

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.В. Ганичева, А.В. Ганичев

**ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ**

Монография

Тверь 2023

УДК 004:378.14
ББК 32.9:74.480.25

Рецензенты: профессор кафедры физико-математических дисциплин и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», доктор технических наук, профессор, академик РАЕН Попов П.Г.; заведующая кафедрой информатики и прикладной математики ФГБОУ ВО «Тверской государственной технической университет», кандидат технических наук, доцент Фомина Е.Е.

Ганичева А.В., Ганичев А.В. Цифровые технологии интеллектуального управления образовательным процессом: монография. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2023. 164 с.

Содержит новые цифровые технологии, модели и алгоритмы для интеллектуального управления образовательным процессом, разработанные с использованием разнообразного математического аппарата.

Предназначена для научных сотрудников, преподавателей, аспирантов, магистров и студентов технических вузов.

ISBN 978-5-7995-1267-5

© Тверской государственный
технический университет, 2023
© Ганичева А.В., Ганичев А.В., 2023

ВВЕДЕНИЕ

Современное образование должно базироваться на цифровых технологиях, особое место среди которых занимают интеллектуальные образовательные технологии (ИОТ) как самые передовые и перспективные. Ожидается, что использование искусственного интеллекта (ИИ) в сфере образования будет расти каждый год [65].

Интеллектуальные образовательные технологии – это способы (методы) создания нового интеллектуального продукта (знаний) в процессе реализации учебно-научной деятельности с помощью интеллектуальных информационных средств и систем.

Для реализации образовательных технологий требуются как человеческие, так и технические ресурсы. Учебный процесс в вузе реализуется сложной системой, основными подсистемами которой являются методическая, научная и воспитательная работа. Образовательные технологии охватывают все эти подсистемы.

Интеллектуальные информационные системы включают такие инструменты, как метод проектов, ситуационное моделирование, эволюционное программирование, методы экспертного оценивания, генетические алгоритмы. В образовании учащихся наряду с традиционными методами в настоящее время применяются методы активного, интерактивного, проблемного и контекстного обучения.

Таким образом, ИОТ выполняют важнейшую роль в развитии научного потенциала образовательных учреждений, повышении интеллектуального потенциала обучаемых, в подготовке специалистов для освоения и использования новых наукоемких технологий. Они являются основным фактором становления современного специалиста – профессионала в сфере управления научными и инновационными проектами.

Новые информационные технологии основаны на применении современных компьютерных и математических методов, систем ИИ. Особенностью современных наукоемких технологий является также то, что ни одна из них в отдельности не способна решить все задачи образовательного процесса ввиду его сложности и многогранности. Поэтому требуется их интеграция в целостную систему, поскольку совместное использование технологий дает синергетический эффект.

Технологии ИИ имеют множество областей применения, которые изменяют способы и методы обучения, делая его более доступным через использование компьютеров или интеллектуальных устройств. Искусственный интеллект также позволяет автоматизировать и ускорить решение не только учебно-воспитательных и научных задач образовательных учреждений, но и административно-хозяйственных задач.

Искусственный интеллект меняет систему документооборота в учебных заведениях, делая его электронным, четко структурированным, легко контролируемым и адаптивным. Новые технологии позволяют оцифровывать учебные материалы. С их помощью можно создавать адаптивные цифровые интерфейсы для реализации процесса обучения.

Математические методы и модели позволяют автоматизировать процесс профориентационной работы и агитации среди абитуриентов при поступлении их в вузы и другие учебные заведения [25], изменить процесс зачисления в студенты, сделав его более наглядным, справедливым, контролируемым и объективным.

Цифровые лекции, видеоконференции, форумы стали необходимым дополнением традиционных форм организации учебного процесса.

С помощью систем ИИ можно конструировать индивидуальную траекторию обучения конкретного студента, учитывая его личностные особенности и условия жизнедеятельности. Это позволит успешно преодолевать трудности, с которыми сталкивается обучаемый, оценивать текущее состояние и организовать мероприятия по мотивации его к активному усвоению знаний. Организация эффективной обратной связи позволит оказывать динамическую помощь для повышения мотивации и вовлечения обучаемых в учебный процесс.

Основными интеллектуальными информационными технологиями являются технологии экспертных систем, электронного тестирования, электронные учебники как обучающие системы [55, 56, 58, 63] и системы поддержки решения учебных задач [19, 64, 79].

Искусственный интеллект дает возможность автоматизировать процесс оценивания знаний при тестировании. Это позволяет преподавателям уделять больше времени индивидуализации обучения студентов.

В основе ИИ в образовании лежат три ключевые модели: педагогическая, модель образовательной платформы и модель обучаемого. Для построения интеллектуальной обучающей системы требуется разработка модели обучаемого, на основе которой создается программная система. Моделирование обучаемого является быстро развивающимся направлением цифровых технологий в обучении.

Современная модель обучения включает психологические, лингвистические, социологические, когнитивные, дидактические и педагогические

исследования по моделированию типологии личности и поведения обучаемого. Часть таких задач будут выполнять интеллектуальные виртуальные информационные агенты. Это объекты цифрового сервиса, внедряемые в образовательный процесс. Виртуальные агенты могут помочь организовать интерактивное взаимодействие с учащимися, наладить диалог. Данные элементы интеллектуальной системы обучения базируются на облачных технологиях.

Использование систем ИИ вызывает объективные и субъективные трудности. Например, такие системы не всегда могут объяснить свое решение, поскольку руководствуются заложенным в них человеком сводом правил. Среди трудностей практического применения систем ИИ можно отметить отсутствие соответствующей нормативной базы и стандартов использования технологий ИИ, необходимость работы с большими массивами и базами данных (знаний) в учебном процессе. Искусственный интеллект в ряде случаев дает возможность индивиду (личности) переложить ответственность за свои действия на роботов (алгоритмы, интеллектуальных агентов), а также их разработчиков. Создание совместных баз данных, а также открытых платформ образования потребует разработки социально-психологических технологий формирования не только межличностного, но и межгруппового общения и доверия. Следует отметить, что к надежности и результатам работы систем ИИ предъявляются более высокие требования, чем к человеку в аналогичных ситуациях. Завышенные ожидания в отношении всеобъемлющего и повсеместного применения ИОТ могут смениться разочарованием, что существенно снизит доверие к цифровой индустрии. Для решения данной проблемы необходимо обучение кадров, умеющих работать с системами ИИ (они должны иметь соответствующее математическое и компьютерное образование, навыки работы в области алгоритмизации и программирования, интеллектуального анализа многомерных данных и других приложений, связанных с ИИ).

Отметим некоторые перспективные направления развития наукоемких технологий в сфере образования [69]:

- 1) системное представление и анализ деятельности образовательного учреждения путем электронного документооборота;
- 2) системная увязка и согласование разнородных, с точки зрения используемого математического аппарата, моделей составляющих учебного процесса;
- 3) разработка моделей оценки качества обучения;
- 4) разработка математических моделей оптимальной организации и управления учебно-воспитательным процессом;

5) учет типологии обучаемых и преподавателей на основе их учебно-психологических портретов, оптимальное сочетание индивидуальных особенностей обучаемых, классификация групп обучаемых;

6) оценка качества обучения с применением логического, векторного, матричного и вероятностного методов, в том числе аппарата нечетких множеств;

7) разработка эконометрических моделей исследования зависимостей качества обучения от различных факторов.

8) индексный метод анализа структурных компонент и показателей качества учебного процесса;

9) графово-онтологический и структурно-гармонический методы анализа качества обучения;

10) исследование методов формирования компетенций и оценки компетентности обучаемых;

11) интеллектуальные информационные системы оптимального контроля знаний.

Дальнейшая разработка интеллектуальных технологий образования является важным фактором развития технологий, работающих как при четкой, так и при нечеткой информации. Перспективным направлением цифровизации является комплексное использование различных технологий.

Для того чтобы технологии ИИ в образовании были максимально эффективны, следует разработать надежные и достоверные индикаторы, включающие в себя оценку трудноизмеримых характеристик, таких как творчество и любопытство, запоминание и забывание, а также позволяющие определить фундаментальное влияние, которое эти характеристики оказывают на процесс обучения и его результаты.

Предлагаемая монография содержит материалы по новому, важному и актуальному направлению научных исследований – разработке и применению цифровых технологий в образовании и прежде всего интеллектуального управления образовательным процессом.

Авторы выражают большую признательность рецензентам – Павлу Георгиевичу Попову и Елене Евгеньевне Фоминой.

ГЛАВА 1

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К УПРАВЛЕНИЮ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ

§ 1.1. Инновационная система управления вузом

Целью учебного процесса в вузе является подготовка высококвалифицированных специалистов, всесторонне развитых, конкурентоспособных, социально адаптированных, воспитанных в духе гуманизма и патриотизма. В [46] был рассмотрен вопрос развития гражданского общества в России средствами образовательного процесса. Модели учебного процесса широко и детально освещены, например, в работах авторов [18, 23, 24, 33, 44]. Вопросы, задачи и проблемы, связанные с развитием гражданского общества и образовательным процессом, исследуются и всесторонне дискутируются. Некоторые аспекты рассмотрены в [94, 97, 113, 117]. В данной главе мы рассмотрим типовую систему управления вузом, построим дерево целей и граф структуры управления вузом, опишем функциональную схему работы вуза и критерии функционирования системы, определим скалярное и векторное поле критериев, на основе которых получим метод оценки весовых коэффициентов критериев.

