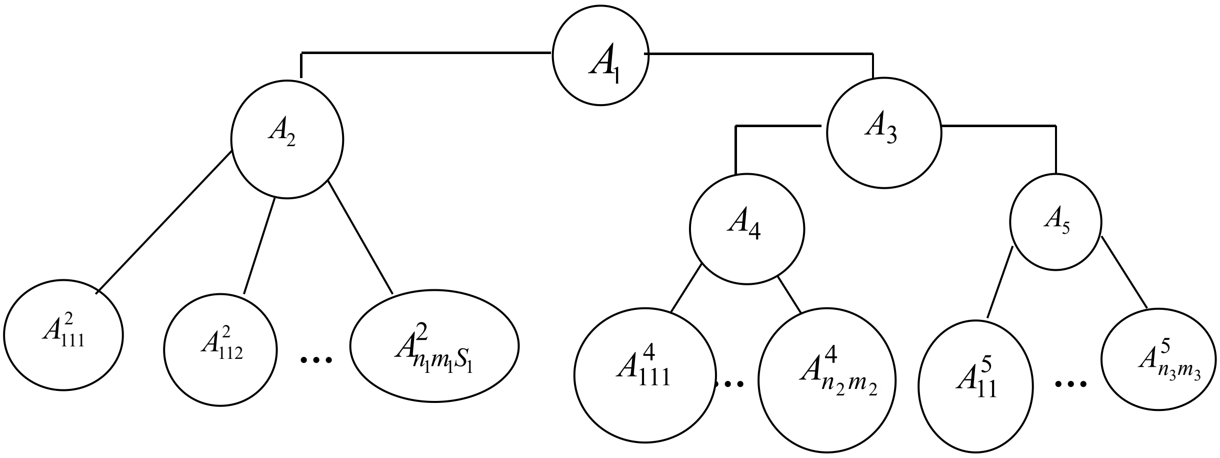
$$ц_k = ц_k(\tilde{x}_{10}, \tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{31}, \tilde{x}_{41}, \tilde{x}_{51}, \tilde{x}_{62}, \tilde{x}_{63}, \tilde{x}_{64}, \tilde{x}_{65}, \tilde{x}_{76})$$

определенных произведений переменных $\tilde{x}_{ij}$ $(\tilde{x}_{ij} \quad M)$ с числовыми коэффициентами. Эти коэффициенты выражаются через произведения или алгебраические суммы произведений ненулевых элементов $л_{ij}$, $м_{ji}$ матрицы A_0. Таким образом, решается задача нелинейного программирования.

Исследуем на экстремум (минимум и максимум) функцию *T* при условиях $ц_k > 0$ $(k = \overline{1,8})$. Для решения этой функции можно использовать различные методы, например внутренних штрафов в сочетании с методом Ньютона, расширенных лагранжианов [63, 72].

В случае минимального значения функции *T* можно говорить о минимальной корректировке матрицы A_0 в рамках ее устойчивости, соответствующей данной матрице. При максимальном значении *T* имеем максимально возможную корректировку матрицы A_0 с сохранением устойчивости. При решении задачи мы рассматривали в качестве эталонной матрицы симметрическую. Она удовлетворяет равенству плотностей потоков ($м_{ji} = л_{ij}$). Однако в общем случае соответствующая такой матрице система может не быть устойчивой.

Исследуем устойчивость других составляющих учебного процесса. Дерево компетенции ПК-5 по дисциплине «Математический анализ» (направление подготовки 08.00.00 Экономика) выглядит следующим образом:



На нем компетенция ПК-5 = A_1 ; A_2 – способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; A_3 – способность проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы; $A^2{}_{ijk}$ – способность выбрать *i*-е инструментальное средство ($i=\overline{1,n_1}$) для обработки экономических данных *j*-го типа ($j=\overline{1,m_1}$) в соответствии с поставленной задачей *t*-го типа ($t=\overline{1,s_1}$); A_4 – способность проанализировать результаты расчетов; A_5 – способность обосновать полученные выводы; $A^4{}_{ijt}$ – анализ с помощью *i*-го математического аппарата $(i=\overline{1,n_2})$ *j*-го результата $(j=\overline{1,m_2})$ *t*-го расчета ($t=\overline{1,s_2}$) ; $A^5{}_{ij}$ – обоснование с применением *i*-го математического аппарата $(i=\overline{1,n_3})$ *j*-го вывода $(j=\overline{1,m_3})$. Переход сверху вниз характеризуют плотности $л_{ij}$, снизу вверх – $м_{ji}$, $i \quad \{111,\ldots,n_2 m_2 s_2\}$, $j \quad \{11,\ldots,n_3 m_3\}$. Данное дерево можно превратить в систему, если сделать его информационной сетью. Для этого введем новую вершину $A_ц$, соответствующую конкретному учащемуся, соединив ее со всеми висячими вершинами дерева. Каждое ребро заменим парой направленных противоположно дуг. Веса этих дуг равны плотностям информационных потоков соответственно планируемой и усвоенной учебной информации данным учащимся. Это потоки ключевых понятий, примеров, задач, таблиц и т.д., взвешенных по степени их важности и сложности. Получаем информационную сеть. Будем считать, что данная система в любой момент времени находится только в одном своем состоянии, и можно считать, что в ней протекает марковский процесс. Такое допущение оправдано. Во-первых, данная компетенция разбита на элементарные подкомпетенции, при этом происходил процесс последовательной их отработки с учетом важности и сложности, во-вторых, подкомпетенции формировались также последовательно.

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Эта система является математической моделью для процесса формирования компетенций у данного учащегося. Решение данной системы аналогично решению системы (3.2.1):

$$
\begin{aligned}
&P_1(t) = -(\mu_{12} + \mu_{13})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{31}P_3(t);\\
&P_2(t) = -(\lambda_{21} + \mu_{2,111} + \ldots + \mu_{2,\,n_1m_1s_1})P_2(t) + \mu_{12}P_1(t) +\\
&+\lambda_{111,2}P_{111}(t) + \ldots + \lambda_{n_1m_1s_1,2}P_{n_1m_1s_1}(t);\\
&P_3(t) = -(\lambda_{31} + \mu_{34} + \mu_{35})P_3(t) + \mu_{13}P_1(t) + \lambda_{43}P_4(t) + \lambda_{53}P_5(t);\\
&P_i(t) = \mu_{4,i}P_4(t) - \lambda_{i,4}P_i(t), \quad i \quad \{111, \ldots, n_2m_2s_2\};\\
&P_j(t) = \mu_{5,j}P_5(t) - \lambda_{j,5}P_j(t), \quad j \quad \{11, \ldots, n_3m_3\}.
\end{aligned}
$$

Плотности переводящих потоков могут иметь также смысл степени усвоения, сложности учебного материала [37].

Таким образом, для компетенции можем записать матрицу, аналогичную матрице (3.2.3), поставить в соответствие матрице квадратичную форму и классифицировать компетенции по признакам выпуклости/вогнутости, положительной/отрицательной определенности соответствующих квадратичных форм.

Будем говорить, что компетенция устойчива (асимптотически устойчива), если устойчива (асимптотически устойчива) моделирующая ее система дифференциальных уравнений Колмогорова. Используя критерий устойчивости (асимптотической устойчивости), можно исследовать компетенцию на устойчивость (асимптотическую устойчивость). Делаем это аналогично рассмотренной выше макросистеме по формированию компетентности. Точно так же осуществляется анализ онтологий.

Система для описания процесса изучения учебника (рис. 3.2.3) предложена в [41]. Показано, что это марковский процесс. На рис. 3.2.3 $\mu_{i,i+1}$ – плотность «сбоев» в усвоении учебного материала, $\mu_{i+1,i}$ есть плотность устраненных «сбоев».

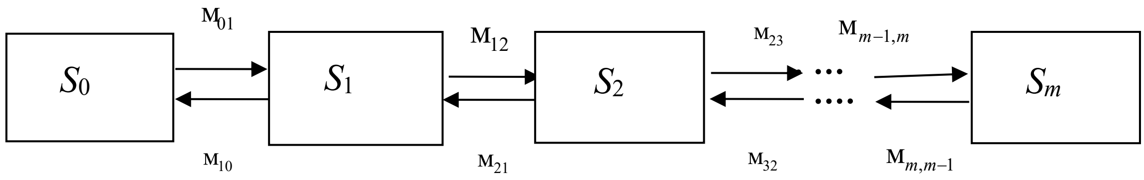


Рис. 3.2.3

Пусть система дифференциальных уравнений Колмогорова будет устойчивой (асимптотически устойчивой). Тогда будем называть процесс изучения учебника устойчивым (асимптотически устойчивым).

Можно, как было сказано, ввести классификацию учебников (учебных пособий) относительно выпуклости/вогнутости, положительной/ отрицательной определенности представляющих учебник квадратичных форм. С использованием квадратичных форм можно осуществлять анализ устойчивости (асимптотической устойчивости) учебников (учебных пособий), как это было сделано для макросистемы (см. рис. 3.2.1).

Дифференциальная модель изучения учебника/учебного пособия представлена системой

$$
\begin{aligned}
&P_0\,(t) = -м_{01}P_0(t) + м_{10}P_1(t);\\
&P_i\,(t) = -(м_{i,i-1} + м_{i,i+1})P_i(t) + м_{i-1,i}P_{i-1}(t) + м_{i+1,i}P_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, m-1};\\
&P_m\,(t) = -м_{m,m-1}P_m(t) + м_{m-1,m}P_{m-1}(t).
\end{aligned}
$$

Итак, рассмотрены дифференциальные, матричные и функциональные модели составляющих учебного процесса (макросистемы формирования компетентности, компетенций, онтологий, учебников (учебных пособий)). Осуществлена классификация указанных составляющих. Описана методика анализа их на устойчивость (асимптотическую устойчивость).

Системное описание влияния образовательного процесса на формирование личности, а тем самым и на развитие гражданского общества, находит широкое применение в образовательных учреждениях при поиске оптимальных воздействующих потоков и определении показателей, обусловливающих устойчивое функционирование рассмотренных систем.

§ 3.3. Метод определения оптимальных модулей и компетентности обучаемых

Компетентность в той или иной области – одна из важнейших характеристик, которой должен обладать выпускник вуза. Компетентность рассматривается как способность и готовность личности к деятельности, основанные на знаниях, умениях и навыках, приобретенных в процессе обучения и ориентированных на самостоятельное участие личности в учебно-познавательном процессе с последующей социально-производственной интеграцией. Компетентность – интегральная (совокупная) характеристика нескольких компонент, необходимых для эффективной профессиональной деятельности. Формирование компетентности осуществляется через систему соответствующих компетенций.

В настоящее время компетентностный подход выступает основным в формировании знаний, умений и навыков учащихся в учебном процессе. Кроме того, такой подход способствует появлению новых качеств у выпускника (инициативности, инновационности, мобильности, гибкости, динамизма и конструктивности).

Компетенции и результаты образования рассматриваются как главные целевые установки в реализации ФГОС ВО. Компетентностная модель обучения описана во многих работах отечественных и зарубежных авторов. Работа [28] посвящена вопросу управления качеством образовательного процесса на основе компетентностного подхода. В книге [62] дан анализ развития компетентностного подхода в высшем образовании. Ряд работ посвящен применению аппарата нечеткой логики и нечетких множеств при описании компетенций [3, 79].

В данном параграфе рассмотрим метод нахождения оптимальных по определенным критериям модулей дисциплины и оценки компетентности обучаемого. Для этого решим задачи:

1. Выбора критериев оценки модулей.
2. Нахождения оптимальных модулей согласно выбранным критериям.
3. Оценки компетентности обучаемого.

Компетентность по каждой дисциплине формируется в ходе учебно-воспитательного процесса, реализуемого на основе учебно-методического комплекса данной дисциплины согласно учебной и рабочим программам. Содержание программы выражается через совокупность модулей, образующих систему формирования компетентности.

Комплекс модулей можно рассматривать как обучающую систему, которая является многоуровневой и иерархической, подобно тому, как это сделано в [41]. Уровнями можно считать, например, темы (главы, параграфы, пункты). Далее оценивают характеристики системы (подробно описаны в [41]):

1) эффективность, характеризуемая вероятностью изучения дисциплины (модуля) без «сбоев»;

2) надежность системы, которая связана с изучением данного материала в течение конкретного времени;

3) расстояние от произвольного фрагмента (например, ключевого понятия) до ближайшего к нему;

4) количество связей с внешней средой (или частота обращений к основной и дополнительной литературе).

Перечисленные характеристики можно брать в качестве критериальных оценок модулей и учебного курса в целом.

На основе экспертного оценивания определяют эталонные оценки указанных критериев. Далее полученные значения сравнивают с эталонными. В результате происходит корректировка учебного курса.

Компетенции, связанные с данной учебной дисциплиной или комплексом дисциплин, характеризуют соответствующую систему формирования компетентности и дают возможность сравнивать системы между собой по степени предпочтительности: лучшей считается та, которая в большей степени соответствует своему целевому назначению, выраженному через соответствующие компетенции.

Компетенции формируются, как правило, на содержательном (качественном) уровне и позволяют судить об общем направлении приобретения соответствующих знаний, умений и навыков. Для обеспечения необходимой ясности и однозначности формулировок компетенции лучше всего описывать с помощью ключевых терминов дисциплины (комплекса дисциплин). Для этого исходную компетенцию разбивают на совокупность частных (более простых и конкретных) подкомпетенций. Так, компетенция ПК-5 по дисциплине «Математический анализ» (направление подготовки 08.01.00 Экономика) звучит следующим образом: способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы. Исходя из данной формулировки, нельзя конкретно и однозначно сказать, о каких инструментальных средствах и экономических данных идет речь, в чем заключается анализ расчетов, как происходит обоснование полученных выводов. Отчасти ответ можно получить, разобрав термины «знать», «уметь», «владеть», но и здесь необходимая детализация и конкретизация отсутствуют.

В то же время компетенция, как мы говорили выше, имеет иерархическую структуру. Поэтому удобно описывать компетенцию как дерево из составляющих ее фрагментов, которые образуют элементарные подкомпетенции исходной компетенции. При этом следует выполнять требования:

1) формулировки элементарных подкомпетенций должны быть конкретными;

2) должна иметься возможность количественной оценки степени их достижения;

3) подкомпетенции одного уровня должны быть сопоставимы по масштабу и задачам;

4) объединение компетенций нижнего уровня должно полностью характеризовать компетенцию верхнего уровня;

5) общая компетенция, находящаяся в начальной вершине дерева, должна отражать направление профессиональной подготовки;

6) при декомпозиции компетенции нужно исходить из того, что подкомпетенция нижнего уровня является необходимым и достаточным условием соответствующей компетенции верхнего уровня, наконец, вершины (узлы) дерева – это подкомпетенции разных уровней.

Построим дерево компетенции ПК-5.

Первый уровень A_1 – данная компетенция. Во второй уровень входят:

A_2 – способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей;

A_3 – способность проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.

Третий уровень содержит способности:

$A^2{}_{ijk}$ – выбрать i-е инструментальное средство (формулу, уравнение, систему, метод, методику, алгоритм и т.п., $i = \overline{1, n_1}$) для обработки экономических данных j-го типа (зависимости, предельной величины, линии уровня, экономической модели и т.п., $j = \overline{1, m_1}$) в соответствии с поставленной задачей t-го типа (вычисление предела, производной, интеграла, решения системы, дифференциального уравнения и т.д., $t = \overline{1, s_1}$);

A_4 – проанализировать результаты расчетов;

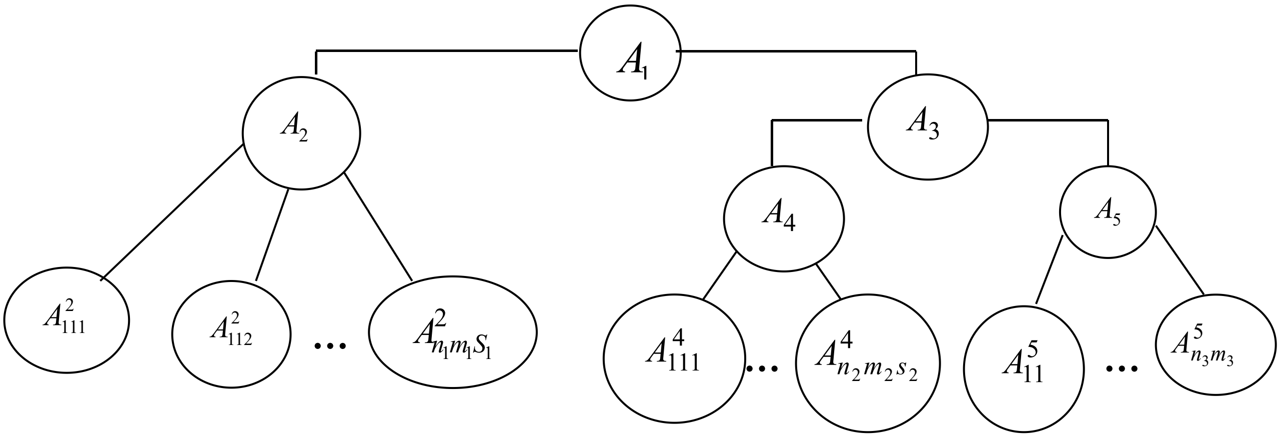
A_5 – обосновать полученные выводы.

Четвертый уровень образуют:

$A^4{}_{ijt}$ – анализ с применением i-го математического аппарата $(i = \overline{1, n_2})$ j-го результата $(j = \overline{1, m_2})$ t-го расчета $(t = \overline{1, s_2})$;

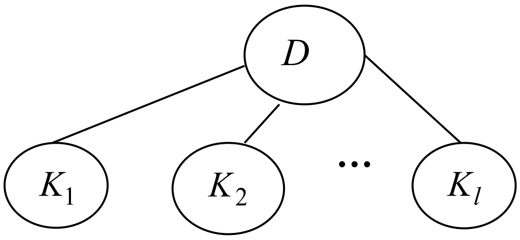
$A^5{}_{ij}$ – обоснование с применением i-го математического аппарата $(i = \overline{1, n_3})$ j-го вывода $(j = \overline{1, m_3})$.

Соответствующее дерево компетенции представлено ниже:



Фрагменты A_{ijt} будем называть элементарными составляющими компетенции (в нашем случае – компетенции ПК-5).

Если рассматриваются все m компетенций K_i $(i = \overline{1,l})$ данной дисциплины D, то определяется дерево данной дисциплины:



На нем K_i – дерево i-й компетенции $(i = \overline{1,l})$. Если реализация подкомпетенции B j-й компетенции обусловливается реализацией подкомпетенции A i-й компетенции $(i, j = \overline{1,l};\ i \quad j)$, то на дереве дисциплины от вершины A идет стрелка к вершине B. Такая связь полезна при оценке подкомпетенции B, зависимой от оценки подкомпетенции A, поскольку эти оценки являются коррелированными.

При совместном рассмотрении r дисциплин D_1, …, D_r учебного плана строится дерево данной совокупности, на котором также стрелками указана зависимость подкомпетенций.

Далее экспертам предлагается оценить элементарные составляющие согласно выбранной шкале оценок для любой компетенции по всем дисциплинам данного профиля. Каждому практическому занятию и каждой лекции ставится в соответствие система элементарных составляющих по всем компетенциям, связанным с данным занятием или данной лекцией. В результате находим максимально возможную оценку компетентности обучаемого на занятии (на лекции) как сумму оценок тех элементарных составляющих, которые непосредственно связаны с занятием (лекцией).

Пропуск занятия (лекции) без последующей отработки аннулирует оценку по данному занятию (данной лекции). Плохая отработка подкомпетенций A_{ijt}, связанных с этим занятием (этой лекцией), ведет к аннулированию соответствующих слагаемых по нему (ней). При этом должна учитываться важность показателя (формул, методов, алгоритмов, методик и т.д.), которая связана со сложностью усвоения, использованием для дальнейшего усвоения учебного материала по данной дисциплине и базирующихся на ней фрагментов других дисциплин, а также с фактором применения данного показателя в будущей профессиональной деятельности. При оценке важности можно применять уровни компетенции (познавательный, практический, репродуктивный, продуктивный, исследовательский), рассмотренные в [62].

Сумма оценок элементарных составляющих может быть взвешенной, если элементарные составляющие вносят разный по значимости вклад в формирование компетентности. На основе оценок практических занятий и лекций находим оценку данной дисциплины как взвешенную сумму.

Для каждого обучаемого отношение общей суммы его оценок по всем занятиям и лекциям данной дисциплины к максимально возможной оценке характеризует степень компетентности по данной дисциплине. Будем называть указанное отношение, умноженное на 100 %, коэффициентом степени компетентности по данной дисциплине. На основе этого коэффициента можно провести градацию по стандартной шкале, считая, что значение коэффициента, равное 0–50 %, соответствует неудовлетворительной оценке, 51–74 % – удовлетворительной, 75–89 % – хорошей, 90–100% – отличной. При таком подходе к оценке компетентности, очевидно, выполняются следующие требования:

1) показатель компетентности стремится к нулю, если число ненулевых слагаемых стремится к нулю;

2) показатель компетентности тем больше, чем больше наибольшее значение ненулевых слагаемых;

3) при построении дерева дисциплины (учебного плана) учитывается зависимость элементарных подкомпетенций, а следовательно, и соответствующие оценки.

Упорядоченной совокупности оценок $k_1,\ldots,k_n$ элементарных подкомпетенций данной компетенции можно поставить в соответствие вектор $(\sqrt{\lambda_1 k_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n k_n})$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – соответствующие веса. При формировании подобных векторов считаем, что порицательные баллы – это наименьшие неотрицательные баллы. Тогда успеваемость каждого обучаемого можно характеризовать длиной соответствующего вектора

$$\left|(\sqrt{\lambda_1 k_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n k_n})\right| = (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_n k_n)^{1/2}.$$

Очевидно, что чем больше длина вектора, тем лучше успеваемость и, наоборот, чем лучше успеваемость, тем больше длина данного вектора. Эталоном является вектор максимально возможной длины, полученный при максимально возможных оценках k_1, …, k_n. При равных длинах лучшая успеваемость будет у того учащегося, у которого угол между его вектором успеваемости и эталонным будет меньше. Данная векторная оценка согласуется со взвешенной суммой, а именно, оценка первой компетенции, рассматриваемая как взвешенная сумма оценок ее элементарных подкомпетенций, будет больше соответствующей взвешенной суммы для второй компетенции тогда и только тогда, когда длина первого вектора будет больше длины второго вектора. В то же время векторная оценка дает лучшую возможность для сравнения, так как при равных взвешенных суммах наиболее высокое значение успеваемости определяется меньшим углом отклонения векторов от эталонного вектора успеваемости. Соответствующим вектором можно оценить фрагмент знаний.

Итак, мы рассмотрели оценку при четко сконструированных исходных данных любых фрагментов знаний вплоть до освоения совокупности учебных дисциплин всего процесса обучения в учебном заведении данным учащимся или группой через определение коэффициента компетентности или через соответствующий вектор.

Однако в силу множества объективных причин, а также обилия разного рода параметров такой социальной системы, как образование, часто приходится принимать решения в условиях нечеткой информации. В настоящее время существуют разные методы оценки этой информации. Так, в [79] вводятся уровни компетенции, о которых говорилось выше, а также соответствующие функции принадлежности типа $e^{-(x-\alpha)^2/b^2}$. Находят взвешенную сумму всех компетенций до и после эксперимента. При этом если оценка $x=0$, то соответствующее взвешенное слагаемое будет вносить отнюдь не нулевой вклад в общую сумму совокупности компетенций. Это обстоятельство существенно нивелирует значимость предложенного метода. Кроме того, совсем непонятно, как эксперт (и тем более обучаемый) может интуитивно определить четко функцию принадлежности в виде $e^{-(x-\alpha)^2/b^2}$. В работе [3] для оценки уровня компетенции использован метод логики противоположностей. Строится дерево, узлами которого являются компетенции с весовыми коэффициентами. Связи между начальной вершиной и рассматриваемыми компетенциями называют тесными, связи внутри каждой компетенции – слабыми. Оценка каждой компетенции трактуется как средняя взвешенная ее группы, при этом ничего не сказано об этих оценках. Оценка компетенции $H[A]$ рассчитывается по формуле

$$H[A] = -\log_2\left[1-(1-2^{-P_2H_2})(1-2^{-P_3H_3})\ \ldots\ (1-2^{-P_nH_n})\right], \qquad (3.3.1)$$

где $P_i\,(i=\overline{2,n})$ – веса; $H_i\,(i=\overline{2,n})$ – оценки компетентностей второго уровня.

Формула (3.3.1) используется для того, чтобы при нулевой оценке какой-либо компетенции комплексная оценка $H[A]$ всех компетенций также была нулевая. Однако это условие можно выразить гораздо более простой формулой (при введенных в [3] обозначениях), которую можно считать модернизированной формулой взвешенной суммы:

$$H[A] = (P_2H_2 + \ldots + P_nH_n)\ sg(P_2H_2\ \ldots\ P_nH_n),$$

где $sg(x) = \begin{cases} 0,\ x \quad 0; \\ 1,\ x > 0. \end{cases}$

Кроме того, непонятна роль цифры 2 в основании показательной функции. Если рассматривать такую же формулу при основании 3, 4 и т.д., то будут получаться разные результаты для оценки $H[A]$. При этом, например, если $\alpha = H[A]/H[A_1]$, где $H[A]$ – оценка компетентности одного обучаемого, $H[A_1]$ – другого обучаемого, вычисленные по формуле (3.3.1), то при основании показательной функции, равном 3, соответствующее отношение $H[A]/H[A_1]$ будет уже другим.

Из приведенных примеров следует, что при применении теории нечетких множеств в учебном процессе следует оперировать интуитивно понятными, логически обоснованными и согласованными с мнением экспертов функциями. Рассмотрим пример.

Пусть оценивается некоторый показатель (например, по десятибалльной шкале) и на основе опроса экспертов получена оценка его принадлежности множеству хороших, но не отличных оценок, приведенных ниже:

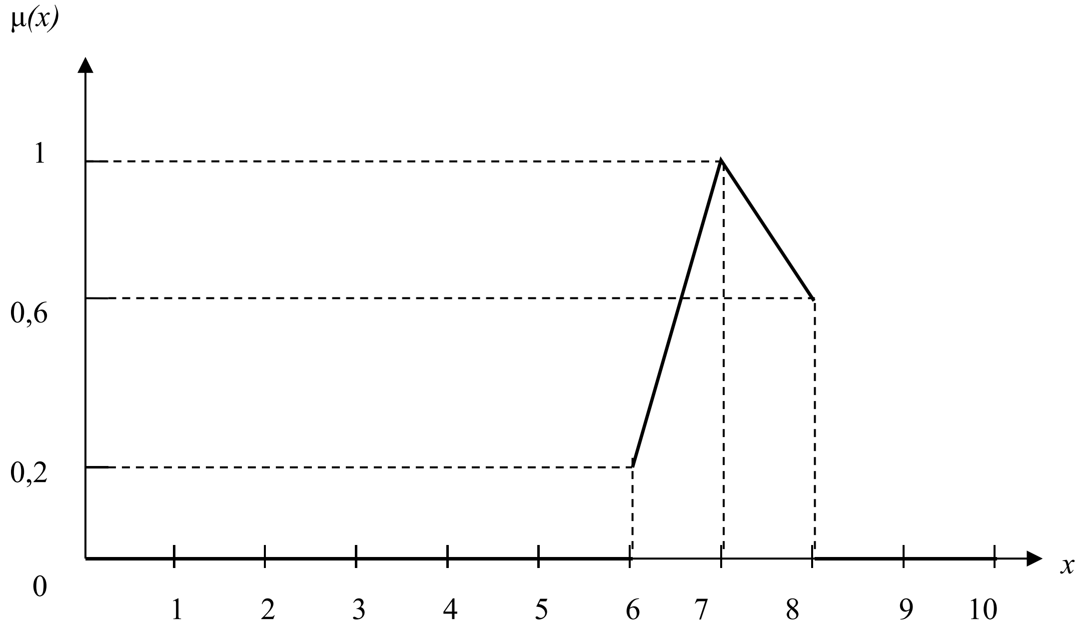
Баллы x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Степень принадлежности $\mu(x)$	0	0	0	0	0	0	0,2	1	0,6	0	0

Зависимость $\mu(x)$ от x описывается как

$$\mu(x) = \begin{matrix} 0{,}2,\ \text{если}\ x=6 \\ 1,\ \text{если}\ x=7 \\ 0{,}6,\ \text{если}\ x=8 \\ 0\ \text{в остальных случаях} \end{matrix},$$

или $\mu(x) = 0{,}2\ \overline{sg}(sg|x-6| + \overline{sg}(sg|x-7| + 0{,}6\ \overline{sg}(sg|x-8|)$. (3.3.2)

Аппроксимированный ломаными линиями график показан ниже:



Функцию $\mu(x)$ в данном случае можно представить в виде

$$\mu(x) = \begin{matrix} 0 \quad \text{для } 0 \quad x < 6 \\ 0{,}8x - 4{,}6 \text{ для } 6 \quad x < 7 \\ -0{,}4x + 3{,}8 \text{ для } 7 \quad x \quad 8 \\ 0 \text{ для } 8 < x < 10 \end{matrix} \qquad (3.3.3)$$

и использовать для непрерывной (аппроксимированной) зависимости степени принадлежности $\mu(x)$ от балла x. Функция (3.3.3) похожа на функцию класса t из [82]. Данную функцию можно описать формулой

$$\mu(x) = (0{,}8x - 4{,}6)\ \ sg((x-5)\ \ (7-x)) + (-0{,}4x + 3{,}8)\ \ sg((x-6)\ \ (8-x)) +$$
$$+ (-0{,}4x + 3{,}8)\ \ \overline{sg}(sg|x-8|). \qquad (3.3.4)$$

Таким же образом можно описать степень принадлежности и в общем случае.

Пусть рассматривается совокупность компетенций

$$K_1, K_2, \ldots, K_l$$

с соответствующими весами

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l;$$

$k_i^j\,(i = \overline{1,l}; j = \overline{1,m})$ – возможные оценки компетенции K_i, $P_i^j = \mu_i(k_i^j)$ – соответствующие значения функции принадлежности, определенной, например, по формулам, аналогичным (3.3.2)–(3.3.4). Тогда

$$\lambda_i P_i^j = \lambda_i \mu_i(k_i^j) = \eta_i(k_i^j),$$

где η_i – новая функция принадлежности.

Совокупность нечетких оценок $k_1, k_2, \ldots, k_l$ соответствующих компетенций K_1, K_2, …, K_l можно задать нечетким декартовым произведением $\tilde{K}_1\ \ \tilde{K}_2\ \ \ldots\ \ \tilde{K}_l$ ($\tilde{K}_i$ – множество нечетких оценок компетенции K_i), определяемым следующим образом [82]: $\mu(\bar{k}) = \min[\eta_1(k_1), \ldots, \eta_l(k_l)]$ для любого $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_l)\ \ \tilde{K}_1\ \ \tilde{K}_2\ \ \ldots\ \ \tilde{K}_l$. Далее $\mu(\bar{k})$ сравнивают с эталоном. При этом эталон может быть разных уровней (например, низкого, допустимого и высокого). Уровни определяют как α-разрезы эталона при соответствующих значениях α [3]. В случае отклонения от заданного уровня эталона делается вывод о несоответствии усвоения на данном этапе соответствующему уровню.

Итак, были предложены критерии оценки модулей, разработаны методы оценки усвоения компетенций, а также оценки компетентности учащихся для четко и нечетко сконструированных исходных данных.

§ 3.4. Экспертная система оценки уровня усвоения учебных компетенций

Одними из важных вопросов при реализации программ ФГОС ВО 3++ являются анализ и формализация оценки степени достижения компетенций обучаемыми. Для решения этих задач используют индикаторы, которые в словесной форме раскрывают и уточняют формулировки компетенций. Индикаторы отражают обобщенные результаты обучения или умения (способности, навыки) обучаемых выполнять определенные действия. Для оценки степени выраженности индикаторов используют дескрипторы, отражающие уровень знаний, умений и навыков (ЗУВ) [75]. Дескрипторы можно задать с помощью лингвистических переменных, которые определяются с помощью экспертных оценок. Экспертные оценки формируются специальной экспертной системой. Описывать и анализировать такую систему удобно с помощью метода системного анализа [38, 51, 94].

Цель данного параграфа – разработка нового метода описания и системного анализа экспертной системы индикаторов достижения компетенций.

3.4.1. Структурная схема экспертной системы формирования компетенций

Структурная схема системы формирования компетенций представлена ниже:

Схема содержит четырнадцать функциональных блоков, соединенных информационными и управленческими связями.