Сначала сформулируем основные цели функционирования данной системы.

1.1.1. Система управления и дерево целей

Обозначим через S основную цель высшего учебного заведения, которая заключается в подготовке высококвалифицированных специалистов с широким кругозором интересов, конкурентоспособных и социально адаптированных. Для достижения основной цели должны быть достигнуты следующие промежуточные цели:

S_1 : проведение профильной структуры подготовки специалистов в соответствии с запросами государства, потребностями рынка труда, динамикой и перспективами развития экономики и социальной сферы Тверского региона, демографическими процессами. Цель S_1 связана с реализацией учебного плана (подцель S_{11}), развитием договорных отношений с работодателями (подцель S_{12}), открытием новых специальностей (S_{13}), агитационными мероприятиями по привлечению абитуриентов (S_{14});

S_2 : разработка учебных планов образовательных программ и учебно-методических комплексов (УМК) в соответствии с требованиями ФГОС (федерального государственного образовательного стандарта), потребностями рынка труда, перспективами развития социально-производственной сферы, внедрение образовательных стандартов нового поколения. Цель S_2 направлена на реализацию государственных стандартов (подцель S_{21}), создание и обновление соответствующих учебных планов (S_{22}), УМК (S_{23}), совершенствование форм аттестации студентов (S_{24});

S_3 : осуществление воспитательного процесса, создание условий для гармоничного развития личности и реализации ее творческого потенциала. Данная цель связана с совершенствованием различных форм воспитательной работы, осуществляемой деканатами (S_{31}), кураторами (S_{32}), преподавателями (S_{33}), психологической службой (S_{34}), студенческими советами (S_{35});

S_4 : развитие научно-исследовательской работы преподавательского коллектива и студентов. Предполагается участие в научных конференциях (S_{41}), симпозиумах (S_{42}), выставках (S_{43}), грантах (S_{44}), публикации (S_{45}), защита диссертаций (S_{46}).

S_5 : формирование эффективной системы управления вузом, предполагающей формирование эффективных механизмов взаимодействия вуза с социальными партнерами (S_{51}), а также развитие студенческого самоуправления (S_{52});

S_6 : совершенствование системы социально-экономической поддержки студентов (S_{61}) и сотрудников вуза (S_{62});

S_7 : реализация связи вуза с другими вузами и возможными социальными партнерами. Цель S_7 связана с участием сотрудников (S_{71}) и обучающихся (S_{72}) в различных проектах, в том числе международных.

1.1.2. Анализ структуры системы управления вузом

Дерево целей показано на рис. 1.1. Перечисленные цели достигаются в результате деятельности соответствующих звеньев структуры системы управления вузом (рис. 1.2).

Построенная система целей представляет собой трехуровневую иерархичную систему, для которой должны выполняться принципы координированности и согласованности целей разных уровней [50]. Одной из основных характеристик системы является ее *целостность*,

определяемая показателем $C = \frac{M_\phi}{M_{\max}}$, где M_ϕ – фактическое число связей между элементами в системе; M_{\max} – максимальное возможное число

связей, равное m^2 для системы из m элементов, т. е. 33^2 для рассматриваемой системы; M_ϕ , согласно рис. 1.1, составляет 32 связи. Исходя из этого показатель целостности $C = \frac{32}{33^2} \approx 0,03$, т. е. система распадается на отдельные независимые подсистемы.

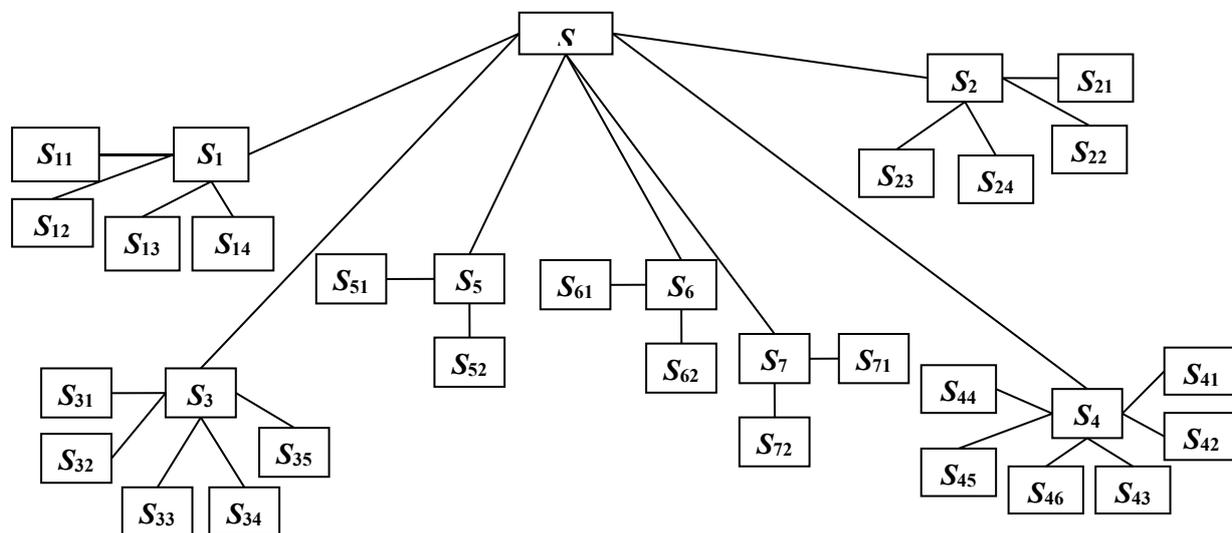


Рис. 1.1

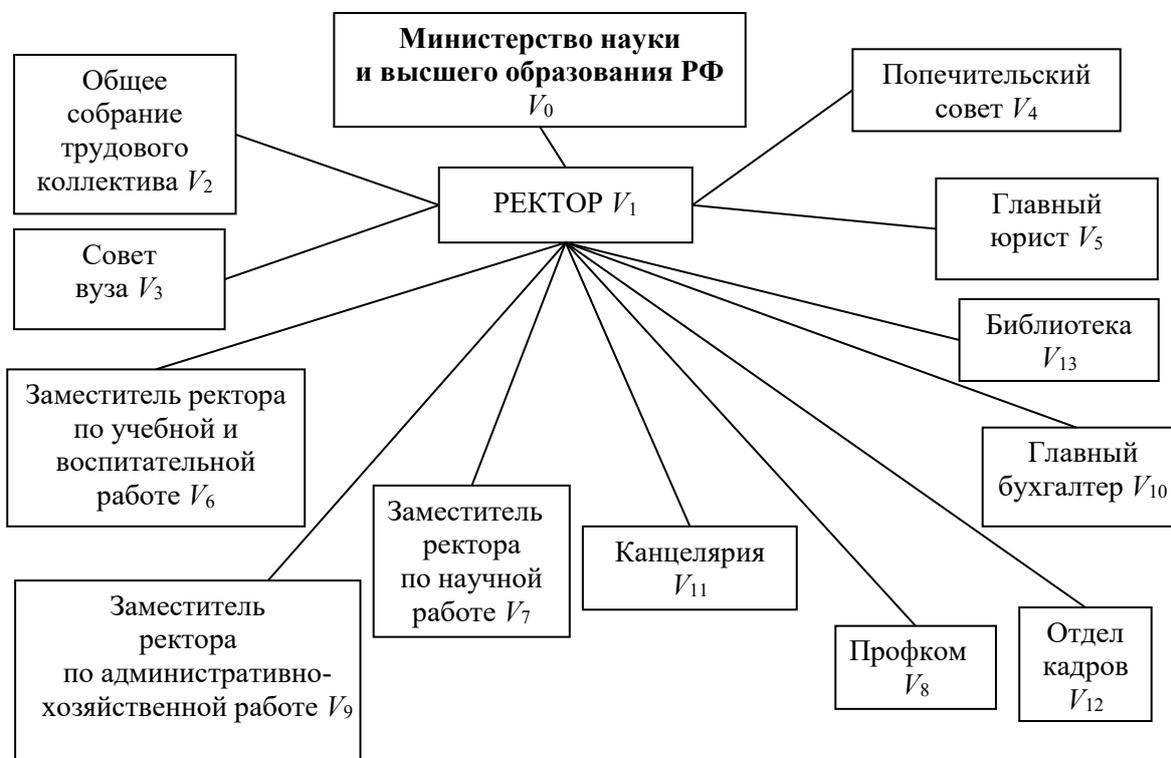


Рис. 1.2

Данная система по определению многофункциональна, обладает свойством *оптимальности*, поскольку хорошая организация работы вуза обеспечивает выполнение запланированных целей при наилучшем использовании структуры, подборе кадров и т. п. Это *мультипликативная* система, поскольку результаты некоторых свойств определяются умножением относительного свойства каждого звена. Так, например, вероятность своевременного выполнения данной работы подсистемой равна произведению вероятностей выполнения соответствующих работ звеньями данной подсистемы.

Система целей обладает *синергетическим свойством*, заключающимся в том, что эффективность системы в целом больше суммы эффективностей ее подсистем, и вытекающим из принципов согласованности и координируемости данной иерархической системы.

Структура управления на уровне заместителей по учебно-воспитательной и научной работе показана соответственно на рис. 1.3 и 1.4. В каждом прямоугольнике поставлена буква *V* с соответствующим индексом, которая является именем данного структурного звена.

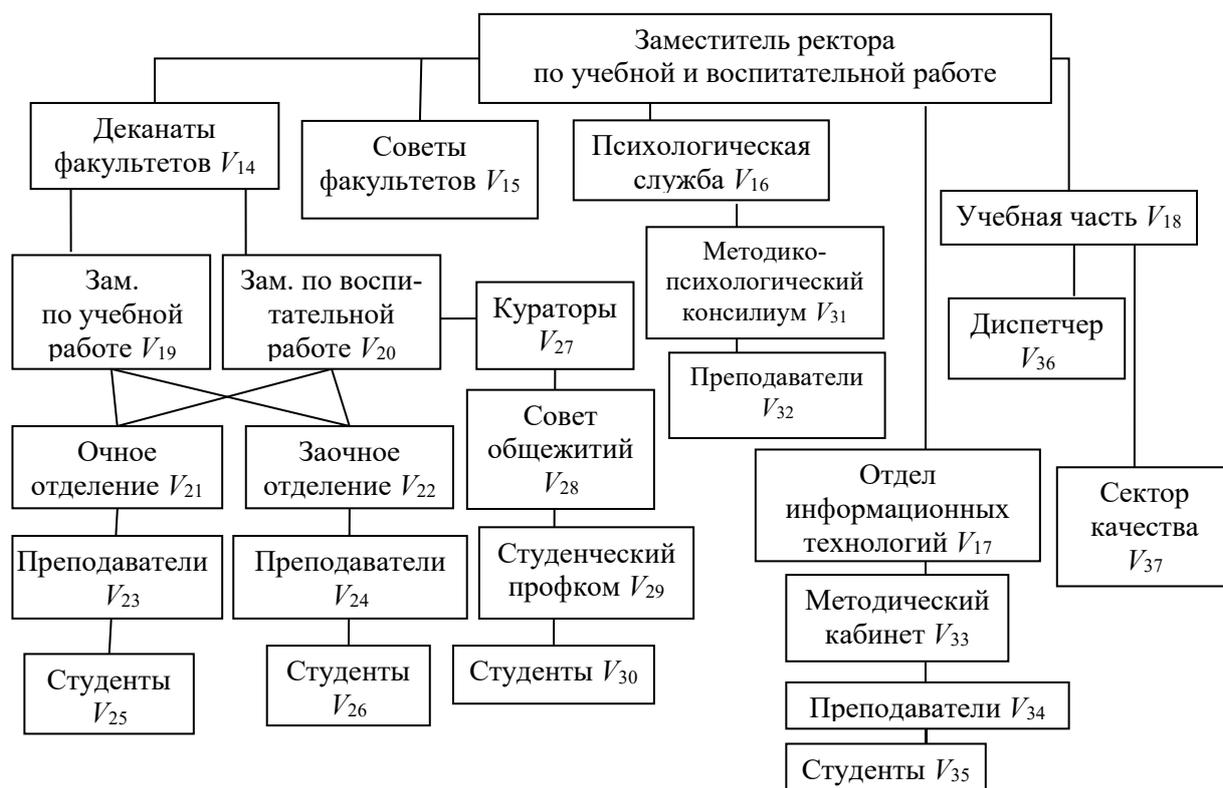


Рис. 1.3



Рис. 1.4

Структура управления главного бухгалтера и заместителя по административно-хозяйственной части представлена на рис. 1.5 и 1.6 соответственно.



Рис. 1.5

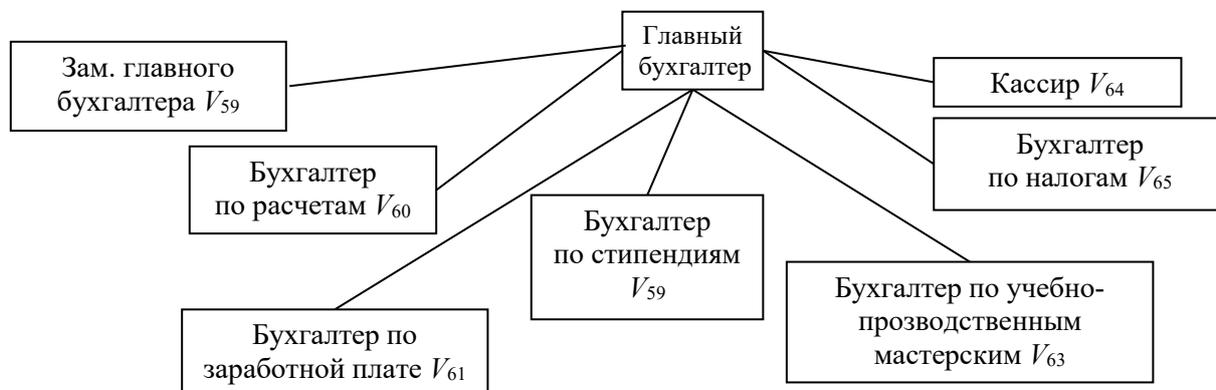


Рис. 1.6

Графическое изображение рассмотренной структуры управления показано на рис. 1.7. Заметим, что показанные на рис. 1.2–1.7 структуры управления представляют собой иерархические системы, обладающие свойствами многофункциональности, мультипликативности, синергичности.

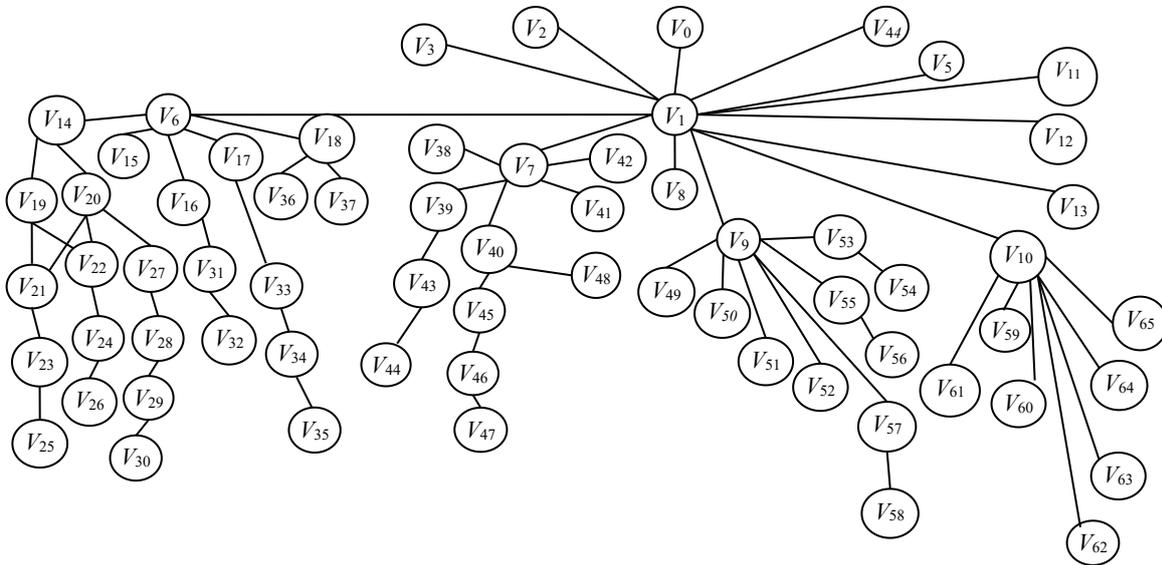


Рис. 1.7

Граф имеет 66 вершин. Матрица смежности $A = (a_{ij})$ представляет собой симметрическую квадратную матрицу порядка 66, у которой $a_{01} = 1$; $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = a_{18} = a_{19} = a_{1,10} = a_{1,11} = a_{1,12} = a_{1,13} = 1$; $a_{6,14} = a_{6,15} = a_{6,16} = a_{6,17} = a_{6,18} = 1$; $a_{7,38} = a_{7,39} = a_{7,40} = a_{7,41} = a_{7,42} = 1$; $a_{9,49} = a_{9,50} = a_{9,51} = a_{9,52} = a_{9,53} = a_{9,55} = a_{9,57} = 1$; $a_{10,59} = a_{10,60} = a_{10,61} = a_{10,62} = a_{10,63} = a_{10,64} = a_{10,65} = 1$; $a_{14,19} = a_{14,20} = 1$; $a_{19,21} = a_{19,22} = 1$; $a_{20,21} = a_{20,22} = a_{20,27} = 1$; $a_{27,28} = 1$; $a_{16,31} = 1$; $a_{18,36} = a_{18,37} = 1$; $a_{39,43} = 1$; $a_{40,45} = a_{40,48} = 1$; $a_{53,54} = 1$; $a_{55,56} = 1$; $a_{57,58} = 1$; $a_{43,44} = 1$; $a_{31,32} = 1$; $a_{27,28} = 1$; $a_{28,29} = 1$; $a_{29,30} = 1$; $a_{22,24} = 1$; $a_{24,26} = 1$; $a_{45,46} = 1$; $a_{46,47} = 1$; $a_{21,23} = 1$; $a_{23,25} = 1$; остальные элементы равны 0.