Основу экспертной системы составляет база знаний, формируемая на основе экспертных суждений. Извлекаемая из базы знаний экспертная информация позволяет формировать нечеткие лингвистические дескрипторы и производить оценку индикаторов достижения компетенций. Для оценки ЗУВ используют специальные контрольные задания КЗ (см. структурную схему, данную выше), осуществляется возможностная классификация ЗУВ. В системе применяют оценки достигнутого. Устройство управления координирует работу всех блоков системы. Результаты заносят в базу данных. Итогом работы системы являются результаты оценивания ЗУВ.

3.4.2. Анализ системы оценки усвоения учебных компетенций

На схеме, приведенной в пункте 3.4.1, показана сложная система, состоящая из соединенных между собой отдельных звеньев, связанных с этапами реализации информационного потока. На схеме S_i $(i = \overline{1,14})$ – этапы движения потока, которые представляют собой состояния рассматриваемой системы.

Приближенно будем считать, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием пуассоновского потока информации с интенсивностью $\lambda_{ij} = 1/t_{ij}$, где t_{ij} – время продолжения этапа S_i (до перехода процесса к этапу S_j). Пуассоновский поток характеризуется тем, что за малый промежуток времени поступает не более одной единицы потока; на непересекающиеся участки времени единицы потока поступают независимо. Для упрощения выкладок будем рассматривать простейший пуассоновский поток, когда плотности постоянны. Для графа, соответствующего структурной схеме, запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова, обозначив через $P_i(t)$ вероятность нахождения системы на этапе S_i $(i = \overline{1,14})$. Пусть λ_{ij} $(i, j = \overline{1,14})$ – плотности потоков информации при переходе от S_i к S_j (некоторые из них могут быть равны 0). Имеем:

$$
\begin{aligned}
&P_0(t) = -\lambda_{01}P_1(t) - \lambda_{02}P_2(t) - \lambda_{03}P_3(t) - \lambda_{04}P_4(t) - \lambda_{05}P_5(t) - \lambda_{06}P_6(t);\\
&P_1(t) = \lambda_{01}P_0(t) - \lambda_{1,11}P_1(t);\\
&P_2(t) = \lambda_{02}P_0(t) - \lambda_{27}P_2(t);\\
&P_3(t) = \lambda_{03}P_0(t) - \lambda_{38}P_3(t) - \lambda_{37}P_3(t);\\
&P_4(t) = \lambda_{04}P_0(t) - \lambda_{5,10}P_5(t);\\
&P_5(t) = \lambda_{05}P_0(t) - \lambda_{5,10}P_5(t);\\
&P_6(t) = \lambda_{06}P_0(t) - \lambda_{6,10}P_5(t);\\
&P_7(t) = \lambda_{37}P_3(t) + \lambda_{27}P_2(t) - \lambda_{79}P_7(t);\\
&P_8(t) = \lambda_{38}P_3(t) - \lambda_{8,11}P_8(t);\\
&P_9(t) = \lambda_{79}P_7(t) - \lambda_{9,11}P_9(t) - \lambda_{9,10}P_9(t);\\
&P_{10}(t) = \lambda_{5,10}P_5(t) + \lambda_{6,10}P_6(t) + \lambda_{9,10}P_9(t) + \lambda_{12,10}P_{12}(t) -\\
&- \lambda_{10,12}P_{10}(t) - \lambda_{10,13}P_{10}(t) - \lambda_{10,14}P_{10}(t);\\
&P_{11}(t) = \lambda_{8,11}P_8(t) + \lambda_{1,11}P_1(t) + \lambda_{9,11}P_9(t) + \lambda_{5,11}P_{12}(t) - \lambda_{11,12}P_{11}(t);\\
&P_{12}(t) = \lambda_{11,12}P_{11}(t) + \lambda_{10,12}P_{10}(t) - \lambda_{12,11}P_{12}(t) - \lambda_{12,10}P_{12}(t);\\
&P_{13}(t) = \lambda_{10,12}P_{11}(t);\\
&P_{14}(t) = \lambda_{10,14}P_{10}(t);
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=0}^{14} P_i(t) = 1 .$$

В установившемся режиме система представляет собой однородную систему алгебраических уравнений: левая часть системы превращается в нулевую, все вероятности $P_i(t)$ становятся постоянными. Полученная система решается обычными методами решения систем линейных уравнений. Вероятности P_i будут означать долю времени нахождения системы в состоянии S_i $(i=\overline{1,14})$.

§ 3.5. Методы оптимальной реализации компетенций

Актуальность проблемы управления реализацией компетенций в учебном процессе обусловлена процессом цифровизации всех сфер жизни современного общества.

Применение математических методов для реализации компетенций признано эффективным. В статье [59] описан процесс приобретения компетенций в виде динамической системы, подверженной помехам. Методы корреляционно-регрессионного анализа в оценивании профессиональных компетенций использованы в работе [8]. В статье [71] разработана модель проверки качества компетентностного обучения, основанная на оценке латентных переменных.

Рассмотрим три метода оптимальной реализации компетенций.

Первый метод связан с выбором альтернативных дисциплин и сводится к упрощению схем из функциональных элементов с использованием правил математической логики, когда в качестве функциональных элементов выступают учебные дисциплины, связанные с некоторым множеством компетенций (причем значимость компетенций одинакова).

Второй метод применяется, когда значимость компетенций разная. При этом чем значимее компетенция, тем меньше ее вес. Задача заключается в поиске последовательности дисциплин с наименьшим суммарным весом компетенций. Используется алгоритм Дейкстры, т.е. метод отыскания кратчайшего пути на графе.

Третий метод применяется для компетенций разной значимости в условиях неопределенной информации с использованием нечетких и внешне устойчивых множеств с наибольшей степенью внешней устойчивости.

3.5.1. Метод анализа схем из функциональных элементов

На рис. 3.5.1 схематично показана последовательность изучения дисциплин, реализующих компетенции $x_i\,(i=\overline{1,6})$, причем каждая переменная x_i – это либо отдельная компетенция, либо множество компетенций. Отрезки $A_iB_i\,(i=\overline{1,3})$, $C_iD_i\,(i=\overline{1,3})$, $E_iF_i\,(i=\overline{1,2})$, GH соответствуют девяти изучаемым дисциплинам, причем параллельные отрезки A_iB_i соответствуют трем дисциплинам по выбору; C_iD_i тоже дисциплины по выбору и являются последующими по отношению к A_iB_i; E_iF_i также дисциплины по выбору, за ними следует дисциплина *GH*. Начальная развилка означает два комплекса дисциплин по выбору: верхнюю ветвь или нижнюю.

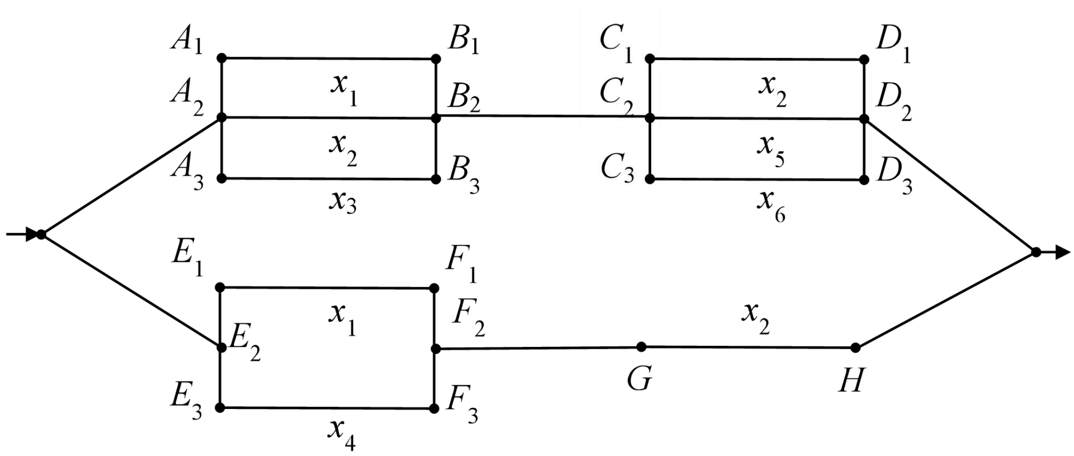


Рис. 3.5.1

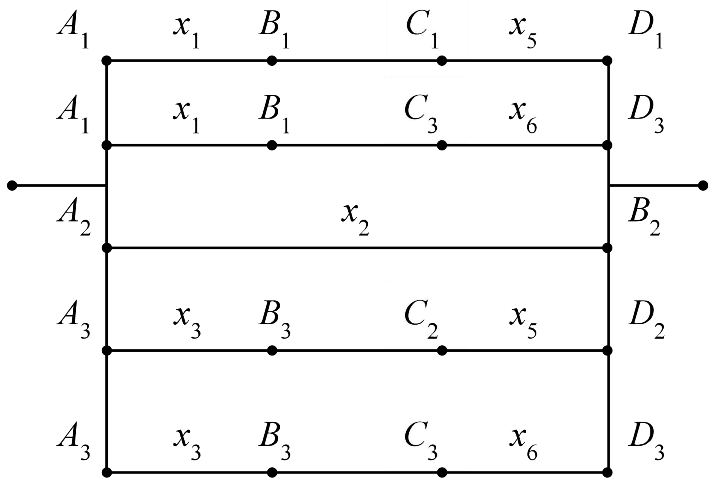
Дисциплины по выбору описываются союзом «или», последовательное изучение соответствует союзу «и». Если дисциплина изучается, то ей присваивается значение 1, в противном случае – 0. Получается, что схему на рис. 3.5.1 можно описать формулой логики высказываний. Запишем эту логическую формулу с учетом того, что параллельное соединение *x*, *y* означает возможную реализацию «*x* или *y*», а последовательное – «*x* и *y*». Таким образом в первом случае имеем логическое сложение $x \quad y$, во втором – логическое умножение $x \quad y$. Следовательно, схеме на рис. 3.5.1 соответствует булева функция

$$f=(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \quad (x_2 \quad x_5 \quad x_6) \quad (x_1 \quad x_4) \quad x_2.$$

Преобразуем данную формулу по правилам логики и получим

$$f=x_1 \quad x_2 \quad x_1 \quad x_5 \quad x_1 \quad x_6 \quad x_2 \quad x_2 \quad x_5 \quad x_2 \quad x_6 \quad x_3 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_5$$
$$x_3 \quad x_6 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_4 \quad x_2 = x_1 \quad x_5 \quad x_1 \quad x_6 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_5 \quad x_3 \quad x_6.$$

Выведенной после преобразования формуле будет соответствовать более простая схема, представленная ниже:



Таким образом, можно ограничиться одним из указанных вариантов, (например, дисциплина A_1B_1, реализующая компетенцию x_1, и последующая дисциплина C_1D_1, реализующая компетенцию x_5), а можно реализовать все пять вариантов.

3.5.2. Метод поиска кратчайшего пути на графе

Компетенции взвешены (проранжированы) относительно их важности: чем больше важность, тем меньше вес.

На рис. 3.5.2 изображена схема реализации компетенций $x_i\,(i=\overline{0,5})$; дуги графа соответствуют дисциплинам, реализующим данную компетенцию, которой соответствует вершина – начало дуги. Числа над дугами обозначают вес данной компетенции. При этом x_i могут обозначать как отдельные компетенции, так и множества компетенций. Если это множества, то числа над дугами – это суммарный вес.

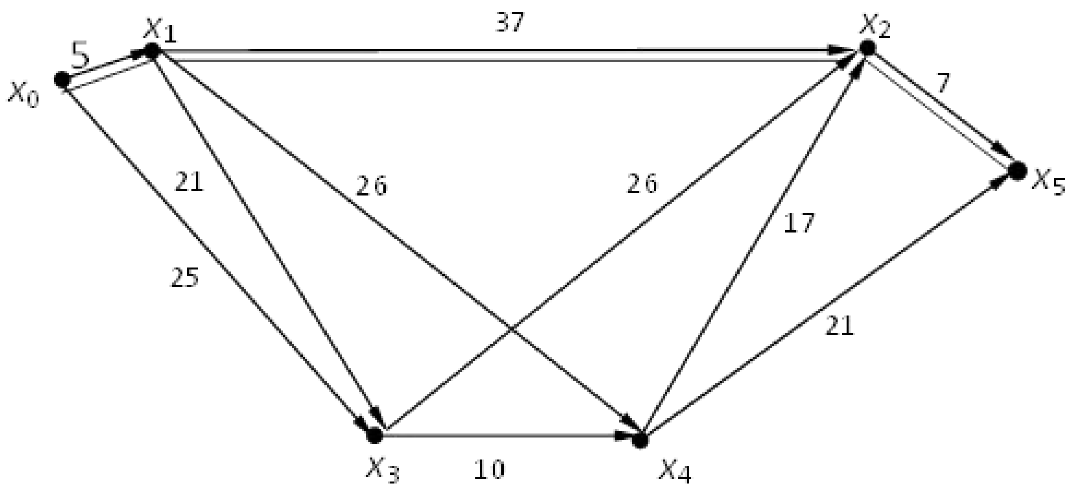


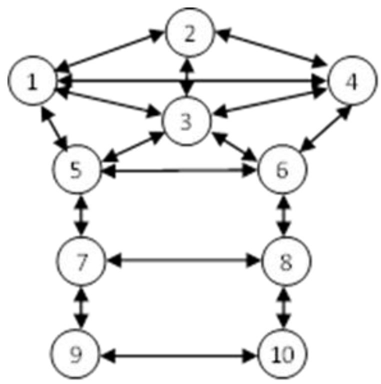
Рис. 3.5.2

Решают задачу отыскания кратчайшего пути на графе с начальной компетенций x_0 и конечной x_5 по методу Дейкстры [44]. В результате получают искомую последовательность компетенций: x_0 x_1 x_2 x_5. На рис. 3.5.2 эта последовательность показана двойной линией.

3.5.3. Метод минимальных нечетких и внешне устойчивых множеств

Пусть имеется десять компетенций (множество компетенций) – $x_i\ (i=\overline{1,10})$ и десять соответствующих дисциплин $D_i\ (i=\overline{1,10})$.

Изобразим указанные компетенции и дисциплины вершинами графа, дуги которого соответствуют связям между изучаемыми дисциплинами:



Вершине с номером i соответствуют компетенция x_i и дисциплина D_i. Переход из вершины (x_i, D_i) в вершину (x_j, D_j) означает, что при изучении дисциплины D_i реализуется множество компетенций x_j.

Задана матрица $M_{ij}=(\mu_{ij})\ (i,j=\overline{1,10})$, определяющая степень реализации i-й компетенции при изучении j-й дисциплины. Пусть матрица M_{ij} имеет вид

$$M_{ij}=\begin{matrix} 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0 & 1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}.$$

Используя алгоритм нахождения минимальных нечетких внешне устойчивых множеств [7, 18], находим искомую последовательность дисциплин (D_1, D_2, D_6, D_7, D_8) и соответствующих множеств компетенций:

D_1 реализует x_2, x_5, x_3; D_2 – x_1, x_3, x_4; D_6 – x_4, x_3, x_5, x_8; D_8 – x_7, x_6, x_{10}; D_7 – x_5, x_8, x_9. При этом достигается максимальная степень реализации, равная 0,9.

§ 3.6. Структурное описание дескрипторной модели оценки сформированности компетенций

Для описания учебного процесса применяют разнообразные математические методы и модели:

эконометрические и статистические,
теории массового обслуживания,
теории игр и принятия решений,
марковских цепей,
оптимизации и математического программирования,
дифференциальных и разностных уравнений,
дискретной математики,
распознавания образов,
нечетких множеств и т.д.

Их использование должно базироваться на системном представлении рассматриваемых процессов.

Одним из новых направлений математического моделирования учебного процесса является применение аппарата формальных грамматик и языков. Эти методы используют при создании совместного портрета преподавателя и учащегося [43], согласования портретов участников образовательного процесса [49], структурного портрета образовательного процесса [51].

Рассмотрим новый метод описания и анализа индикаторов достижения компетенций с помощью аппарата формальных грамматик для условий четкой и нечеткой экспертной информации.