Матрица инцидентности $B = (b_{ij})$ данного графа имеет 66 строк и 65 столбцов. Количество столбцов определяется, очевидно, количеством ненулевых элементов матрицы A . При этом $b_{ij} = 1$ тогда и только тогда, если существует такое k , что $a_{ik} = 1$ или $a_{kj} = 1$ и ребро $U_j = (V_i, V_k)$. Граф представлен в виде древовидной структуры $G(V, U)$, где $V = \{V_0, \dots, V_{65}\}$ – множество вершин графа; $U = \{U_1, \dots, U_{65}\}$ – множество ребер графа.

Обратим внимание на главную диагональ матрицы: она состоит из одних нулей. Это говорит о том, что граф не имеет петель. Следовательно, каждая его вершина не замкнута сама на себе, а имеет выход. По матрице смежности мы можем судить о взаимосвязях и непосредственной связи

отдельных элементов системы. Не будем перечислять каждую пару смежных элементов, а в качестве примера ограничимся следующими 5 связями, как наиболее важными: V_0 и V_1 , V_1 и V_2 , V_1 и V_3 , V_1 и V_4 , V_1 и V_5 . Иными словами, ректор имеет непосредственную связь с Министерством науки и высшего образования РФ, с общим собранием трудового коллектива, с Советом вуза, с попечительским советом и главным юристом. По матрице смежности можно определить степень любой вершины, т. е. количество смежных связей этой вершины. Так, степень вершины V_1 равна 13. Аналогичным образом анализируются связи любой вершины.

Граф можно ориентировать, например, следующим образом. Из вершины V_i идет дуга V_j , если структурное подразделение, соответствующее вершине V_j , находится в непосредственном подчинении у структурного звена, обозначенного вершиной V_i . Для количественной оценки структурной компактности рассматривается минимальная длина пути из V_i в V_j , строится матрица кратчайших путей для всех пар вершин графа [8] и вводится показатель структурной близости Q , равный сумме всех элементов матрицы кратчайших путей. Не нарушая общности, рассмотрим данный показатель для подсистемы «Деканаты» (вершина V_{14}).

Сумма кратчайших путей будет равна 84, имеем 12 вершин. Тогда для характеристики связности ориентированного графа вводится матрица сильной связности, элемент S_{ij} который равен 1 тогда и только тогда, когда из вершины V_i идет маршрут в вершину V_j . Для неориентированного графа подобная матрица называется матрицей связности. Для рассматриваемого графа для всех висячих вершин элементы матрицы равны 0, для V_0 и V_1 все элементы S_{0i} и S_{1i} равны 1.

Из рис. 1.7 видно, что граф распадается на 4 независимых подграфа с вершинами V_6 , V_7 , V_8 , V_9 , и V_{10} . Для каждой из этих вершин в своем подграфе соответствующие элементы S_{ij} равны 1, связь с элементами других подсистем отсутствует, поэтому в этом случае соответствующие элементы равны 0. Внутри каждого подграфа связь определяется согласно наличию пути из одной вершины в другую. Соединив в одну вершину все вершины, соответствующие структурному звену «студенты», получим сеть с истоком в вершине V_0 и стоком в объединенной вершине «студенты». Граф при этом можно считать нагруженным, если в качестве весов рассматривать, например, время выполнения распоряжения, поступающего из структурного звена V_i в структурное звено V_j , либо сложность выполнения. Тогда можно определить поток сети. В этом случае граф можно рассматривать как информационный.

1.1.3. Отношение элементов системы

Опишем систему и ее функционирование с помощью теоретико-множественных отношений. Определим граф $G(V, T)$, где $V = \{V_0, \dots, V_{65}\}$ – множество вершин графа (т. е. множество элементов системы), $T: V \rightarrow V$ – как бинарное отношение R на множестве V .

Имеем $R = \{(V_0, V_1), (V_1, V_2), (V_1, V_3), (V_1, V_4), (V_1, V_5), (V_1, V_6), (V_1, V_7), (V_1, V_8), (V_1, V_9), (V_1, V_{10}), (V_1, V_{11}), (V_1, V_{12}), (V_1, V_{13}), (V_6, V_{14}), (V_6, V_{15}), (V_6, V_{16}), (V_6, V_{17}), (V_6, V_{18}), (V_7, V_{38}), (V_7, V_{39}), (V_7, V_{40}), (V_7, V_{41}), (V_7, V_{42}), (V_9, V_{49}), (V_9, V_{50}), (V_9, V_{51}), (V_9, V_{52}), (V_9, V_{53}), (V_9, V_{55}), (V_{53}, V_{54}), (V_{55}, V_{56}), (V_{57}, V_{58}), (V_9, V_{57}), (V_{10}, V_{59}), (V_{10}, V_{60}), (V_{10}, V_{61}), (V_{10}, V_{62}), (V_{10}, V_{63}), (V_{10}, V_{64}), (V_{10}, V_{65}), (V_{14}, V_{19}), (V_{14}, V_{20}), (V_{17}, V_{33}), (V_{33}, V_{34}), (V_{34}, V_{35}), (V_{19}, V_{21}), (V_{19}, V_{22}), (V_{20}, V_{21}), (V_{20}, V_{22}), (V_{20}, V_{27}), (V_{16}, V_{31}), (V_{31}, V_{32}), (V_{21}, V_{23}), (V_{23}, V_{25}), (V_{22}, V_{24}), (V_{24}, V_{26}), (V_{27}, V_{28}), (V_{28}, V_{29}), (V_{29}, V_{30}), (V_{18}, V_{36}), (V_{18}, V_{37}), (V_{39}, V_{43}), (V_{43}, V_{44}), (V_{40}, V_{45}), (V_{45}, V_{46}), (V_{46}, V_{47}), (V_{40}, V_{48})\}$.

Ориентируем граф в отношении R – «начальник – подчиненный». Исследуем бинарное отношение R на рефлексивность, симметричность и транзитивность.

1. *Рефлексивность.* Отношение R не является рефлексивным, так как условия « V_i – начальник V_i » не выполняются. Отношение R является антирефлексивным, поскольку « V_i – не начальник V_i » выполняется для любого V_i из V .

2. *Симметричность.* Отношение R не является симметричным, так как из того, что V_i – начальник V_j , не следует, что V_j – начальник V_i . Отношение R является антисимметричным, так как если V_i – начальник V_j и V_j – начальник V_i , то $V_i = V_j$.

3. *Транзитивность.* Отношение R является транзитивным, так как если V_i – начальник V_j и V_j – начальник V_k , то V_i – начальник V_k .

Итак, отношение R является антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным. Таким образом, на основе этого вывода мы можем сказать, что элементы системы находятся в отношении доминирования в общем случае или более частном случае – в отношении строгого порядка, с помощью которого описывается функционирование системы.

Граф на рис. 1.7 определяет также антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение «часть – целое», где либо целое – система, часть – любая ее подсистема или элемент, либо целое – подсистема, часть – любой ее элемент, а также антирефлексивное симметричное и транзитивное отношение «обмен информацией» между структурными звеньями.

Для введенных отношений применим индексный метод менеджмента учебного процесса, разработанный в [18], т. е. для этих отношений можно определить индексы структурного статуса и структурной экспансии, а также групповые индексы, характеризующие степень связанности структурных звеньев согласно введенному отношению. Можно также определить аналитические индексы состава рассматриваемой системы. Для этого вес каждого структурного звена будем определять по его значимости в работе всей системы в целом, а объем будем характеризовать, например, числом сотрудников в данном структурном звене. Тогда важность данного звена будет равна произведению его веса на объем.

Опишем функциональную схему высшего учебного заведения.

1.1.4. Функциональная схема системы

Функциональная схема вуза показана на рис. 1.8:

F_1 – учредитель;

F_2 – глава, организует работу вуза и несет ответственность за его состояние и деятельность перед министерством и трудовым коллективом;

F_3 – общее собрание трудового коллектива – главный руководящий орган. Решает основные вопросы жизнедеятельности вуза: определяет стратегию его развития, рассматривает и утверждает перспективные и годовые планы и отчеты, договоры с социальными партнерами;

F_4 – Совет вуза – высший орган самоуправления, который создается как форма общественно-государственного руководства с целью развития коллегиальных демократических форм управления учебным заведением;

F_5 – попечительский совет – одна из форм самоуправления. Основной целью попечительского совета является содействие функционированию и развитию вуза: совершенствование содержания образовательных программ и организации образовательного процесса, материально-технической базы, обеспечение социальной защиты обучающихся и сотрудников, поддержка инновационной и научно-исследовательской деятельности;

F_6 – главный юрист – проводит консультирование и контролирует соблюдение правовых норм;

F_7 – заместитель ректора по учебной и воспитательной работе – обеспечивает организацию и контроль образовательного процесса, несет ответственность за качество подготовки специалистов;

F_8 – заместитель ректора по научной работе – осуществляет функции планирования и научно-методического обеспечения образовательного процесса на основе инновационных технологий, разрабатывает и руководит экспериментальной и научно-исследовательской работой преподавателей и студентов;

F_9 – заместитель ректора по административно-хозяйственной работе – отвечает за хозяйственную деятельность вуза, организует материально-экономическое обеспечение его работы;

F_{10} – главный бухгалтер – несет непосредственную ответственность за финансовое состояние вуза;

F_{11} – отдел кадров – составляет штатное расписание и осуществляет контроль за его выполнением.

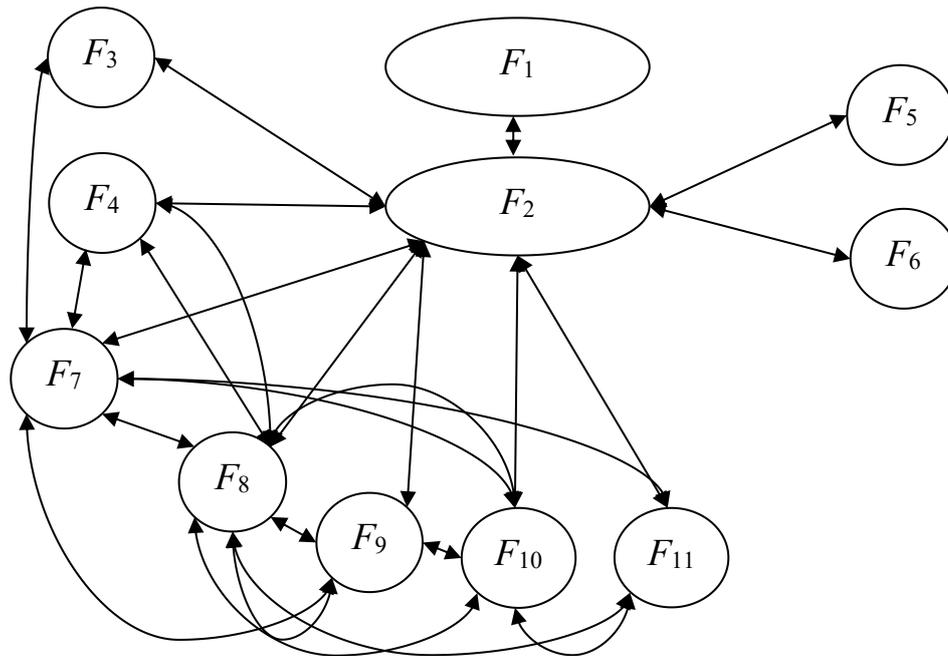


Рис.1.8

Сформулируем основные критерии функционирования рассматриваемой системы.

1.1.5. Критерии функционирования системы

Основываясь на системе целей, выделим критерии функционирования системы управления вузом.

Основная цель S связана с критерием K оценки качества подготовки высококвалифицированных конкурентоспособных специалистов.

Цель S_1 оценивается по критерию K_1 трудоустройства выпускников. Критерий K_2 характеризует итоги выпускных квалификационных экзаменов. По этому критерию оценивается выполнение второй цели.

Цель S_3 связана с критериями K_3 и K_4 психологических показателей личностного и профессионального состояния студентов и сотрудников соответственно.

Критерии K_5 и K_6 служат для оценки научно-исследовательской работы студентов и преподавателей соответственно.

Цель S_5 оценивается по критериям K_7 и K_8 (результаты работы управленческого аппарата) и критерию K_8 (результат студенческого самоуправления).

Цель S_6 связана с критерием K_9 по оценке системы социально-экономической поддержки студентов и сотрудников.

Цель S_7 оценивается по критерию K_{10} участия в реализуемых международных проектах.

1.1.6. Скалярное и векторное поле критериев

Каждый критерий K_i ($i = \overline{1,10}$) представляет собой некоторую функцию $K_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящую от переменных (факторов) x_1, x_2, \dots, x_n , причем в некоторых случаях зависимость от переменных может быть фиктивной.

Пусть λ_i – вес критерия K_i . Критерий K , характеризующий глобальную цель, можно рассматривать как сумму остальных критериев с соответствующими весами, т. е.

$$K = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i K_i. \quad (1.1)$$

Таким образом, векторы $(K_1, K_2, \dots, K_{10})$ порождают скалярное поле $K(K_1, K_2, \dots, K_{10})$. Для характеристики этого поля рассматривают поверхности уровня $K(K_1, K_2, \dots, K_{10}) = C$, где C – произвольная константа, а градиент K определяется как

$$\text{grad}K = \left(\frac{\partial K}{\partial K_1}, \frac{\partial K}{\partial K_2}, \dots, \frac{\partial K}{\partial K_{10}} \right) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}). \quad (1.2)$$

Градиент показывает направление наискорейшего возрастания функции K , а длина его равна скорости возрастания функции в данном направлении. Поверхность уровня для каждого значения C характеризует множество наборов значений аргументов (критериев) K_i ($i = \overline{1,10}$) с одинаковым значением критерия, равным C . Для рассматриваемого критерия $\text{grad}K$ в любой точке имеет одно и то же направление и одну и ту же длину, определяемые весами критериев (1.2).

Для оценки «чувствительности» K к изменениям критериев K_i можно использовать эластичность K по этим критериям.

Отметим, что скалярное поле $K(K_1, K_2, \dots, K_{10})$ порождает векторное поле $\vec{K}(K_1, K_2, \dots, K_{10})$, которое характеризуется векторными линиями.

§ 1.2. Системный подход к процессу получения и формирования знаний

Во всех учебных заведениях основной задачей всегда было повышение качества обучения. В настоящее время много говорят и спорят о способах повышения эффективности образовательного процесса. В частности, большое внимание уделяется системным исследованиям оценки компетентности студентов [3], тестовым технологиям [17, 109], оптимальной организации учебных мероприятий [23], менеджменту качества обучения [21], математическому моделированию воспитательного процесса [78], информатизации образовательного процесса [104], развитию инновационного мышления [82], формированию компетенций [43, 45].

Цель данного параграфа заключается в разработке математической модели системного описания процесса корректировки неправильно понятых фрагментов учебного материала. Для этого решаются следующие задачи:

1. Построение размеченных графов состояний для систем правильно и неправильно понятых фрагментов.

2. Получение системы дифференциальных неравенств относительно средних численностей правильно и неправильно понятых фрагментов, не откорректированных к данному моменту.

3. Решение и анализ полученной системы.

Фрагментами данного параграфа (темы, раздела, дисциплины) будем называть категории, свойства, методы. Рассмотрим процесс получения и формирования знаний у обучаемого.

Пусть $A^{(1)}_1, A^{(1)}_2, \dots, A^{(1)}_{n1}$ – фрагменты, которые должен усвоить обучаемый за данный период. Общеизвестно, что есть правильное понимание указанных фрагментов и существуют различные варианты неверного толкования. Через $A^{(2)}_1, A^{(2)}_2, \dots, A^{(2)}_{n2}$ обозначим те же фрагменты, а также связанные с ними некоторые фрагменты предыдущей темы, но в восприятии самого обучаемого. Одни из них могут быть неверными, а другие вообще могут отсутствовать (например, в результате пропуска соответствующего занятия).

Для простоты будем обозначать их соответственно как «правильные фрагменты» и «ложные фрагменты» (сокращенно ПФ и ЛФ). Правильное толкование каждого фрагмента $A_i^{(1)}$ может повторяться за период изучения темы неоднократно: во время чтения лекций, проведения практических (самостоятельных) занятий. При этом неправильное восприятие $A_i^{(2)}$ также может неоднократно повторяться.

С каждой категорией, каждым свойством и методом связано множество сопутствующих понятий, свойств, методов, пояснений, таблиц, рисунков, диаграмм, которые рассматриваются во времени. Будем называть такое множество *потоком информации* для усвоения соответствующей категории, соответствующего свойства, метода и т. п. Конечно, поток фрагмента определяется неоднозначно: для разных обучаемых по-разному. Каждого обучающегося можно рассматривать как систему, на вход которой поступают информационные потоки фрагментов $A_i^{(1)}$, преобразуемые в информационные потоки фрагментов $A_i^{(2)}$ (рис. 1.9).