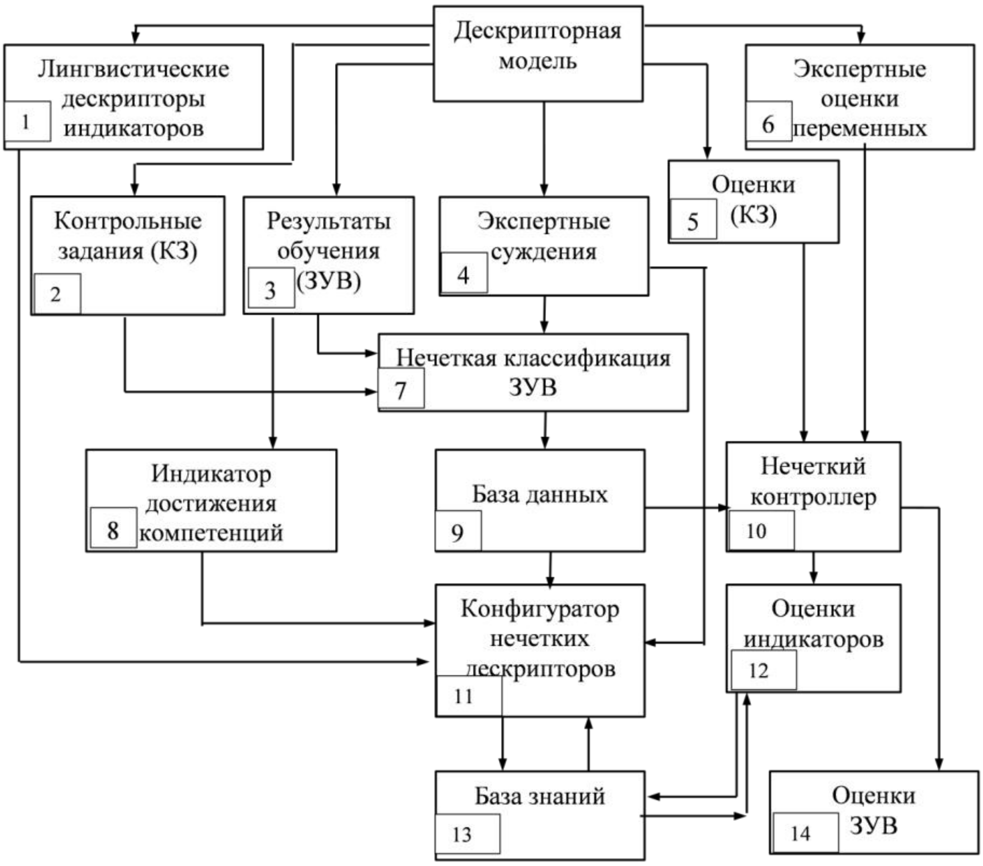
Основу ФГОС ВО 3++ составляют индикаторы достижения компетенций. Для измерения степени выраженности индикаторов достижения компетенций применяют дескрипторы. Дескрипторы описывают результаты обучения через ЗУВ. Их можно описать лингвистическими переменными, определяемыми с помощью экспертных оценок. Для формирования дескрипторов применяются специальные модели, которые называются дескрипторными. Для оценивания результатов обучения используются контрольные задания КЗ.

Возьмем два варианта построения дескрипторной модели формирования компетенций:

1) по четкой и полной информации о компетенциях;

2) нечеткой информации.

Первый вариант будем называть четкой моделью, второй – нечеткой. Приведем структурную схему дескрипторной модели формирования компетенций:



Эта схема является модификацией схемы нечеткой дескрипторной модели оценивания выраженности индикаторов достижения компетенций, приведенной в статье [82]; может быть описана НС-грамматикой:

$$G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle,$$

где V_N – множество нетерминалов; V_T – множество терминалов; P – конечное множество правил подстановки; S – начальный символ из V_N.

Пусть $V_T = \{1, 2, ..., 14\}$ – метки структурных звеньев, $V_N = \{S, A_1, ..., A_6, B_1, ..., B_4, C_1\}$, $S = \langle \text{Дескрипторная модель} \rangle$.

P представляет собой следующую схему, включающую в себя блоки:

1) $S \to 1A_1 2A_2 3A_3 4A_4 5A_5 6A_6$;

2) $A_1 \to 11B_1$;

3) $A_2 \to 7B_2$;

4) $A_3 \to 8B_3$;

5) $A_4 \to 7B_2$;

6) $A_5 \to 11B_1$;

7) $A_6 \to 10B_4$;

8) $B_1 \to 12C_1$;

9) $B_2 \to 9C_2$;

10) $B_3 \to 11B_1$;
11) $B_4 \to 12C_1$;
12) $B_4 \to 13$;
13) $B_4 \to 14$;
14) $C_1 \to 11B_1$;
15) $C_1 \to 10B_4$;
16) $B_4 \to 13$;
17) $B_4 \to 14$;
18) $B_4 \to 13B_4$;
19) $B_4 \to 14B_4$;
20) $C_1 \to 10B_4$;
21) $C_1 \to 11B_1$.

Нечеткая модель строится аналогично, но в блоках (структурных звеньях) 6, 7, 10, 11, 12 используются нечеткие переменные, нечеткая классификация, нечеткий контролер, нечеткие дескрипторы.

Примером выводимой цепочки, описывающей дескрипторную модель, будет, например, цепочка $\alpha = 1 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 13 \times$ $\times\, 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 14$.

Представленную выше схему можно описать нечеткой НС-грамматикой вида $G_1 = \langle V_N, V_T, P, S, L, \varphi \rangle$, где V_N, S определяются так же, как и для четкой грамматики; P – конечное множество правил подстановки; L – множество весов от 0 до 1; $\varphi(p)$ – степень принадлежности выводу правила $p \quad P$.

Приведенная структурная схема может быть описана нечеткой НС-грамматикой G_1, которая отличается от G тем, что правила вывода имеют вид $u \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} v$, $u, v \quad (V_N \quad V_T)^*$, $p \quad P$, где φ_1 – степень порождения цепочки v, $\varphi(p) = \varphi_1$. Степень порождения цепочки в результате вывода оценивается как минимальная степень порождения цепочек данного вывода.

К построенным грамматикам G_1 и G можно добавить правила повторения соответствующих структурных звеньев.

Предложенные грамматики могут использоваться для классификации дескрипторов, отслеживания и корректировки индивидуальных траекторий обучения учащихся.

Представленная схема является графом с петлями. Следовательно, можно применять матричное задание графов. Построенный на основе матрицы инцидентности информационный граф можно использовать при анализе схем потоков дескрипторной модели.

ГЛАВА 4
РАЗРАБОТКА ИННОВАЦИОННЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ

§ 4.1. Математическая модель оценки качества учебно-тематического плана

Учебный процесс реализуется согласно утвержденной рабочей программе дисциплины. Важное место в программе занимает учебно-тематический план. В современном вузе периодически открываются новые специальности и возникают соответствующие им учебные дисциплины. Количество и возможность частого обновления учебных планов определяют мобильность учебного заведения, поэтому задача их оценки является актуальной. Один из возможных подходов заключается в следующем. Итог учебного процесса обусловливается, во-первых, средним баллом учащихся, во-вторых, важностью изучаемых тем, а отсюда и самих дисциплин для формирования всесторонне развитых личностей, специалистов, обладающих современными научными знаниями и способностью претворения их в своей трудовой деятельности. Процесс составления учебных планов в вузах часто основан на знаниях, опыте и интуиции преподавателей, поэтому он является достаточно трудоемким и трудно формализуемым, что вызывает необходимость применения новых методов. Одним из таких методов является использование математического моделирования для оптимизации процесса составления учебных планов, которые должны обеспечивать формирование компетенций [9, 16]. Задача автоматизации моделирования учебных планов поставлена в статье [29].

4.1.1. Коэффициент качества учебно-тематического плана

Учебный план предполагает логическую последовательность изучения тем и распределения учебных часов.

Пусть K_{js} – важность j-й темы s-го учебного курса, где $s=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,m_s}$. Важность j-й темы определяется ее вкладом в изучение данного курса (коэффициентом $K_{js}^{(1)}$), важностью для освоения других дисциплин ($K_{js}^{(2)}$), а также для будущей трудовой деятельности ($K_{js}^{(3)}$). Поэтому коэффициент K_{js} целесообразно рассматривать как среднюю арифметическую вышеназванных коэффициентов, т.е.

$$K_{js} = \frac{1}{3}(\alpha_{js}^{(1)}K_{js}^{(1)} + \alpha_{js}^{(2)}K_{js}^{(2)} + \alpha_{js}^{(3)}K_{js}^{(3)}),$$

где $\alpha_{js}^{(k)}$ $(k = \overline{1,3})$ – веса данных коэффициентов, устанавливаемые экспертами.

Каждый коэффициент ($K_{js}^{(1)}$, $K_{js}^{(2)}$, $K_{js}^{(3)}$) определяется как средняя арифметическая взвешенная результатов опросов обучаемых и преподавателей. Обозначим средний балл сдачи j-й темы s-го курса l-м обучаемым по всем контрольным работам в период изучения j-й темы как $\lambda_{js}^{(1)}(l)$, средний балл по текущей успеваемости – как $\lambda_{js}^{(2)}(l)$, средний балл на экзамене (зачете) – как $\lambda_{js}^{(3)}(l)$. Средняя арифметическая взвешенная этих коэффициентов будет

$$\lambda_{js}(l) = \frac{1}{3}\left(\beta_{js}^{(1)}\lambda_{js}^{(1)}(l) + \beta_{js}^{(2)}\lambda_{js}^{(2)}(l) + \beta_{js}^{(3)}\lambda_{js}^{(3)}(l)\right),$$

где $\beta_{js}^{(k)}(k = \overline{1,3})$ – веса данных коэффициентов.

Будем считать, что коэффициенты $\lambda_{js}(l)$ и K_{js} изменяются в границах от 0 до 1. Если это не так, то делим каждый коэффициент на соответствующее максимально возможное значение. Далее для n обучаемых вычисляем среднюю арифметическую K_{js}^{T} произведений $K_{js}\lambda_{js}(l)$ для $l = \overline{1, n}$:

$$K_{js}^{T} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} K_{js}\lambda_{js}(l) = K_{js}\lambda_{js}, \qquad (4.1.1)$$

где $\lambda_{js} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\lambda_{js}(l)$.

Выражение (4.1.1) характеризует важность j-й темы s-го курса с учетом среднего балла успеваемости. Тогда средняя арифметическая важности K_{js}^{T} всех тем s-й дисциплины представляет собой характеристику важности s-го учебного курса ($s = \overline{1, p}$), т.е.

$$K_{S}^{УК} = \frac{1}{m_s}\sum_{j=1}^{m_s} K_{js}^{T}. \qquad (4.1.2)$$

Коэффициент качества учебно-тематического плана $K_{ТП}$ (а тем самым и качества процесса обучения по этому учебно-тематическому плану) можно рассчитывать как среднюю арифметическую важностей изучаемых дисциплин:

$$K_{ТП} = \frac{1}{p}\sum_{S=1}^{p} K_{S}^{УК}, \qquad (4.1.3)$$

где p – число дисциплин в данном учебном плане.

Заметим, что тема рассматривается в качестве минимальной единицы, для которой оценивается ее значимость (вес). Если в качестве минимальной единицы взять учебный вопрос, то формула (4.1.3) преобразуется к виду

$$K_{ТП} = \frac{1}{pn} \sum_{S=1}^{p} \frac{1}{m_s} \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{n_{js}} \frac{1}{n_{ij}} \sum_{l=1}^{n} K_{ijs} \lambda_{ijs}(l)\,, \qquad (4.1.4)$$

где n_{js} – количество вопросов в j-й теме s-й дисциплины; K_{ijs} – значимость i-го вопроса; $\lambda_{ijs}(l)$ – средний балл l-го студента по i-му вопросу.

4.1.2. Пример оценки качества тематического плана

Рассмотрим применение методики оценки качества тематического плана для анализа математической части учебного плана в Тверской ГСХА первого и второго года обучения на дневном отделении. Здесь изучаются четыре математические дисциплины: «Математика», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Эконометрика». Покажем процедуру оценки дисциплины «Математика», которая была оценена шестью ведущими преподавателями и их обучаемыми.

В табл. 4.1.1 приведена оценка преподавателями коэффициента значимости тем по десятибалльной шкале.

Таблица 4.1.1

Тема	Баллы, данные преподавателями						
	Первым	Вторым	Третьим	Четвертым	Пятым	Шестым	Средняя оценка
1. Множества	3	5	10	3	1	4	4,33
2. Аналитическая геометрия	6	6	8	7	4	4	5,83
3. Предел	7	10	7	3	3	3	5,5
4. Производная	9	10	7	4	6	10	7,67
5. Интеграл	9	10	7	6	7	9	8
6. Матрицы и определители	6	8	8	5	8	3	6,33
7. Решение систем линейных уравнений	7	5	7	5	10	7	6,83
8. Функции нескольких переменных	6	7	7	6	9	2	6,17
9. Дифференциальные уравнения	10	8	6	8	5	8	7,5
10. Ряды	7	6	5	7	2	1	4,67

Считаем коэффициент компетентности у всех преподавателей одинаковым. Самый большой коэффициент значимости оказался у темы «Интеграл»; на втором месте по количеству баллов находится тема «Производная». Наименьший коэффициент значимости имеет тема «Множества», и не намного больше у темы «Ряды». Эти коэффициенты, согласно усредненным оценкам студентов, приобрели следующие значения: 3,8; 6,2; 4,15; 8,23; 7,31; 6,19; 7,4; 5,95; 7,43; 4,41. В результате экспертного оценивания было установлено, что коэффициент компетентности среднестатистического преподавателя в 10 раз превосходит коэффициент компетентности среднестатистического студента. Кроме того, оценки значимости тем курса делятся на максимальное возможное значение, которое в рассматриваемом случае равно 10. Поэтому обобщенные приведенные оценки коэффициентов значимости тем курса «Математика» оказались такими: $K_{1S} = \dfrac{3{,}8 + 4{,}33\ \ 10}{10\sqrt{1^2 + 10^2}} = 0{,}469$; аналогично $K_{2S} = 0{,}642$; $K_{3S} = 0{,}589$; $K_{4S} = 0{,}845$; $K_{5S} = 0{,}869$; $K_{6S}^{T} = 6{,}91$; $K_{7S} = 0{,}753$; $K_{8S} = 0{,}673$; $K_{9S} = 0{,}82$; $K_{10S} = 0{,}509$. Иными словами, наибольшее значение коэффициента осталось у темы «Интеграл», затем идет тема «Производная». Наименьшим значением этого коэффициента, как и во время опроса преподавателей, характеризуется тема «Множества».

Средний балл успеваемости определялся по данным контрольных работ, промежуточной аттестации и экзамена для 50 студентов. Соответствующие данные приведены во втором, третьем и четвертом столбцах табл. 4.1.2. Оценки выставлялись в обычной системе: $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. В последнем столбце даны значения средних оценок λ_{js} из баллов контрольных работ, аттестации и экзамена в долях максимального балла, равного в данном случае 5. Для определения λ_{js} в каждой строке складывали баллы второго, третьего и четвертого столбцов, а затем сумма делилась на 3 (число слагаемых в каждой строке) и 5 (максимальный балл).

Таблица 4.1.2

Тема	Баллы			
	Контрольные работы	Аттестация	Экзамен	λ_{js}
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Множества	3,35	3,4	3,21	0,66
Аналитическая геометрия	3,85	3,95	3,9	0,78

Окончание табл. 4.1.2

1	2	3	4	5
Предел	3,25	3,25	3,22	0,65
Производная	4,2	3,98	4,1	0,82
Интеграл	3,65	3,74	3,5	0,73
Матрицы и определители	3,89	3,9	4,02	0,79
Решение систем линейных уравнений	4,1	3,9	4,3	0,82
Функции нескольких переменных	3,72	3,6	3,5	0,72
Дифференциальные уравнения	3,9	3,82	3,89	0,77
Ряды	3,5	3,43	3,2	0,68

Вывод: наиболее успешно обучаемые усвоили тему «Производная», наименее – тему «Предел».

Ниже указаны в верхней строке значения K_{js}, во второй – значения λ_{js} $(j=\overline{1,10})$, вычисленные по формуле (4.1.1) для n = 50 студентов, в третьей строке – соответствующие произведения:

K_{js}	0,47	0,64	0,59	0,85	0,87	0,69	0,75	0,67	0,82	0,51
λ_{js}	0,66	0,78	0,65	0,82	0,73	0,79	0,82	0,72	0,77	0,68
K_{js}^{T}	0,31	0,50	0,38	0,70	0,64	0,55	0,62	0,48	0,63	0,35

Отсюда из формулы (4.1.2) при m_s = 10 рассчитываем коэффициент важности дисциплины «Математика»:

$$K_S^{УК} = (0{,}31+0{,}50+0{,}38+0{,}68+0{,}64+0{,}55+0{,}62+0{,}48+0{,}63+0{,}35)/10 = 0{,}51.$$

Точно так же находим коэффициенты важности других дисциплин. Так, у дисциплины «Теория вероятностей» этот коэффициент оказался равным 0,49, у дисциплины «Математическая статистика» – 0,54, «Эконометрика» – 0,48. Конечно, полученный результат невысокий. И связано это с двумя основными факторами: с коэффициентами важности тем курса и со средним баллом успеваемости. Математика, безусловно, признана «царицей наук», но в то же время при изучении других дисциплин учебного плана процент использования математики невелик. Что же касается среднего балла успеваемости, то он, как известно [29], зависит от коэффициентов компетентности преподавателя; интереса, интеллекта, трудолюбия обучаемых; количества часов, отводимых на изучение дисциплины; сложности излагаемого материала; посещаемости.

Не будем подробно останавливаться на данных факторах. Отметим только, что значительное влияние на средний балл успеваемости, согласно эконометрическим моделям данного балла [29], оказывает интерес обучаемых к данной дисциплине. Важно также в этом плане время изучение дисциплины, которое, к сожалению, в последнее время неумолимо сокращается.

Коэффициенты $K_{js}, \lambda_{js}(l), K_{js}^{T}, K_{S}^{УК}, K_{ТП}$ обусловливаются выборками результатов опроса и поэтому являются случайными величинами. Для простоты изложения мы рассматривали выборки небольшого объема, однако этот объем может быть достаточно значительным. Используя формулы (4.1.1) и (4.1.2), преобразуем формулу (4.1.3) следующим образом:

$$K_{ТП} = \frac{1}{pn} \sum_{S=1}^{p} \frac{1}{m_s} \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{l=1}^{n} K_{js} \lambda_{js}(l) . \qquad (4.1.5)$$

Положим, что $K_s = \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{l=1}^{n} K_{js}\lambda_{js}(l) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_s} K_{js}\lambda_{js}(l)$.

Слагаемые $\sum_{j=1}^{m_s} K_{js}\lambda_{js}(l)$ для разных $l(l = \overline{1,n})$, очевидно, независимы.

Найдем $M\left[\sum_{j=1}^{m_s} K_{js}\lambda_{js}(l)\right] = \sum_{j=1}^{m_s} M\left[K_{js}\lambda_{js}(l)\right] = \sum_{j=1}^{m_s} \left(M\left[K_{js}\right] M\left[\lambda_{js}(l)\right] + K\left[K_{js}, \lambda_{js}(l)\right]\right)$,

где $K[X,Y]$ – коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y;

$$D\left[\sum_{j=1}^{m_s} K_{js}\lambda_{js}(l)\right] = \sum_{j=1}^{m_s} D\left[K_{js}\lambda_{js}(l)\right] + \sum_{j=1}^{m_s} K\left[K_{js}\lambda_{js}(l), \sum_{i=j+1}^{m_s} K_{is}\lambda_{is}(l)\right] .$$

Привлечем генеральные совокупности объема $N(N >> n)$ значений $\{ K_{js} \}$ и $\{ \lambda_{js}(l) \big| l = \overline{1,N} \}$ и обозначим генеральные математические ожидания величин K_{js} и $\lambda_{js}(l)$ через $\overline{K}_{js\text{генер}}$ и $\overline{\lambda}_{js\text{генер}}$, а генеральные средние квадратичное отклонения – через $\sigma\left[K_{js}\right]_{\text{генер}}$ и $\sigma\left[\lambda_{js}\right]_{\text{генер}}$ соответственно; $K[X,Y]_{\text{генер}}$ будет обозначать генеральный коэффициент корреляции. Тогда для $l = \overline{1,n}$

$$M\left[\sum_{j=1}^{m_s} K_{js}\lambda_{js}(l)\right] = \sum_{j=1}^{m_s} M\left[K_{js}\lambda_{js}(l)\right] = \sum_{j-1}^{m_s} \left(\overline{K}_{js\text{генер}}\, \overline{\lambda}_{js\text{генер}} + K\left[K_{js}, \lambda_{js}(l)\right]_{\text{генер}}\right);$$

$$D\left[\sum_{j=1}^{m_s} K_{js}\lambda_{js}(l)\right] = \sum_{j=1}^{m_s} \sigma^2\left[K_{js}\right]_{\text{генер}} \sigma^2\left[\lambda_{js}\right]_{\text{генер}} + \sum_{j=1}^{m_s} K\left[K_{js}\lambda_{js}(l), \sum_{i=j+1}^{m_s} K_{is}\lambda_{js}(l)\right]_{\text{генер}} .$$

Таким образом, случайная величина K_s представляет собой сумму n независимых случайных величин с равными математическими ожиданиями и дисперсиями. При достаточно большом значении n, согласно теореме Ляпунова, распределение K_s для любого s неограниченно приближается к нормальному. Пусть $\tau_s = K_s / m_s$. Тогда распределение τ_s тоже неограниченно приближается к нормальному.

Обозначим через $\overline{\tau}_s$ среднюю выборочную, а через $S^2[\tau_s]$ – несмещенную оценку генеральной дисперсии $\sigma^2[\tau_s]$, вычисляемые соответственно по формулам:

$$\overline{\tau}_s = \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{p}\tau_s\,;\; s^2[\tau_s] = \frac{1}{p-1}\sum_{s=1}^{p}\left(\tau_s - \overline{\tau}_s\right)^2. \qquad (4.1.6)$$

Поскольку $K_{ТП} = \frac{1}{n\ p}\sum_{s=1}^{p}\tau_s$, то среднее значение коэффициента качества учебного процесса определяем как

$$\overline{K}_{ТП} = \frac{1}{n}\overline{\tau}_s\,. \qquad (4.1.7)$$

Соответственно, дисперсию запишем в виде

$$s^2\left[K_{ТП}\right] = \frac{1}{n^2}s^2\left[\tau_s\right]. \qquad (4.1.8)$$

Известно, что оценки (4.1.6)–(4.1.8) несмещенные, состоятельные. Средние выборочные оценки являются также эффективными, а оценки дисперсии – асимптотически эффективными.

Обозначим через $\overline{\tau}_{s\,генер}$ соответствующую генеральную среднюю характеристику для случайной величины τ_s. Пусть $\theta(t,k) = 2\int_0^t \varphi(x,k)$, где $\varphi(x,k)$ – плотность вероятности t-распределения Стьюдента с числом степеней свободы k. Интервальную оценку для $\overline{\tau}_{s\,генер}$ определим следующим образом:

$$\overline{\tau}_s - t_{\beta,p-1}\frac{s[\tau_S]}{\sqrt{p}} < \overline{\tau}_{s\ генер} < \overline{\tau}_s + t_{\beta,p-1}\frac{s[\tau_s]}{\sqrt{p}}\,, \qquad (4.1.9)$$

где $t_{\beta,p-1}$ – значение аргумента функции Стьюдента $\theta(t,k)$ (такое, что $\theta(t_{\beta,p-1}, p-1) = \beta$); β – доверительная вероятность.

Пусть $a(s)$ левая, а $b(s)$ – правая граница доверительного интервала (4.1.9). Из выражений (4.1.5) и (4.1.9) получаем оценку генерального коэффициента качества учебно-тематического плана:

$$\frac{1}{n}a(s) < \overline{K}_{ТПгенер} < \frac{1}{n}b(s). \qquad (4.1.10)$$

Итак, формулы (4.1.7), (4.1.9), (4.1.11) позволяют оценивать качество учебно-тематического плана и осуществлять соответствующую его корректировку.

Разработанный метод может быть использован для оптимизации учебного процесса в университетах и средних специальных учебных заведениях, на курсах профессиональной переподготовки [71] и повышения квалификации. Особенно он перспективен для дистанционных технологий обучения. Метод может применяться в информационных системах управления учебным процессом вуза.

§ 4.2. Модель менеджмента качества учебных планов

Процесс обучения в любом учебном заведении строится на основе учебных планов. Поэтому актуальной является задача менеджмента качества учебных планов, предполагающего их стандартизацию и сертификацию. Под стандартизацией понимается идентичность планов для близких профилей подготовки обучаемых и соответствие общеобразовательным стандартам. Сертификация предполагает проверенное качество планов. Данные вопросы рассмотрены, например, в [29, 51]. В работе [17] предложен индексный анализ структурных компонентов и показателей качества учебного процесса. Методологические принципы планирования освещены в статье [5]. Методика оценки качества учебно-тематического плана предложена в работе [29].

Из статистических данных известно, что средний балл успеваемости Y тем выше, чем больше часов a отводится на данную дисциплину и чем выше коэффициенты интереса Φ, интеллекта J, трудолюбия T_p обучаемых, компетентности преподавателя K и дисциплинарный $n_{\partial} = \dfrac{N_{\partial}}{a}$, где N_{∂} – среднее число отработанных группой часов по данной дисциплине. В то же время Y будет уменьшаться при увеличении коэффициента сложности Ω усвоения данного предмета. На основе анализа статистических данных выбрана наиболее простая аппроксимирующая формула указанной стохастической зависимости:

$$Y = b + b_1 \; K + b_2 \; \Phi + b_3 \; J + b_4 \; Tp + b_5 \; a + \frac{b_6}{\Omega} + b_7 \; n_{\partial}, \qquad (4.2.1)$$

где K, Φ, J, T_p, Ω, n_{∂} – случайные величины; a, b, b_i ($i = \overline{1,7}$) – неслучайные.

Из анализа формулы (4.2.1) можно сделать вывод, что возрастание среднего балла связано с увеличением таких факторов, как коэффициент интереса обучаемых; число часов, отводимых на изучение дисциплины; коэффициент интеллекта обучаемых; дисциплинарный коэффициент; коэффициент трудолюбия обучаемых; коэффициента компетентности преподавателей, а также с уменьшением коэффициента сложности дисциплины.

Рассмотрим **пример**. В результате эксперимента [31] были получены значения показателей K, Φ, J, T_p, a, Ω, n_{∂}:

№ опыта	K	Φ	J	T_p	a	Ω	$1/\Omega$	$n_д$	Y
1	0,95	0,62	0,7	0,6	0,1	0,8	1,25	0,9	0,71
2	0,9	0,71	0,72	0,6	0,1	0,7	1,43	0,9	0,75
3	0,99	0,6	0,6	0,75	0,2	0,75	1,33	1	0,76
4	0,9	0,59	0,8	0,8	0,2	0,8	1,25	1	0,77
5	0,9	0,6	0,82	0,68	0,2	0,9	1,11	0,8	0,73
6	0,89	0,7	0,78	0,69	0,1	0,8	1,25	0,95	0,75
7	0,9	0,81	0,75	0,7	0,1	0,7	1,43	1	0,81
8	0,9	0,75	0,8	0,7	0,2	0,6	1,67	0,9	0,84
9	0,87	0,65	0,7	0,65	0,2	0,7	1,43	0,99	0,77
10	0,89	0,6	0,8	0,85	0,1	0,8	1,25	0,95	0,74
11	0,9	0,6	0,85	0,8	0,1	0,8	1,25	1	0,75
12	0,9	0,7	0,85	0,65	0,2	0,85	1,18	1	0,78
13	0,99	0,8	0,7	0,7	0,1	0,9	1,11	1	0,78
14	0,99	0,85	0,69	0,75	0,1	0,9	1,11	1	0,80
15	0,9	0,6	0,75	0,65	0,2	0,7	1,43	1	0,77
16	0,95	0,7	0,8	0,7	0,2	0,6	1,67	1	0,84
17	0,99	0,8	0,8	0,7	0,2	0,9	1,11	0,99	0,82
18	1	0,88	0,85	0,6	0,1	0,8	1,25	1	0,83
19	1	0,7	0,8	0,6	0,1	0,65	1,54	1	0,80
20	0,9	0,75	0,75	0,58	0,1	0,6	1,67	0,95	0,80
21	0,9	0,65	0,77	0,75	0,1	0,6	1,67	0,9	0,78
22	1	0,6	0,8	0,8	0,1	0,8	1,25	0,9	0,75
23	0,8	0,6	0,85	0,8	0,1	0,85	1,18	1	0,73
24	0,89	0,6	0,75	0,5	0,1	0,65	1,54	1	0,74
25	0,9	0,7	0,7	0,7	0,1	0,6	1,67	0,9	0,78
26	1	0,75	0,75	0,7	0,2	0,7	1,43	0,99	0,83
27	0,99	0,9	0,7	0,75	0,2	0,75	1,33	0,9	0,85
28	0,95	0,82	0,7	0,6	0,2	0,72	1,39	1	0,82
29	0,99	0,85	0,69	0,75	0,1	0,9	1,11	1	0,80
30	0,99	0,8	0,7	0,7	0,1	0,9	1,11	1	0,78
31	0,9	0,7	0,85	0,65	0,2	0,85	1,18	1	0,78
32	0,89	0,6	0,85	0,8	0,1	0,8	1,25	1	0,75
33	0,87	0,6	0,8	0,85	0,1	0,8	1,25	0,95	0,74
34	0,9	0,65	0,7	0,65	0,2	0,7	1,43	0,99	0,77
35	0,9	0,75	0,8	0,7	0,2	0,6	1,67	0,9	0,84
36	0,89	0,81	0,75	0,7	0,1	0,7	1,43	1	0,81
37	0,9	0,7	0,78	0,69	0,1	0,8	1,25	0,95	0,76
38	0,99	0,6	0,82	0,63	0,2	0,9	1,11	0,8	0,73
39	0,9	0,59	0,8	0,8	0,2	0,8	1,25	1	0,77
40	0,99	0,6	0,6	0,75	0,2	0,75	1,33	1	0,76
41	0,9	0,71	0,72	0,6	0,1	0,7	1,43	0,9	0,75
42	0,95	0,62	0,7	0,6	0,1	0,8	1,25	0,9	0,71

Построим регрессионную модель зависимости типа (4.2.1). С использованием MS Excel находим коэффициенты b и b_i($i=\overline{1,7}$): b = 0,033; b_1 = 0,1; b_2 = 0,324; b_3 = 0,136; b_4 = 0,095; b_5 = 0,238; b_6 = 0,108; b_7 = 0,081, т.е.

$$Y = 0,033 + 0,1K + 0,324\Phi + 0,136J + 0,095Tp +$$
$$+ 0,238a + 0,108\Omega^{-1} + 0,081n_{д}. \qquad (4.2.2)$$

Сравним влияние на Y данных факторов. Для этого применим стандартизованные коэффициенты регрессии ε_j и коэффициенты эластичности E_j $(j=\overline{1,n})$, вычисляемые по формулам $\varepsilon_j = b_j \dfrac{S_j}{S_y}$; $E_j = b_j \dfrac{\overline{x_j}}{\overline{y}}$, где $\overline{x_j}$ – математическое ожидание j-го фактора; $\overline{y}$ – математическое ожидание случайной величины Y. Для рассматриваемого примера находим, что ε_1 = 0,138; ε_2 = 0,846; ε_3 = 0,245; ε_4 = 0,211; ε_5 = 0,332; ε_6 = 0,544; ε_7 = 0,124; E_1 = 0,119; E_2 = 0,29; E_3 = 0,134; E_4 = 0,085; E_5 = 0,044; E_6 =0,187; E_7 = 0,1.

Таким образом, наибольшее влияние на средний балл в данной ситуации оказывает коэффициент интереса обучаемых.

Для оценки тесноты связи между зависимой переменной Y и объясняющими переменными X_1, X_2, …, X_7 вводится коэффициент множественной детерминации $R=\sqrt{Q_R/Q}$ (Q – общая сумма квадратов отклонений зависимой переменной Y от среднего значения $\overline{Y}$; Q_R – сумма квадратов, обусловленная регрессией, отражающей воздействие основных факторов), показывающий долю вариации зависимой переменной, обусловленную изменчивостью объясняющих переменных. Для рассматриваемого примера R = 0,93. Это говорит о сильной связи между значениями переменных в рассматриваемых выборках. Значение R^2 = 0,86 свидетельствует о хорошей точности аппроксимации данных, полученных уравнением регрессии.

Определим надежность полученной модели, т.е. решим вопрос о возможности распространения полученных для данных выборки выводов о сильной связи и хорошей точности аппроксимации на генеральную совокупность. Для этого используем критерий значимости Фишера:

$$F = \frac{R^2(n-p-1)}{(1-R^2)P} > F_{k_1,k_2;\alpha,}$$

где k_1 = p; k_2 = n – p – 1; p – число параметров регрессионной модели; $F_{k_1,k_2,\alpha}$ – значение распределения Фишера – Снедекора [5].

Для рассматриваемого примера n = 42; p = 8; R^2 = 0,86; k_1 = 8; $k_2 = 42 - 8 - 1 =$ 33, F = 25,34. Пусть α = 0,05, тогда $F_{8,33;\,0,05}$ = 2,27.