Потоки будем считать *пуассоновскими*, т. е. за малый промежуток времени появляется не более одной единицы потока (такой единицей можно считать слово), в непересекающиеся промежутки времени единицы потока поступают независимо. В силу этого усвоение учебного материала каждым обучаемым можно считать марковским процессом, при котором будущее предопределяется только настоящим и не зависит от предыстории.



Рис. 1.9

Поток ПФ (ЛФ) связан с данным ЛФ (ПФ), если в нем содержится информация (понятия, правила и т. п.), связанные с этим ЛФ (ПФ). Плотность потока i -го ($i = \overline{1, n_1}$) ПФ, связанного с j -м ЛФ, в момент времени t будем обозначать через $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$, плотность потока j -го ($j = \overline{1, n_2}$) ЛФ, связанного с i -м ПФ, – через $\lambda_{ij}^{(2)}(t)$. В процессе обучения при неправильном усвоении данного ПФ в восприятии обучаемого происходит замена этого ПФ на соответствующий ЛФ. Поэтому необходимо, чтобы этот ПФ был разъяснен либо преподавателем, либо другими учащимися, либо откорректирован при помощи литературных источников или

самостоятельного обдумывания и анализа. При этом, несмотря на все приложенные усилия, возможна ситуация, когда с первой попытки ЛФ в

сознании обучаемого не будет исправлен на соответствующий ПФ. Новая возможность предоставляется на следующих лекциях, практических занятиях, консультациях и т. п.

Факт перехода от ЛФ к ПФ будем называть *корректировкой* ЛФ соответствующим ПФ. При этом можно считать, что каждый ПФ корректирует любой ЛФ с некоторой вероятностью (она может быть и нулевой), зависящей от времени. Для i -го ПФ и j -го ЛФ примем значение вероятности $p_{ij}^{(1)}(t)$. Для обучаемого это означает переосмысление соответствующего ЛФ и замену его на достигнутый ПФ. В противном случае с вероятностью $1 - p_{ij}^{(1)}(t)$ в его восприятии останется ЛФ.

Поток каждого ПФ $A_i^{(1)}$ с плотностью $\lambda_{ij}^{(1)}(t) \cdot p_{ij}^{(1)}(t)$ будет пуассоновским, так как он получается разряжением потока с плотностью $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$. Сумма всех таких потоков для всех ПФ также будет пуассоновским потоком. Аналогично и для ЛФ: переход от i -го ПФ к j -му ЛФ происходит с вероятностью $p_{ij}^{(2)}(t)$, называется корректировкой данного ПФ соответствующим ЛФ и осуществляется под воздействием потока j -го ЛФ с плотностью $\lambda_{ij}^{(2)}(t) \cdot p_{ij}^{(2)}(t)$.

Совокупность ПФ образует систему 1, которая в любой момент времени t может находиться в одном из возможных состояний $E_k^{(1)}$, где k – число неоткорректированных ПФ на момент t ($k = 0, 1, \dots, n_1$).

Размеченный граф состояний системы 1 показан на рис. 1.10. Здесь $\Lambda_k^2(t)$ – плотность потока ЛФ, переводящего систему из состояния $E_{n_1-k+1}^{(1)}$ в состояние $E_{n_1-k}^{(1)}$.

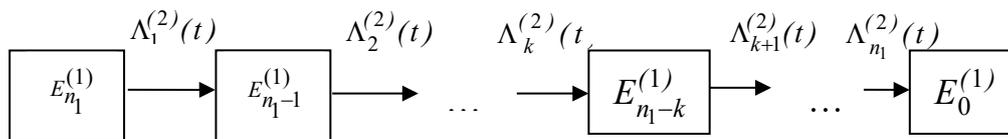


Рис. 1.10

Аналогичную систему (систему 2) образуют ЛФ. Эта система в любой момент времени t может находиться в одном из возможных состояний $E_k^{(2)}$, где k – число неоткорректированных ЛФ на момент t ($k = 0, 1, \dots, n_2$). Размеченный граф состояний этой системы изображен на рис. 1.11.

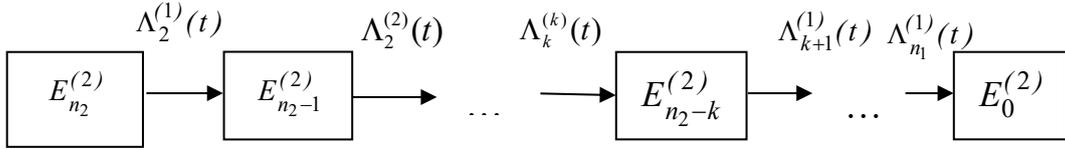


Рис. 1.11

На этом рисунке $\Lambda_k^{(1)}(t)$ – плотность потока ПФ, переводящего систему из состояния $E_{n_2-k+1}^{(2)}$ в состояние $E_{n_2-k}^{(2)}$. Пусть $P_k^{(1)}(t)$ обозначает вероятность того, что система, представленная на рис. 1.10, находится в состоянии $E_{n_1-k}^{(1)}(t)$, а $P_k^{(2)}(t)$ – вероятность того, что система, представленная на рис. 1.11, находится в состоянии $E_{n_2-k}^{(2)}$.

Система уравнений Колмогорова для графов, изображенных на рис. 1.10 и 1.11, запишется соответственно в виде:

$$\frac{dP_{n_1}^{(1)}(t)}{dt} = -\Lambda_1^{(2)}(t) P_{n_1}^{(1)}(t);$$

$$\frac{dP_{n_1-k}^{(1)}(t)}{dt} = -\Lambda_{k+1}^{(2)}(t) P_{n_1-k}^{(1)}(t) + \Lambda_k^{(2)}(t) P_{n_1-k+1}^{(1)}(t), \quad k = \overline{1, n_1-1}; \quad (1.6)$$

$$\frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt} = \Lambda_{n_1}^{(2)}(t) P_1^{(1)}(t);$$

$$\frac{dP_{n_2}^{(2)}(t)}{dt} = -\Lambda_1^{(1)}(t) P_{n_2}^{(2)}(t);$$

$$\frac{dP_{n_2-k}^{(2)}(t)}{dt} = -\Lambda_{k+1}^{(1)}(t) P_{n_2-k}^{(2)}(t) + \Lambda_k^{(1)}(t) P_{n_2-k+1}^{(2)}(t), \quad k = \overline{1, n_2-1}; \quad (1.7)$$

$$\frac{dP_0^{(2)}(t)}{dt} = \Lambda_{n_2}^{(1)}(t) P_1^{(2)}(t).$$

Теперь преобразуем систему 1 (аналогичные преобразования будут иметь место и для системы 2).

Умножим каждое уравнение системы 1 на число неоткорректированных к данному моменту ПФ и сложим полученные результаты:

$$\begin{aligned}
& n_1 \frac{dP_{n_1}^{(1)}(t)}{dt} + (n_1 - 1) \frac{dP_{n_1-1}^{(1)}(t)}{dt} + \dots + 1 \frac{dP_1^{(1)}(t)}{dt} + 0 \frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt} = \\
& = -\Lambda_1^{(2)}(t) n_1 P_{n_1}^{(1)}(t) - \Lambda_2^{(2)}(t) (n_1 - 1) P_{n_1-1}^{(1)}(t) + \Lambda_1^{(2)}(t) (n_1 - 1) P_{n_1}^{(1)}(t) - \\
& - \Lambda_3^{(2)}(t) (n_1 - 2) P_{n_1-2}^{(1)}(t) + \Lambda_2^{(2)}(t) (n_1 - 2) P_{n_1-1}^{(1)}(t) - \Lambda_4^{(2)}(t) (n_1 - 3) P_{n_1-3}^{(1)}(t) + \\
& + \Lambda_3^{(2)}(t) (n_1 - 3) P_{n_1-2}^{(1)}(t) - \dots - \Lambda_{n_1-2}^{(2)}(t) 3 P_3^{(1)}(t) + \Lambda_{n_1-3}^{(2)}(t) 3 P_4^{(1)}(t) - \\
& - \Lambda_{n_1-1}^{(2)}(t) 2 P_2^{(1)}(t) + \Lambda_{n_1-2}^{(2)}(t) 2 P_3^{(1)}(t) - \Lambda_{n_1}^{(2)}(t) P_1^{(1)}(t) + \Lambda_{n_1-1}^{(2)}(t) P_2^{(1)}(t),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[n_1 P_{n_1}^{(1)}(t) + (n_1 - 1) P_{n_1-1}^{(1)}(t) + \dots + P_1^{(1)}(t) \right] = \\
& = -\Lambda_1^{(2)}(t) P_{n_1}^{(1)}(t) - \Lambda_2^{(2)}(t) P_{n_1-1}^{(1)}(t) - \Lambda_3^{(2)}(t) P_{n_1-2}^{(1)}(t) - \dots - \Lambda_{n_1}^{(2)}(t) P_1^{(1)}(t).
\end{aligned}$$