Поскольку $F \gg F_{8,33;\;0,05}$, уравнение регрессии значимо на уровне α = 0,05, откуда следует, что зависимость (4.2.2) можно распространить на генеральную совокупность. Теперь перейдем к вопросу оптимального планирования учебных часов. Выборочные обследования, подобные приведенным на с. 136, проводились 7 раз (по числу дисциплин) и были получены зависимости:

$$Y_1 = 0,033 + 0,1K_1 + 0,324\varPhi_1 + 0,136J_1 + 0,095Tp_1 + 0,238a_1 + 0,108\Omega_1^{-1} + 0,081n_{д1};$$
$$Y_2 = 0,03 + 0,1K_2 + 0,32\varPhi_2 + 0,14J_2 + 0,09Tp_2 + 0,23a_2 + 0,1\Omega_2^{-1} + 0,08n_{д2};$$
$$Y_3 = 0,027 + 0,11K_3 + 0,3\varPhi_3 + 0,14J_3 + 0,08Tp_3 + 0,3a_3 + 0,11\Omega_3^{-1} + 0,07n_{д3};$$
$$\begin{aligned} Y_4 &= 0,032 + 0,12K_4 + 0,33\varPhi_4 + 0,15J_4 + \\ &+ 0,09Tp_4 + 0,25a_4 + 0,16\text{Щ}_4^{-1} + 0,09n_{д4}; \end{aligned} \tag{4.2.3}$$
$$Y_5 = 0,028 + 0,1K_5 + 0,32\varPhi_5 + 0,14J_5 + 0,09Tp_5 + 0,24a_5 + 0,15\Omega_5^{-1} + 0,08n_{д5};$$
$$Y_6 = 0,031 + 0,13K_6 + 0,32\varPhi_6 + 0,13J_6 + 0,095Tp_6 + 0,26a_6 + 0,12\Omega_6^{-1} + 0,07n_{д6};$$
$$Y_7 = 0,03 + 0,12K_7 + 0,34\varPhi_7 + 0,12J_7 + 0,08Tp_7 + 0,2a_7 + 0,11\Omega_7^{-1} + 0,075n_{д7}.$$

По условию каждая из переменных уравнений (4.2.3), кроме шестой в правой части каждого уравнения, соответствующей (Ω^{-1}), не меньше своего статистически обусловленного минимального значения, которое положительно, и не больше своего статистически обусловленного максимального значения, не превосходящего 1. Так, согласно статистическим данным для $i = \overline{1,7}$: $0,8 \le K_i \le 1$; $0,59 \le \varPhi_i \le 0,88$; $0,6 \le J_i \le 0,85$; $0,5 \le Tp_i \le 0,85$; $0,1 \le a_i \le 1$; $1,11 \le \Omega_i^{-1} \le 1,67$; $0,8 \le n_{\partial i} \le 1$.

Сумма часов, отводимых на изучение рассматриваемых в данной работе семи дисциплин, составляет 1, поэтому справедливо ограничение

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1. \tag{4.2.4}$$

Задача заключается в определении значений переменных a_i ($i = \overline{1,7}$), удовлетворяющих уравнениям системы (4.2.3), при которых целевая функция, равная сумме средних баллов успеваемости по всем семи дисциплинам ($L = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7$) достигает своего максимального значения.

Заметим, что L можно представить в виде $L = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j \ne 5} c_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^{7} c_i a_i$,

где z_{ij} – j-й фактор i-й дисциплины $(i = \overline{1,7},\ j = \overline{1,4},\ j = \overline{6,7})$; c_{ij} – коэффициент при j-м факторе i-й дисциплины. Наибольшее значение L достигается при максимально возможных значениях факторов z_{ij} $(i = \overline{1,7},\ j \ne 5)$, удовлетворяющих неравенствам (4.1.2), а также факторов a_i ($i = \overline{1,7}$) при выполнении условия (4.2.4). Пусть $c_0 = \sum_{i=1,\ j\le 5}^{7} c_{ij} \max z_{ij}$, где $\max z_{ij}$ определяется согласно неравенствам (4.1.2). Имеет место данная ниже теорема.

Теорема. Если максимизируется функция $L = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i + c_0$, причем $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, и $a_i \ge \gamma_i,\ \gamma_i \ge 0\ (i=\overline{1,n})$ и $\max\limits_{1\le i\le n} c_i$ достигается в единственной точке при $i=i_0$, тогда

$$L_{\max} = \sum_{i\ne i_0} c_i \gamma_i + c_0 + c_{i_0}\Big(1 - \sum_{i\ne i_0}\gamma_i\Big). \tag{4.2.5}$$

Доказательство. Пусть $L_1 = \sum_{i\ne i_0} c_i \gamma_i + c_0 + c_{i_0}\Big(1-\sum_{i\ne i_0}\gamma_i\Big)$. Предположим, что функция L принимает максимальное значение, равное L_0, в точке $(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0)$. Тогда L_0 можно представить в виде $L_0 = \sum_{i\ne i_0} c_i a_i^0 + c_0 + c_{i_0}\Big(1-\sum_{i\ne i_0} a_i^0\Big)$.

Достаточно доказать, что $L_1 \ge L_0$. Найдем

$$L_1 - L_0 = \sum_{i\ne i_0} c_i \gamma_i + c_0 + c_{i_0}\Big(1-\sum_{i\ne i_0}\gamma_i\Big) - \sum_{i\ne i_0} c_i a_i^0 - c_0 - c_{i_0}\Big(1-\sum_{i\ne i_0} a_i^0\Big) =$$

$$= \sum_{i\ne i_0} c_i (\gamma_i - a_i^0) - \sum_{i\ne i_0} c_{i_0}(\gamma_i - a_i^0) = \sum_{i\ne i_0} (\gamma_i - a_i^0)(c_i - c_{i_0}).$$

По условию для любого $i=\overline{1,n}$ $\gamma_i \le a_i$, поэтому $\gamma_i \le a_i^0$. Кроме того, из определения c_{i_0} следует, что $c_i \le c_{i_0}$, следовательно, $L_1 - L_0 \ge 0$ и $L_1 \ge L_0$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае, если $\max\limits_{1\le i\le n} c_i$ достигается при k разных значениях i ($k > 1$), то в формуле (4.2.5) в первом слагаемом не участвуют элементы с данными значениями i, а эти элементы не вычитаются из 1.

Доказанная теорема позволяет находить максимальное значение линейной функции при линейном ограничении без использования симплекс-метода, что существенно упрощает решение целого класса задач линейного программирования.

Вернемся к рассматриваемой задаче оптимального планирования учебных часов.

Пусть $n = 7$, $i=\overline{1,7}$, c_i – коэффициент в i-м уравнении при a_i. Применив эту теорему к рассматриваемой задаче, получим:

$L_{\max} = 5{,}81$ при $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0{,}1,\ a_3 = 0{,}4,$

$Y_1 = 0{,}82$; $Y_2 = 0{,}82$; $Y_3 = 0{,}91$; $Y_4 = 0{,}82$; $Y_5 = 0{,}81$; $Y_6 = 0{,}82$; $Y_7 = 0{,}81$.

§ 4.3. Оптимальное решение организационных вопросов и оценка полезности этого решения

При решении глобальной задачи часто бывает целесообразно разбить ее на подзадачи и распределить имеющиеся силы (средства) на решение этих подзадач таким образом, чтобы был достигнут общий максимальный эффект [35].

Пусть выделено n подзадач и имеется m однотипных средств по их решению, при этом известны вероятности p_j $(j=\overline{1,n})$ выполнения j-й подзадачи каждым средством, причем $0<p_j<1$. Обозначим число средств (из m имеющихся), выделенных на решение j-й подзадачи, как x_j вероятность решения j-й подзадачи хотя бы одним средством из выделенных – как P_j: $P_j=1-(1-p_j)^{x_j}$.

Средний эффект при решении всех n подзадач можно вычислить по формуле

$$э=\sum_{j=1}^{n} C_j\left[1-(1-p_j)^{x_j}\right], \qquad (4.3.1)$$

т.е. как взвешенную сумму вероятностей выполнения всех подзадач. В формуле (4.3.1) коэффициент C_j представляет собой важность (эффективность) решения j-й подзадачи. Он может иметь различное смысловое содержание и количественно выражаться в виде баллов, процентов и т.п. Удобно его выражать в долях единицы. В этом случае C_j нормируют введением приведенных коэффициентов:

$$g_j=\frac{C_j}{\sum_{j=1}^{n} C_j}(j=\overline{1,n}), \qquad (4.3.2)$$

причем $\sum_{j=1}^{n} x_j=\nu$.

Проблема заключается в определении $x_1, x_2,..., x_n$, т.е. сил (средств), направленных на решение первой, второй, …, n-й подзадачи. При таком распределении средний эффект э должен быть максимальным.

Формулы (4.3.1) и (4.3.2) определяют оптимизационную задачу нелинейного программирования, заключающуюся в максимизации функции (4.3.1) при ограничениях (4.3.2). Один из способов ее решения связан с методом неопределенных множителей Лагранжа [73], согласно которому отыскание максимума функции при ограничениях сводится к отысканию максимума функции Лагранжа: $э^* = э + \lambda\varphi(\overline{X})$, где $\overline{X} = (x_1,...,x_n)$, $\varphi(\overline{X}) = v - \sum_{j=1}^{n} x_j$. Следовательно:

$$э^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{\sum_{j=1}^{n} C_j}\left[1-(1-p_j)^{x_j}\right] + \lambda\left(v - \sum_{j=1}^{n} x_j\right). \qquad (4.3.3)$$

Предположим для простоты изложения, но не нарушая общности, что n = 2, т.е. глобальная задача разбивается на две подзадачи. На их решение выделено m средств. Тогда выражение (4.3.3) запишется как

$$э^* = \frac{C_1}{C_1+C_2}\left[1-(1-p_1)^{x_1}\right] + \frac{C_2}{C_1+C_2}\left[1-(1-p_2)^{x_2}\right] + \lambda(v - x_1 - x_2). \qquad (4.3.4)$$

Следуя методу Лагранжа, найдем частные производные функции $э^*$ из формулы (4.3.4) по x_1, x_2, λ и приравняем их к нулю. Получим

$$\begin{aligned}
&э^{*'}_{x_1} = \frac{c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1} \ln(1-p_1) - \lambda = 0;\\
&э^{*'}_{x_2} = \frac{c_2}{c_1+c_2}(1p_2)^{x_2} \ln(1-p_2) - \lambda = 0; \qquad (4.3.5)\\
&э^{*'}_{\lambda} = v - x_1 - x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Решим систему (4.3.5). Из первого и второго уравнений получаем $c_1(1-p_1)^{x_1}\ln(1-p_1) = c_2(1-p_2)^{x_2}\ln(1-p_2)$, откуда с учетом третьего уравнения системы $c_1(1-p_1)^{v-x_2}\ln(1-p_1) = c_2(1-p_2)^{x_2}\ln(1-p_2)$, или

$$\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^{x_2} = \frac{c_1}{c_2}(1-p_1)^{v} \frac{\ln(1-p_1)}{\ln(1-p_2)}. \qquad (4.3.6)$$

Положим, что $Z = \frac{c_1}{c_2}(1-p_1)^{v} \frac{\ln(1-p_1)}{\ln(1-p_2)}$. Тогда получаем:

$$x_2 = \log_{(1-p_1)(1-p_2)} Z\,; \qquad (4.3.7)$$

$$x_1 = v - x_2. \qquad (4.3.8)$$

Таким образом, точка $P(x_1, x_2)$, координаты которой удовлетворяют равенствам (4.3.7), (4.3.8), является критической, в которой возможен экстремум. Проверим достаточное условие экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка функции $э^*$, определяемой формулой (4.3.5), по переменным x_1, x_2, а также частные производные первого порядка функции $\varphi(x) = v - x_1 - x_2$ по x_1 и x_2. Итак,

$$э^{*''}_{x_1^2} = \frac{-c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1}(\ln(1-p_1))^2,\ э^{*''}_{x_2^2} = \frac{-c_2}{c_1+c_2}(1-p_2)^{x_2}(\ln(1-p_2))^2,$$

$$э^{*''}_{x_1x_2} = 0,\ \phi'_{x_1} = \phi'_{x_2} = -1.$$

Далее составляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_{x_1} & \varphi^1_{x_2} \\ \varphi'_{x_1} & э^{*''}_{x_1^2} & э^{*''}_{x_1x_2} \\ \varphi'_{x_2} & э^{*''}_{x_1x_2} & э^{*''}_{x_2^2} \end{vmatrix}$$

и вычисляем его значение в точке P. Для рассматриваемой задачи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{-c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1}\ (\ln(1-p_1))^2 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{-c_2}{c_1+c_2}(1-p_2)^{x_2}\ (\ln(1-p_2))^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{c_1}{c_1+c_2}(1-p_1)^{x_1}\ (\ln(1-p_1))^2 + \frac{c_2}{c_1+c_2}(1-p_2)^{x_2}\ (\ln(1-p_2))^2 > 0.$$

Положительность данного определителя (а он оказался положительным для любых x_1 и x_2) означает, что в точке P исходная функция $э$ имеет максимум. Значит, на решение второй подзадачи должно быть выделено $x_2 = \log_{(1-p_1)(1-p_2)} Z$ средств, где Z обозначает правую часть равенства (4.3.6), а на решение первой подзадачи выделяется, согласно выражению (4.3.8), $x_1 = v - x_2$ средств.

Рассматриваемые подзадачи образуют систему $(A_1, A_2, ..., A_n)$, которая продуцирует систему средств $(X_1, X_2, ..., X_n)$, выделенных на их решение, и систему балльных оценок $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ эффективности их решения. Для любого $j = \overline{1,n}$ X_j и Y_j представляют собой случайные величины, причем $\sum_{j=1}^{n} x_j = v$, где x_j – значение случайной величины X_j ; $\sum_{j=1}^{n} y_j = w$, где y_j – значение случайной величины Y_j.

Система $(X_1, X_2, ..., X_n)$ образует **портфель средств**, используемый для реализации различного рода ситуаций, мероприятий и т.п., система $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ – **портфель оценочных баллов.** Стоимостью портфеля средств (и оценочных баллов) будем называть сумму $V = \sum_{j=1}^{N} X_j$ $(W = \sum_{j=1}^{n} Y_j)$

составляющих его величин $X_j(Y_j)(j=\overline{1,n})$. Как сумма случайных величин, стоимость $V(W)$ является случайной. Будем считать, что данный (начальный) момент времени имеет значение $t=0$ и при этом $V(W)$ обозначает стоимость портфеля в этот момент времени. Поскольку в начальный момент времени все $X_j(Y_j)$ (а тем самым и $V(W)$ фиксированы) можно считать, что в этот момент времени данные вели-чины неслучайны, поэтому положим следующее: $X_j(0)=C_j^{(1)}$, $V(0)=V_0$, $Y_j(0)=C_j^{(2)}$ и $W(0)=W_0$, где $C_j^{(1)}$; $C_j^{(2)}$, V_0 и W_0 – известные неслучайные величины, причем $V_0=\sum_{j=1}^{n} C_j^{(1)}$, $W_0=\sum_{j=1}^{n} C_j^{(2)}$.

Величину $\dfrac{V(\Delta t)-V_0}{V_0}=d_p^{(1)}(\Delta t)$ будем называть доходностью портфеля средств за промежуток Δt, величину $d_j^{(1)}(\Delta t)=\dfrac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{C_j^{(1)}}$ – доходностью *j*-й компоненты этого портфеля, а $C_j^{(1)}/V_0=\lambda_j^{(1)}$ – долей начальной стоимости портфеля средств, приходящейся на *j*-ю подзадачу. Аналогично определяем доходность $d_p^{(2)}(\Delta t)$ портфеля оценочных баллов.

Доходность портфеля – это доходность на единицу его стоимости. При этом доходность составляющей портфеля показывает ее доходность, приходящуюся на единицу стоимости. Среднее значение доходности портфеля называется эффективностью портфеля, среднее квадратическое отклонение доходности портфеля – риском портфеля. Для эффективности портфеля будем использовать обозначение $\overline{d_p}$, для риска – σ_p. Оценим эффективность и риск портфеля средств:

$$\overline{d_p}^{(1)}=M\left[d_p^{(1)}\right]=M\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{V_0}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(1)}\, M\left[d_j^{(1)}(\Delta t)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{C_j^{(1)}}{V_0}\, M\left(\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{C_j^{(1)}}\right)=\frac{1}{V_0}\sum_{j=1}^{n}\left(M\left[X_j(\Delta t)\right]-C_j^{(1)}\right).$$

Положим, что $M_j^{(1)}=M\left[X_j(\Delta t)\right]$. Тогда

$$\overline{d_p}^{(1)}=\frac{1}{V_0}\sum_{j=1}^{n}\left(M_j^{(1)}-C_j^{(1)}\right). \qquad (4.3.9)$$

Вычислим

$$D\left[d_p^{(1)}\right]=D\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{V_0}\right)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(1)})^2\, D\left[d_j^{(1)}(\Delta t)\right]+2\sum_{i\langle j}\lambda_i^{(1)}\,\lambda_j^{(1)}\,K_{ij}^{(1)},$$

где $K_{ij}^{(1)}$ – момент корреляции между $d_i^{(1)}(\Delta t)$ и $d_j^{(1)}(\Delta t)$.