В квадратных скобках стоит математическое ожидание числа ПФ, не откорректированных к моменту t . Обозначим это число через $m_1(t)$, тогда последнее равенство преобразуется к виду

$$m_1(t) = - \sum_{k=1}^{n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) P_{n_1-k+1}^{(1)}(t). \quad (1.8)$$

Преобразуем правую часть равенства (1.8):

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) P_{n_1-k+1}^{(1)}(t) = - \min_k \Lambda_k^{(2)}(t) \sum_{k=1}^{n_1} P_{n_1-k+1}^{(1)}(t) = \\
& = - \min_k \Lambda_k^{(2)}(t) (1 - P_0^{(1)}(t))
\end{aligned}$$

В то же время

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) P_{n_1-k+1}^{(1)}(t) = - \max_k \Lambda_k^{(2)}(t) (1 - P_0^{(1)}(t)).$$

Отсюда

$$- \max_k \Lambda_k^{(2)}(t) (1 - P_0^{(1)}(t)) \leq m_1(t) \leq - \min_k \Lambda_k^{(2)}(t) (1 - P_0^{(1)}(t)). \quad (1.9)$$

Разумно исходить из того, что преподаватель не допустит ситуацию, когда все ПФ у данного обучаемого будут откорректированы и превращены в ЛФ. Поэтому $P_0^{(1)}(t) = 0$, а следовательно, неравенство (1.9) преобразуется к виду

$$- \max_k \Lambda_k^{(2)}(t) \leq m_1(t) \leq - \min_k \Lambda_k^{(2)}(t). \quad (1.10)$$

Конечно, для системы 2 усилия преподавателя и обучаемого направлены на то, чтобы число неоткорректированных ЛФ было равно 0, однако у среднестатистического студента по разным объективным и субъективным обстоятельствам даже к концу учебного процесса

часть понятий остается неувоенной (неоткорректированной), значит, $P_0^{(2)}(t) = 0$. Поэтому аналогично выражению (1.10) получаем неравенство

$$-\max_k \Lambda_k^{(1)}(t) \quad m_2(t) \quad -\min_k \Lambda_k^{(1)}(t), \quad (1.11)$$

где $m_2(t)$ – математическое ожидание числа неоткорректированных ЛФ к моменту t . Теперь перейдем к определению плотностей $\Lambda_k^{(1)}(t)$ и $\Lambda_k^{(2)}(t)$.

Обозначим через $\alpha_{ij}^{(1)}(t) = \lambda_{ij}^{(1)}(t) P_{ij}^{(1)}(t)$, $\alpha_{ij}^{(2)}(t) = \lambda_{ij}^{(2)}(t) P_{ij}^{(2)}(t)$. Пусть в момент t имеется l ЛФ. Вероятность того, что ни один из этих ЛФ не скорректирует ни один ПФ за время Δt , будет равна

$$(1 - \alpha_{i_0 j_0}^{(2)}(t)\Delta t) (1 - \alpha_{i_1 j_1}^{(2)}(t)\Delta t) \dots (1 - \alpha_{i_l j_l}^{(2)}(t)\Delta t) = 1 - \sum_{s=0}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t)\Delta t$$

с точностью до $(\Delta t)^2$.

В любой момент времени t система 2 может с вероятностью $P_l^{(2)}(t)$ находиться в состоянии $E_l^{(2)}(t)$, где $l = \overline{0, n_2}$. Поэтому вероятность того, что за время Δt ни один из данных ЛФ не сможет ничего скорректировать, составит

$$\sum_{l=0}^{n_2} P_l^{(2)}(t) \left(1 - \sum_{s=0}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t)\Delta t \right), \quad (1.12)$$

а вероятность того, что за время Δt будет скорректирован один ПФ из данных ПФ с учетом ординарности:

$$1 - \sum_{l=0}^{n_2} P_l^{(2)}(t) \left(1 - \sum_{s=0}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t)\Delta t \right). \quad (1.13)$$

Преобразуем выражение (1.13) с учетом того, что $\sum_{l=0}^{n_2} P_l^{(2)}(t) = 1$ и $P_0^{(2)}(t) = 0$:

$$1 - \sum_{l=0}^{n_2} P_l^{(2)}(t) + \sum_{l=0}^{n_2} P_l^{(2)}(t) \sum_{s=1}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t)\Delta t = \sum_{l=1}^{n_2} P_l^{(2)}(t) \sum_{s=1}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t).$$

Следовательно, указанная вероятность равна

$$\sum_{l=1}^{n_2} P_l^{(2)}(t) \sum_{s=1}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t). \quad (1.14)$$

В то же время выражение

$$1 - e^{-\Lambda_k^{(2)}(t)\Delta t} \quad (1.15)$$

представляет собой вероятность корректировки стороной 2 за интервал времени Δt одного ПФ, что обусловит переход системы 1 из состояния $E_{k-1}^{(1)}(t)$ в состояние $E_k^{(1)}(t)$, поскольку $e^{-\Lambda_k^{(2)}(t)\Delta t}$ представляет собой вероятность того, что за время Δt ни один из данных ЛФ не сможет ничего скорректировать. Разложив функцию e^x в ряд Маклорена, вероятность (1.15) с точностью до $(\Delta t)^2$ можно представить в виде

$$1 - e^{-\Lambda_k^{(2)}(t)\Delta t} \approx \Lambda_k^{(2)}(t)\Delta t. \quad (1.16)$$

Таким образом, выражение (1.14) равно выражению (1.15) и правой части выражения (1.16).

Пусть

$$\alpha^{(2)} = \min_{t_1} \min_{t_2} \min_{i, n_1, j, n_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t); \quad \beta^{(2)} = \max_{t_1} \max_{t_2} \max_{i, n_1, j, n_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t),$$

где $[t_1, t_2]$ – временной интервал изучения данной темы. С учетом этого из выражений (1.14) и (1.16) следует:

$$\Delta t \alpha^{(2)} m_2(t) \Lambda_k^{(2)}(t) \Delta t \beta^{(2)} m_2(t). \quad (1.17)$$

В самом деле, заменив в выражении (1.14) $\alpha_{i,j_s}^{(2)}(t)$ на $\alpha^{(2)}$ и вынеся $\alpha^{(2)}$ за знак суммы, получим $\Delta t \alpha^{(2)} \sum_{l=1}^{n_2} P_l^{(2)} \sum_{s=1}^l 1 = \Delta t \alpha^{(2)} m_2(t)$. Аналогичное выражение получается для $\beta^{(2)}$.

Сократив неравенство (1.17) на Δt , получим

$$\alpha^{(2)} m_2(t) \Lambda_k^{(2)}(t) \beta^{(2)} m_2(t). \quad (1.18)$$

Неравенство (1.18) верно для любого $k = \overline{1, n_1}$.

Отсюда:

$$\alpha^{(2)} m_2(t) \max_{1 \leq k \leq n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) \beta^{(2)} m_2(t); \quad (1.19)$$

$$\alpha^{(2)} m_2(t) \min_{1 \leq k \leq n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) \beta^{(2)} m_2(t). \quad (1.20)$$

Аналогично:

$$\alpha^{(1)} m_1(t) \max_{1 \leq k \leq n_2} \Lambda_k^{(1)}(t) \beta^{(1)} m_1(t); \quad (1.21)$$

$$\alpha^{(1)} m_1(t) \min_{1 \leq k \leq n_2} \Lambda_k^{(1)}(t) \beta^{(1)} m_1(t). \quad (1.22)$$

Из неравенств (1.19) и (1.20) получим:

$$-\beta^{(2)} m_2(t) - \max_{1 \leq k \leq n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) - \alpha^{(2)} m_2(t); \quad (1.23)$$

$$-\beta^{(2)} m_2(t) - \min_{1 \leq k \leq n_1} \Lambda_k^{(2)}(t) - \alpha^{(2)} m_2(t). \quad (1.24)$$

Из неравенств (1.10), (1.23) и (1.24) вытекает:

$$-\beta^{(2)} m_2(t) m_1(t) - \alpha^{(2)} m_2(t). \quad (1.25)$$

Аналогично из неравенств (1.11), (1.21) и (1.22) получим:

$$-\beta^{(1)} m_1(t) m_2(t) - \alpha^{(1)} m_1(t). \quad (1.26)$$

Неравенства (1.25) и (1.26) запишем в виде системы:

$$\alpha^{(2)} m_2(t) - m_1(t) \beta^{(2)} m_2(t); \quad (1.27)$$

$$\alpha^{(1)} m_1(t) - m_2(t) \beta^{(1)} m_1(t).$$

Данная система представляет собой обобщение системы динамики средних Ланчестера [11] для случая разных скорострельностей и вероятностей поражения единиц сторон.