Последняя формула преобразуется следующим образом:

$$D\left[d_p^{(1)}\right]=\sum_{j=1}^{n}\frac{(C_j^{(1)})^2}{V_0^2}\ D\ \frac{X_j(\Delta t)-C_j^{(1)}}{C_j^{(1)}}\ +\frac{2}{V_0^2}\sum_{i<j}C_i^{(1)}\ C_j^{(1)}\ K_{ij}^{(1)}=\frac{1}{V_0^2}\sum_{j=1}^{n}D\left[X_i(\Delta t)\right]+$$

$$+\frac{2}{V_0^2}\sum_{i<j}\left(D\left[X_i(\Delta t)\right]\ D\left[X_j(\Delta t)\right]\right)^{\frac{1}{2}}\ r_{ij}^{(1)}\ ,$$

где $r_{ij}^{(1)}$ – коэффициент корреляции между X_i и X_j.

Положим, что $D_j^{(1)}=D\left[X_j(\Delta t)\right]$. Тогда

$$\sigma_p^{(1)}=\left(\frac{1}{V_0^2}\sum_{j=1}^{n}D_j^{(1)}+\frac{2}{V_0^2}\sum_{i<j}\sqrt{D_i^{(1)}D_j^{(1)}}\ r_{ij}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.3.10)$$

Аналогичные формулы имеют место и для характеристик портфеля оценочных баллов. Сравним портфели средств и портфели оценочных баллов по двум критериям: по средней доходности и риску, определяемому через среднее квадратическое отклонение доходности. Соединение этих критериев в один осуществляется по одной из формул:

$$U=\overline{d_p}-\alpha\sigma_p;$$

$$U=\frac{\overline{d_p}}{\alpha\sigma_p},$$

где вес первого критерия полагается равным 1, вес второго – равным α; U – полезность портфеля.

В литературе сравнение полезностей мероприятий (ситуаций и т.п.), моделируемых соответствующими портфелями средств, осуществляется по одной из формул:

$$\overline{d_p}^{(2)}-\alpha_2\sigma_p^{(2)}>\overline{d_p}^{(1)}-\alpha_1\sigma_p^{(1)}; \qquad (4.3.11)$$

$$\frac{\overline{d_p}^{(2)}}{\alpha_2\sigma_p^{(2)}}>\frac{\overline{d_p}^{(1)}}{\alpha_1\sigma_p^{(1)}}. \qquad (4.3.12)$$

Покажем, что неравенства (4.3.11) и (4.3.12) при определенных условиях равносильны. Для этого сначала проведем общие рассуждения.

Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 – произвольные положительные числа, образующие систему двух неравенств:

$$a_2-b_2>a_1-b_1; \qquad (4.3.13)$$

$$\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_1}{b_1}. \qquad (4.3.14)$$

Исследуем условия равносильности неравенств (4.3.13) и (4.3.14). Если $a_1=a_2$ или $b_1=b_2$, то равносильность неравенств очевидна. Рассмотрим случай, когда $a_2>b_2$. Если при этом $a_1<b_1$, то

равносильность очевидна, поэтому допустим, что $a_1 > b_1$ и $b_1 > b_2$. Пусть для данных положительных чисел (a_1, b_1, a_2, b_2) имеет место неравенство (4.3.13). Докажем от противного, что тогда имеет место неравенство (4.3.14). Пусть $\frac{a_2}{b_2} \quad \frac{a_1}{b_1}$. Вычтем 1 из обеих частей этого неравенства и приведем к общему знаменателю обе части. Получим $\frac{a_2 - b_2}{b_2} \quad \frac{a_1 - b_1}{b_1}$. Поскольку $b_2 < b_1$, $a_2 > b_2$ и $a_1 > b_1$, то $\frac{a_2 - b_2}{b_1} < \frac{a_1 - b_1}{b_1}$. Тогда $a_2 - b_2 < a_1 - b_1$, что противоречит неравенству (4.3.13), поэтому из выражения (4.3.13) вытекает (4.3.14).

Пусть $b_2 > b_1$. Если при этом $a_1 > a_2$, то, как нетрудно видеть, неравенства (4.3.13) и (4.3.14) не имеют смысла.

Пусть $a_2 > a_1$ и имеет место неравенство (4.3.13). Проанализируем, при каком условии имеет место неравенство (4.3.14). Один из подходов заключается в следующем. Из условия $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ при фиксированных значениях трех переменных, например a_1, a_2, b_2, находим значение $b_1^{(0)} = a_1 b_2 / a_2$, из условия $a_2 - b_2 = a_1 - b_1$ – значение $b_1^{(1)} = a_1 - a_2 + b_2$. Тогда при $b_1 > \max\left\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\right\}$ выполняются неравенства (4.3.13) и (4.3.14), а при $b_1 < \min\left\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\right\}$ – противоположные неравенства.

Пусть имеет место неравенство (4.3.14). Если $a_1 < a_2$ и $b_2 < b_1$, тогда очевидно, что $a_1 - b_1 < a_2 - b_2$. Если $b_2 > b_1$, то вычтем 1 из обеих частей неравенства (4.3.14) и приведем обе части к общему знаменателю: $\frac{a_1 - b_1}{b_1} < \frac{a_2 - b_2}{b_2}$, откуда с учетом того, что $b_2 > b_1$ и $a_2 > b_2$, имеем $\frac{a_1 - b_1}{b_2} < \frac{a_2 - b_2}{b_2}$, т.е. $a_1 - b_1 < a_2 - b_2$. Если $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$, то из условия $a_2 - b_2 = a_1 - b_1$ при фиксированных значениях трех переменных, например a_1, a_2, b_2, находим значение $b_1^{(2)}$, а из условия $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ – значение $b_1^{(3)}$. Тогда при $b_1 > \max\left\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\right\}$ выполняются неравенства (4.3.13) и (4.3.14), а при $b_1 < \min\left\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\right\}$ – противоположные неравенства.

Пусть $\alpha_1 = \min\left\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\right\}$, $\beta_1 = \max\left\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}\right\}$, $\alpha_2 = \min\left\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\right\}$, $\beta_2 = \max\left\{b_1^{(2)}, b_1^{(3)}\right\}$. Из приведенных рассуждений вытекает теорема.

Теорема. Если $a_2 > b_2$ и $a_1 < b_1$ или $a_2 > b_2$, $a_1 > b_1$, $a_2 > a_1$ и $b_1 > b_2$, то неравенства (4.3.13) и (4.3.14) равносильны. Если $a_2 > b_2$, $a_1 > b_1$,

$a_2 > a_1$ и $b_2 > b_1$, то при фиксированных a_1, a_2, b_2 неравенства (4.3.13) и (4.3.14) равносильны при $b_1 > \beta_1$, а при $b_1 < \alpha_1$ равносильны противоположные неравенства. Если $a_2 > b_2$, $a_1 > b_1$, $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$, то при фиксированных a_1, a_2, b_2 неравенства (4.3.13) и (4.3.14) равносильны при $b_1 > \beta_2$, а при $b_1 < \alpha_2$ – противоположные неравенства.

Итак, рассмотрен случай, когда $a_2 > b_2$. При $a_2 < b_2$ от системы неравенств (4.3.13) и (4.3.14) переходим к неравенствам: $b_1 - a_1 > b_2 - a_2$, $b_1 / a_1 > b_2 / a_2$. В этом случае $b_1 > a_1$ и все рассуждения повторяются, но вместо a_2 теперь будет b_1, вместо b_2 – a_1, соответственно, вместо a_1 – b_2, вместо b_1 – a_2. Из этой теоремы при $a_1 = \overline{d_p}^{(1)}$, $a_2 = \overline{d_p}^{(2)}$, $b_1 = \alpha_1 \sigma_p^{(1)}$, $b_2 = \alpha_2 \sigma_p^{(2)}$ вытекает равносильность неравенств (4.3.11) и (4.3.12) при указанных ограничениях.

Рассмотрим **пример**. Для сравнения успеваемости двух групп были выбраны два критерия: Y_1 – средний балл группы по текущей успеваемости в первом семестре; Y_2 – во втором. Будем обозначать верхним индексом «1» эти показатели для первой группы, индексом «2» – для второй. Значения $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, Y_1^{(2)}$ и $Y_2^{(2)}$ приведены ниже ($k = 1, 2$):

Значения $Y_1^{(k)}$	$y_{11}^{(k)}$	$y_{12}^{(k)}$	…	$y_{1S_k}^{(k)}$
Число обучаемых с данным баллом	$n_{11}^{(k)}$	$n_{12}^{(k)}$	…	$n_{1S_k}^{(k)}$
Значения $Y_2^{(k)}$	$y_{21}^{(k)}$	$y_{22}^{(k)}$	…	$y_{2S_k}^{(k)}$
Число обучаемых с данным баллом	$n_{21}^{(k)}$	$n_{22}^{(k)}$	…	$n_{2S_k}^{(k)}$

Начальные значения этих баллов (в начале первого и второго семестра) равны $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$. Имеем два портфеля оценочных баллов: $\left(Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}\right)$ – для первой группы обучаемых; $\left(Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}\right)$ – для второй. Оценим эффективность и риск по формулам (4.3.9), (4.3.10) соответственно:

$$\overline{d_p}^{(1)} = M\left[d_p^{(1)}\right] = \frac{1}{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}} \left(M\left[Y_1^{(1)}(\Delta t)\right] - C_1^{(1)} + M\left[Y_2^{(1)}(\Delta t)\right] - C_2^{(1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}} \left(\frac{\sum_{j=1}^{S_1} y_{1j}^{(1)} n_{1j}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{S_1} n_{1j}^{(1)}} - C_1^{(1)} + \frac{\sum_{j=1}^{S_1} y_{2j}^{(1)} n_{2j}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{S_1} n_{2j}^{(1)}} - C_2^{(1)} \right);$$

$$\sigma_p^{(1)} = \frac{1}{C_1^{(1)} + C_2^{(1)}} \left(D_1^{(1)} + D_2^{(1)} + 2\ \sqrt{D_1^{(1)}}\ \sqrt{D_2^{(1)}}\ \ r_{12}^{(1)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $D_1^{(1)} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{S_1} (y_{1j}^{(1)})^2\ \ n_{1j}^{(1)}}{\sum\limits_{j=1}^{S_1} n_{1j}^{(1)}} - M_1^{(1)2}$; $D_2^{(1)} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{S_1} (y_{2j}^{(1)})^2\ \ n_{2j}^{(1)}}{\sum\limits_{j=1}^{S_1} n_{2j}^{(1)}} - M_2^{(1)2}$.

Для второй группы риск и эффективность рассчитываются совершенно аналогично.

Таким образом, имеем два портфеля оценочных баллов: $\left(\overline{d_p}^{(1)}, \sigma_p^{(1)}\right)$ и $\left(\overline{d_p}^{(2)}, \sigma_p^{(2)}\right)$. Полезности этих портфелей сравниваются либо по формуле (4.3.11), либо по формуле (4.3.12).

Одна из важных задач заключается в отыскании максимального значения функции полезности портфеля при данных ограничениях. Часто ограничения представляют собой линейные неравенства вида $\alpha\ \ \overline{d_p}\ \ \beta$, $\delta\ \ \sigma_p\ \ \gamma$, связывающие эффективность и риск портфеля. Тогда, очевидно, максимальное значение полезности портфеля достигается при $\overline{d_p} = \beta$ и $\sigma_p = \delta$.

В ряде случаев используют линейное ограничение $l_1\ \ \overline{d_p} + l_2\sigma_p\ \ \ l_3$. Для решения задачи можно применять метод Лагранжа. Однако, если полезность портфеля определяется по формуле $U = \overline{d_p} - \alpha\ \ \sigma_p$, то, как нетрудно показать, коэффициенты l_1 и l_2 при наличии стационарной точки должны быть связаны соотношением $l_2 = -\alpha l_1$, а это далеко не всегда имеет место. Поэтому при линейном ограничении целесообразно находить полезность портфеля по формуле $U = \dfrac{\overline{d_p}}{\alpha\sigma_p}$. Можно увидеть, что тогда полезность имеет максимальное значение при $\overline{d_p} = (l_3 + l_1)/l_1$, $\sigma_p = -l_1/l_2$, если $l_3\ \ l_2 < 0$, и имеет в точке $(\overline{d_p}, \sigma_p)$ минимальное значение, если $l_3\ \ l_1 > 0$.

Разработанный метод может применяться, например, в учебном процессе для нахождения оптимального распределения учебных составляющих лекции и практического занятия [34]

Задача оптимального решения организационных вопросов является актуальной задачей планирования и организации работы любых систем в области техники, экономики, социальной сфере. Предложенный алгоритм ее решения универсален. Для характеристики задачи введены два портфеля (средств и оценочных баллов). Такой подход дает возможность системного анализа эффективности, риска и полезности решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены вопросы повышения качества учебного процесса за счет использования новых методов, методик, моделей, алгоритмов оценивания результатов усвоения знаний студентами, совершенствования самой системы оценивания. Для этого разработаны индексный и логический, векторный и многокритериальный методы оценки качества учебного процесса. Предложены специальные количественные оценки определения уровня достижения качественных показателей. В условиях развития цифровых образовательных технологий предложено, кроме обычных балльной и рейтинговых систем, использовать обобщенные характеристики успеваемости (портфель оценок, риск и т.д.) и физические показатели учебного процесса (работу, скорость, ускорение и т.д.). Разработаны показатели, на основе которых можно формировать индивидуальные образовательные траектории как отдельных обучаемых, так и их групп.

Для повышения значимости и весомости оценок, выставляемых по учебным дисциплинам, предложено использовать резервный фонд оценок. Разработана модель множества резервных оценок в учебном процессе. Проведен анализ зависимости резервной части от описывающих данную модель параметров уравнений для непрерывного и дискретного времени, а также для условий четкой и нечеткой информации. Представлен метод оптимального управления резервом оценок. Исследована устойчивость решения. Для процесса управления в нечетких условиях для непрерывного случая предложено определение оценки риска неэффективности управления.

Обучаемый (группа или группы обучаемых) рассматривался с позиций системного подхода. Сложность рассматриваемого процесса не позволяет ограничиться одним математическим методом или одним видом модели, поэтому использовалось несколько способов построения моделей. С одной стороны, процесс получения и усвоения знаний представлялся как управляемый марковский процесс. Для этого случая был разработан алгоритм управления процессом усвоения знаний путем ликвидации неусвоенных основных понятий. Данный метод управления образовательным процессом обеспечивает заданную вероятность требуемого состояния системы. С другой стороны, использовались модели развития (динамики) процесса обучения на основе аппарата разностных уравнений. Дальнейшим развитием данного подхода стала разработанная в монографии динамическая модель учета взаимного влияния обучающихся в учебной группе и получения аналитического решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс динамического взаимодействия учащихся.

Особое значение в современном учебном процессе имеют компетенции, осваиваемые обучаемыми, и оценка уровня их достижения. Для решения указанной проблемы было предложено использовать метод сетевого планирования и управления. Инновацией при данном подходе выступила адаптация теории, методов и показателей систем сетевого планирования и управления к образованию компетенций.

Научная значимость и новизна работы заключаются в описании модели формирования компетентности обучаемых на основе как четкой, так и нечеткой информации. Разработан метод определения оптимальных модулей учебной дисциплины. В рамках реализации системного подхода к изучению математических моделей и методов учебного процесса предложены различные в плане математического аппарата исследования. Показано, как для оценки сформированности компетенций применять экспертную систему, методы дискретной математики и формальных грамматик.

Предложены оптимизационные математические модели планирования решения организационных вопросов, разработки учебно-тематического плана. Введена эконометрическая модель менеджмента качества учебных планов.

Для лучшего понимания излагаемого в монографии материала даны подробные и конкретные числовые примеры.

Разработанные методы можно применять не только в учебном процессе, но и в системах профессиональной переподготовки и повышения квалификации работников предприятий и учреждений, планирования резерва ресурсов, оценки качественных и количественных показателей деятельности предприятий, организаций, оптимального планировании распределения работ, организации процесса управления при гарантийной вероятности достижения цели и с учетом динамического взаимодействия участвующих в данной работе (задании) сотрудников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акимова Ю.Н. Типы личности студентов в современных условиях высшего образования России: дис. … канд. псих. наук: 19.00.07 – педагогическая психология. Ярославль, 2007. 187 с.

2. Алешин Л.И. Контроль знаний без традиционных оценок как элемент совершенствования методов обучения // Социально-гуманитарные знания 2003. № 1. С. 106–114.

3. Антохина Ю.А., Варжапетян А.Г., Тисенко В.Н. Применение нечеткой логики противоположностей для оценивания уровня компетентности обучающихся // Качество. Инновации. Образование. 2012. № 2. С. 32–37.

4. Архипов А.М. Расчет для многокритериальных задач принятия решений // Технические науки: проблемы и решения: материалы Международной научно-практической конференции. М.: Интернаука, 2020. С. 20–27.

5. Бадеева Е.А. Методологические принципы планирования качества в вузах // Качество. Инновации. Образование. 2011. № 9 (76). С. 2–6.

6. Баранова Е.В., Швецов Г.В. Методы и инструменты для анализа цифрового следа студента при освоении образовательного маршрута // Перспективы науки и образования. 2021. № 2 (50). С. 415–430.

7. Берштейн Л.С. Нечеткие графы и гиперграфы. М.: Научный мир, 2005. 256 с.

8. Борзых В.Э., Шалкина Т.Н., Николаева Д.Р. Метод математического моделирования процесса оценивания профессиональных компетенций выпускников вуза // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. С. 106.

9. Быстров В.В., Маслобоев А.В. Информационная поддержка управления качеством образования в контексте глобальной безопасности развития региона // Качество. Инновации. Образование. 2011. № 10 (77). С. 2–11.

10. Васильев В.Н. Модели управления вузом на основе информационных технологий: монография. Петрозаводск: ПетрГУ, 2000. 162 с.

11. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.

12. Волошена В.В. Математическое моделирование в структуре STEM-обучения // Европейский журнал гуманитарных и общественных наук. 2020. № 3. С. 88–91.

13. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер [и др.]. М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1999. 470 с.

14. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Способы оптимизации портфеля оценочных баллов // Вестник Тверского государственного технического университета. 2008. Вып. 13. С. 267–273.

15. Ганичева А.В. Анализ факторов, влияющих на деятельность сельскохозяйственных предприятий, на основе логического метода // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2010. № 8. С. 71–78.

16. Ганичева А.В. Оптимальное планирование учебных часов // Образование в XXI веке: материалы Всероссийской заочной конференции. Вып. 9. Тверь: ТГТУ, 2009. С. 234–238.

17. Ганичева А.В. Индексный анализ структурных компонент и показателей качества учебного процесса // Качество. Инновации. Образование. 2011. № 10 (77). С. 11–15.

18. Ганичева А.В. Интеллектуальная информационная система оптимального контроля знаний // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 07 (101). С. 358–374. URL: http://ej.kubagro.ru/2014/07/pdf/19.pdf (дата обращения: 21.10.2022).

19. Ганичева А.В. Использование классификации обучаемых по группам успеваемости для повышения эффективности учебного процесса // Актуальные вопросы современной науки: материалы Международной научной конференции. Таганрог: Спутник+, 2010. С. 23–27.

20. Ганичева А.В. Логический метод менеджмента качества образовательного процесса // Информационная среда вуза XXI века: материалы Международной научной конференции. Петрозаводск: ПетрГУ, 2010. С. 54–55.

21. Ганичева А.В. Математическая модель оптимального управления резервными средствами в учебном процессе // В мире научных открытий. 2015. № 12-3 (72). С. 953–964.

22. Ганичева А.В. Математическая модель оценки качества обучения // В мире научных открытий. 2015. № 6-1 (66). С. 313–326.

23. Ганичева А.В. Математическая модель планирования мероприятий // В мире научных открытий. 2011. № 6. С. 254–260.

24. Ганичева А.В. Математическая модель повышения качества учебного процесса // Естественные и технические науки. 2011. № 2 (52). С. 425–430.

25. Ганичева А.В. Математические модели и методы оценки событий, ситуаций и процессов: учебное пособие для вузов. СПб.: Лань, 2017. 188 с.

26. Ганичева А.В. Математическое описание типологии учащихся // Мир лингвистики и коммуникации. 2014. Т. 1. № 35. С. 36–42.

27. Ганичева А.В. Метод векторного анализа инновационной деятельности вуза // В мире научных открытий. 2011. № 5 (17). С. 37–46.

28. Ганичева А.В. Метод определения оптимальных модулей и компетентности обучаемых // Качество. Инновации. Образование. 2013. № 10. С. 19–23.

29. Ганичева А.В. Методика оценки качества учебно-тематического плана // Образование в XXI веке: материалы Всероссийской заочной конференции. Вып. 11. Тверь: ТГТУ, 2011. С. 82–87.

30. Ганичева А.В. Модели развития учебного процесса // Вопросы современной науки и практики. 2011. № 3 (34). С. 35–40.

31. Ганичева А.В. Моделирование показателей учебного процесса // В мире научных открытий. 2011. № 10-2 (22). С. 1016–1028.

32. Ганичева А.В. Модель менеджмента качества учебных планов // Качество. Инновации. Образование. 2012. № 4. С. 37–40.

33. Ганичева А.В. Модель сравнения объектов по множеству признаков // Экономические аспекты управления инновационным развитием аграрного сектора России в региональных аспектах: материалы Международной научно-практической конференции в рамках III Республиканского форума, посвященного Дню интеллектуальной собственности «Интеллектуальная собственность – будущее Республики Коми». Сыктывкар: СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. С. 41–45.

34. Ганичева А.В. Нахождение оптимального распределения учебных составляющих лекции и практического занятия // Образование в XXI веке: материалы всероссийской заочной конференции. Вып. 12. Тверь: ТГТУ, 2013. С. 51–62.

35. Ганичева А.В. Оптимальное решение и оценка полезности организационных вопросов // Ярославский педагогический вестник. 2011. Т. 3. № 2. С. 53–59.

36. Ганичева А.В. Оценка психолого-педагогических портретов преподавателей и обучаемых // Экономические и гуманитарные исследования регионов. 2018. № 5. С. 30–33.

37. Ганичева А.В. Показатели качества учебного процесса // Новые технологии в образовании: материалы V Международной научно-практической интернет-конференции (31 марта 2010 г.). М.: Спутник+, 2010. С. 23–27.

38. Ганичева А.В. Системное представление процесса формирования личности // Перспективы развития информационных технологий. 2010. № 2. С. 46–50.

39. Ганичева А.В. Совершенствование оценки знаний обучаемых // Инновации в образовании. 2019. № 3. С. 14–22.

40. Ганичева А.В. Структурное описание онтологий в математике // Образование в XXI веке: материалы Всероссийской заочной конференции. Вып. 13. Тверь: ТГТУ, 2014. С. 74–79.

41. Ганичева А.В. Учебник как обучающая система // Современные исследования социальных проблем. 2011. № 4. С. 32.

42. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Векторная модель многокритериальной оценки // Научное обозрение: теория и практика. 2020. Т. 10. № 10 (78). С. 2245–2253.

43. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Векторно-стохастическое описание совместного портрета преподавателя и учащегося // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. Т. 9. № 3 (34). С. 1–8.

44. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Дискретная математика: учебное пособие. Тверь: ТвГТУ, 2021. 160 с.

45. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Классификация групп учащихся при дифференцированно-групповой форме обучения // Саморазвивающаяся среда технического университета: материалы Всероссийской научно-практической конференции: в 3 ч. Тверь: ТвГТУ, 2017. Ч. 3. С. 74–78.

46. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математическая модель структурного портрета образовательного процесса // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы V Международной научной конференции: в 2 ч. Красноярск: СФУ, 2021. Ч. 2. С. 64–69.

47. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Моделирование показателей документооборота // Современные технологии и инновации: материалы V Всероссийской научно-практической конференции. Тверь: ТвГТУ, 2021. С. 131–136.

48. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Модель повышения эффективности усвоения знаний в условиях цифровизации образования // Инновации в образовании. 2022. № 5. С. 80–90.

49. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Модель согласования портретов преподавателей и обучаемых // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. Т. 8. № 3 (30). С. 16–17.

50. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Прикладная статистика: учебное пособие для вузов. СПб.: Лань, 2021. 172 с.

51. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Системный анализ образовательного процесса // Дистанционные образовательные технологии: материалы VI Международной научно-практической конференции / отв. ред. В.Н. Таран. Симферополь: Ариал, 2021. С. 230–235.

52. Ганичева А.В., Карпунина А.С. Индексный метод в сельском хозяйстве // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2010. Вып. 8. С. 62–68.

53. Ганичева А.В., Уманская Е.Г. Логический метод решения экономических задач // Вопросы теории и практики автоматизированной обработки экономической информации: сборник научных трудов. Тверь: ТГУ, 2000. С. 114–119.

54. Ганичева А.В., Фирсов С.А. Логический метод оценки значимости факторов плодородия почв // Нива Поволжья. 2011. № 1. С. 13–17.

55. Ганичева А.В., Фирсов С.А. Логический метод решения сельскохозяйственных задач // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Серия «Экологические науки». 2011. № 1 (01). С. 165–172.

56. Горелик А.Л., Гуревич И.Б., Скрипкин В.А. Современное состояние проблемы распознавания: Некоторые аспекты. М.: Радио и связь, 1985. 161 с.

57. Гусев С.С. Анализ методов и подходов решения задач многокритериального выбора в условиях неопределенности // Интерактивная наука. 2018. № 1 (23). С. 69–75.

58. Гухман В.Б. Введение в компьютерную обработку социологических данных: учебное пособие. Тверь: ТГТУ, 2004. 236 с.

59. Доррер Г.А., Доррер А.Г., Рудакова Г.М. Оптимальное управление процессом приобретения и оценивания компетенций студентов вуза // Открытое образование. 2018. Т. 22. № 2. С. 37–44.

60. Жуков В.И., Жукова Г.С. Методология математического моделирования управления социальными процессами. М.: Союз, 2006. 280 с.

61. Жунусакунова А.Д. Методы контроля и оценки результатов обучения в учебном процессе // Молодой ученый. 2016. № 20-1 (124). С. 26–29.

62. Зеер Э.Ф., Павлова А.М., Сыманюк Э.Э. Модернизация профессионального образования: компетентностный подход: учебное пособие для студентов, обучающихся по специальности 03.05.00 – профессиональное обучение (по отраслям). М.: Московский психолого-социальный ин-т, 2005. 215 с.

63. Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.]. М.: Юрайт, 2013. 438 с.

64. Качян М.А. Влияния цифровизации на российскую систему образования // Информационное общество. 2021. № 6. С. 42–49.

65. Комар О.Н. Статистика. Часть 1. Общая теория статистики: учебное пособие. Калининград: КГТУ, 2008. 100 с. URL: https://studfile.net/preview/9167728/ (дата обращения: 21.10.2022).

66. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб-ник для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 573 с. URL: http://elenagavrile.narod.ru/ms/kremer_n.sh-teorija_verojatnosti_i_matematicheskaj.pdf (дата обращения: 21.10.2022).

67. Куимова Е.И., Рябов Д.А. Многокритериальные задачи оптимизации // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. Т. 25. № 3. С. 214–217.

68. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 431 с.

69. Лапикова Н.В. Применение расчета коэффициента компетентности преподавателя для количественного оценивания объективности тестирования // Междисциплинарный диалог: современные тенденции в общественных, гуманитарных, естественных и технических науках. 2014. Вып. 1. С. 291–295.

70. Маликов Р.Ф. Практикум по имитационному моделированию сложных систем в среде AnyLogic 6. Уфа: БГПУ, 2013. 296 с.

71. Математические модели подготовки и проверки качества освоения компетенций в образовательном процессе / С.А. Баркалов [и др.] // Открытое образование. 2014. № 2 (103). С. 9–16.

72. Мину М. Математическое программирование: Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.

73. Мутовкина Н.Ю., Семенов Н.А. Модель изменения типов интеллектуальных агентов в методологии системной динамики AnyLogic // Программные продукты и системы. 2018. № 1. С. 145–151.

74. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению и по специальностям психологии. СПб.: Речь, 2007. 392 с.

75. Нечеткая дескрипторная модель оценивания выраженности индикаторов достижения компетенций / А.Н. Полетайкин [и др.] // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. 2019. № 3 (47). С. 55–69.

76. Нечеткие гибридные системы. Теория и практика / И.З. Батыршин [и др.]; под ред. Н.Г. Ярушкиной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 208 с.

77. Ноздрин М.А., Шапин В.И., Зарубин З.В. Разработка методов качественной и количественной оценки измерения компетентности клиентов // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 3. С. 53–56.

78. Представления педагогов и обучающихся о существующих преимуществах и возможных рисках использования цифровых продуктов в образовательной среде / Е.Б. Пучкова [и др.] // Перспективы науки и образования. 2021. № 5 (53). С. 95–109.

79. Применение теории нечетких множеств к задачам оценки и управления формированием компетенций: описание проблемы и подход к ее решению / Большаков А.А. [и др.] // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2. С. 174–181.

80. Пучков Н.П., Тормасин С.И. Методические аспекты формирования, интегрирования и оценки компетенций: методические рекомендации для преподавателей вузов. Тамбов: ТГТУ, 2012. 36 с. URL: https://tstu.ru/book/elib/pdf/2012/puchkov.pdf (дата обращения: 22.10.2022).

81. Ризен Ю.С., Захарова А.А., Минин М.Г. Математическое моделирование образовательного процесса в оценке качества деятельности вуза // Информационное общество. 2014. Вып. 3. С. 25–33. URL: http://emag.iis.ru/arc/infosoc/emag.nsf/BPA/dbd5077b23710a2544257d64003026f7 (дата обращения: 22.10.2022).

82. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия – Телеком, 2006. 383 с.

83. Рыбина Г.В., Паронджанов С.С. Моделирование процессов взаимодействия интеллектуальных агентов в многоагентных системах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 3. С. 3–15.

84. Тазов П.Ю. Вопросы цифрового обучения и методы повышения эффективности обучения цифрового поколения в условиях цифровой среды // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 6-2. С. 385–391.

85. Теория выбора и принятия решений: учебное пособие / И.М. Макаров [и др.]. М.: Наука, 1982. 328 с.

86. Титов Б.А., Рябинова Е.Н. Математическая модель усвоения учебной информации в образовательном процессе // Вестник СГАУ. 2011. № 3 (27). С. 334–340.

87. Форрестер Дж. Мировая динамика / под ред. Д.М. Гвишиани, Н.Н. Моисеева. М. – СПб.: АСТ: Terra Fantastica, 2003. 379 с.

88. Хадзарагова Е.А. Исследование скаляризации векторных оценок в многокритериальных оптимизационных задачах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. № 3-3. С. 15–17.

89. Язенин А.В. Нечеткое математическое программирование: учебное пособие. Калинин: КГУ, 1986. 59 с.

90. Яндыбаева Н.В., Кушников В.А. Оценка качества образовательного процесса в вузе на основе модели Форрестера // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. № 2 (55). С. 176–181.

91. A Multi-criteria Assessment of the Production and Marketing Systems of Local Mountain Food / J. Prišenk [et al.] // Renewable Agriculture and Food Systems. 2013. V. 29 (4). P. 1–10.

92. Allain S. How Do Multi-criteria Assessments Address Landscape-level Problems? A Review of Studies and Practices // Ecological Economics. 2017. V. 136. P. 282–295.

93. Ganicheva A.V., Ganicheva A.V. System Analysis of Educational Process // CEUR Workshop Proceedings. DLT 2021 – Selected Papers of the 6th International Scientific and Practical Conference «Distance Learning Technologies», 2021. P. 161–166.

94. Gerasimou G. Dominance-solvable Multicriteria Games with Incomplete Preferences // Economic Theory Bulletin. 2019. No. 7. P. 165–171.

95. Novikova N.M., Pospelova I.I., Zenyukov A.I. Method of Convolution in Multicriteria Problems with Uncertainty // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. V. 56. No. 5. P. 774–795.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Антонина Валериановна Ганичева
Алексей Валерианович Ганичев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Монография

Редактор Ю.А. Якушева
Корректор Я.А. Петрова

Подписано в печать 28.03.2023		
Формат 60х84/16		Бумага писчая
Физ. печ. л. 10	Усл. печ. л. 9,3	Уч.-изд. л. 8,7
Тираж 50 экз.	Заказ № 16	С – 16

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22