Из системы (1.27) получим:

$$\frac{\alpha^{(2)} m_2(t)}{\beta^{(1)} m_1(t)} \frac{dm_1(t)}{dm_2(t)} = \frac{\beta^{(2)} m_2(t)}{\alpha^{(1)} m_1(t)}. \quad (1.28)$$

Из системы (1.28) следует:

$$\alpha^{(2)} m_2(t) dm_2(t) = \beta^{(1)} m_1(t) dm_1(t); \quad (1.29)$$

$$\alpha^{(1)} m_1(t) dm_1(t) = \beta^{(2)} m_2(t) dm_2(t). \quad (1.30)$$

Из неравенства (1.29) получим:

$$\int_0^t \alpha^{(2)} m_2(t) dm_2(t) = \int_0^t \beta^{(1)} m_1(t) dm_1(t),$$

т. е.

$$\alpha^{(2)} (m_2^2(t) - n_2^2) = \beta^{(1)} (m_1^2(t) - n_1^2). \quad (1.31)$$

Аналогично неравенство (1.30) преобразуется к виду

$$\alpha^{(1)} (m_1^2(t) - n_1^2) = \beta^{(2)} (m_2^2(t) - n_2^2). \quad (1.32)$$

Из выражений (1.31) и (1.32) находим:

$$\frac{\alpha^{(1)} (m_1^2(t) - n_1^2) + n_2^2}{\beta^{(2)}} = m_2^2(t) = \frac{\beta^{(1)} (m_1^2(t) - n_1^2) + n_2^2}{\alpha^{(2)}};$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^{(1)}}{\beta^{(2)}} m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}} n_2^2} = m_2(t) = \sqrt{\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}} m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2}. \quad (1.33)$$

Из выражения (1.33) и первого неравенства системы (1.27) получим

$$\sqrt{\alpha^{(1)} \beta^{(2)} m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}} n_2^2} - m_1(t) = \sqrt{\alpha^{(2)} \beta^{(1)} m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2},$$

отсюда

$$\frac{-dm_1(t)}{\sqrt{m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2}} = \sqrt{\alpha^{(2)} \beta^{(1)}} dt;$$

$$\frac{-dm_1(t)}{\sqrt{m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}} n_2^2}} = \sqrt{\alpha^{(1)} \beta^{(2)}} dt.$$

Интегрируя в границах от 0 до t , получаем:

$$-\ln \left| m_1(t) + \sqrt{m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2} \right| + \ln \left| n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2} \right| = \sqrt{\alpha^{(2)} \beta^{(1)}} t; \quad (1.34)$$

$$-\ln \left| m_1(t) + \sqrt{m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}} n_2^2} \right| + \ln \left| n_1 + \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}} n_2^2} \right| = \sqrt{\alpha^{(1)} \beta^{(2)}} t. \quad (1.35)$$

Преобразуя неравенство (1.34), получим:

$$n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2} e^{-\sqrt{\alpha^{(2)} \beta^{(1)}} t} = m_1(t) + \sqrt{m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2}.$$

Перенесем $m_1(t)$ в левую часть и возведем обе части неравенства в квадрат:

$$n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 e^{-2\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} - 2 n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} m_1(t) + m_1^2(t) = m_1^2(t) - n_1^2 + \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2,$$

отсюда

$$n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 e^{-2\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} + n_1^2 - \frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}} n_2^2 = 2 n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} m_1(t). \quad (1.36)$$

Аналогично неравенство (1.35) преобразуется к виду

$$n_1 + \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}}} n_2 e^{-2\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t} + n_1^2 - \frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}} n_2^2 = 2 n_1 + \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t} m_1(t). \quad (1.37)$$

Поделив (1.36) на $2 n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t}$, получим:

$$\frac{1}{2} n_1 + \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 - n_1 e^{\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} = m_1(t). \quad (1.38)$$

Раскроем скобки и преобразуем левую часть следующим образом:

$$\frac{1}{2} n_1 \left(e^{-\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} + e^{\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 \left(e^{\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} - e^{-\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t} \right) = m_1(t). \quad (1.39)$$

Получаем:

$$n_1 \operatorname{ch}\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t - \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}}{\beta^{(1)}}} n_2 \operatorname{sh}\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t = m_1(t). \quad (1.40)$$

Аналогично, путем деления (1.37) на $2 n_1 + \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t}$,

получим:

$$\frac{1}{2} n_1 + \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}}} n_2 e^{-\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}}} n_2 - n_1 e^{\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t} = m_1(t), \quad (1.41)$$

отсюда

$$n_1 \operatorname{ch}\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t - \sqrt{\frac{\beta^{(2)}}{\alpha^{(1)}}} n_2 \operatorname{sh}\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t = m_1(t). \quad (1.42)$$

Используя симметрию относительно индексов 1 и 2 системы (1.27), можно записать аналитическое выражение для $m_2(t)$ через неравенства, аналогичные неравенствам (1.39) и (1.40), а именно:

$$n_2 \operatorname{ch}\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t - \sqrt{\frac{\alpha^{(1)}}{\beta^{(2)}}}n_1 \operatorname{sh}\sqrt{\alpha^{(1)}\beta^{(2)}}t \quad m_2(t); \quad (1.43)$$

$$n_2 \operatorname{ch}\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t - \sqrt{\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}}n_1 \operatorname{sh}\sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t \quad m_2(t). \quad (1.44)$$

Начальные условия: $m_1(0) = n_1$, $m_2(0) = n_2$.

Используя формулы (1.40)–(1.44), можно оценить:

1) среднее число откорректированных и неоткорректированных ЛФ и ПФ к данному моменту времени;

2) число $n_1(n_2)$, при котором к данному моменту времени среднее число откорректированных ЛФ (ПФ) достигнет данного значения;

3) время, по истечении которого число откорректированных ПФ (ЛФ) будет не более (не менее) заданного значения.

Запишем формулы (1.40)–(1.44) в более компактной форме:

$$\operatorname{ch}\tau_1 - \frac{1}{x_1} \operatorname{sh}\tau_1 \quad \mu_1(\tau_1); \quad (1.45)$$

$$\operatorname{ch}\tau_2 - \frac{1}{x_2} \operatorname{sh}\tau_2 \quad \mu_1(\tau_2); \quad (1.46)$$

$$\operatorname{ch}\tau_2 - x_2 \operatorname{sh}\tau_2 \quad \mu_2(\tau_2); \quad (1.47)$$

$$\operatorname{ch}\tau_1 - x_1 \operatorname{sh}\tau_1 \quad \mu_2(\tau_1). \quad (1.48)$$

где $\tau_1 = \sqrt{\alpha^{(2)}\beta^{(1)}}t$; $\tau_2 = \sqrt{\alpha_1\beta^{(2)}}t$; $x_1 = \sqrt{\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}} \frac{n_1}{n_2}$; $x_2 = \sqrt{\frac{\alpha^{(1)}}{\beta^{(2)}}} \frac{n_2}{n_1}$; $\mu_1 = \frac{m_1(t)}{n_1}$;

$\mu_2 = \frac{m_2(t)}{n_2}$. Начальные условия: $\mu_1(0) = 1$, $\mu_2(0) = 1$.

Для оценки превосходства стороны 1 над стороной 2 рассмотрим разность

$$\operatorname{ch}\tau_2 - \frac{1}{x_2} \operatorname{sh}\tau_2 - (\operatorname{ch}\tau_2 - x_2 \operatorname{sh}\tau_2) = \frac{x_2^2 - 1}{x_2} \operatorname{sh}\tau_2. \quad (1.49)$$

Поскольку $x_2 > 0$ и $\operatorname{sh}\tau_2 > 0$ при $\tau_2 > 0$, то знак данной разности зависит от x_2 , а именно: если $x_2 > 1$, то $\mu_1(\tau_2) > \mu_2(\tau_2)$, т. е. имеем превосходство стороны 1; если $x_2 < 1$, то $\mu_1(\tau) < \mu_2(\tau)$, что означает превосходство стороны 2; если $x_2 = 1$, то $\mu_1(\tau_2) = \mu_2(\tau_2)$ – равновесие сил.

Проведем аналогичную оценку, используя коэффициент x_1 . Для этого оценим разность

$$ch\tau_1 - x_1 sh\tau_1 - ch\tau_1 - \frac{1}{x_1} sh\tau_1 = \frac{1 - x_1^2}{x_1}. \quad (1.50)$$

В случае если $x_1 < 1$, то $\mu_2(\tau_1) > \mu_1(\tau_1)$, т. е. превосходство стороны 2 (рис. 1.12); если $x_1 > 1$, то $\mu_1(\tau_1) > \mu_2(\tau_1)$ – превосходство стороны 1 (рис. 1.13); при $x_1 = 1$ имеет место равновесие сил (рис. 1.14).

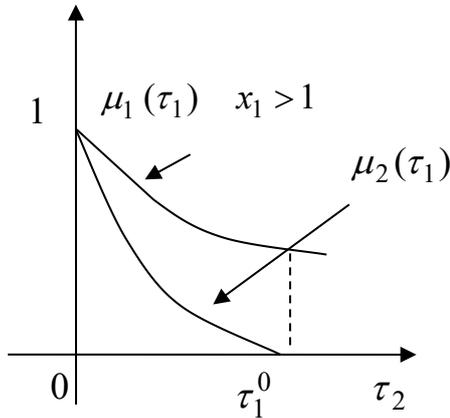


Рис. 1.12

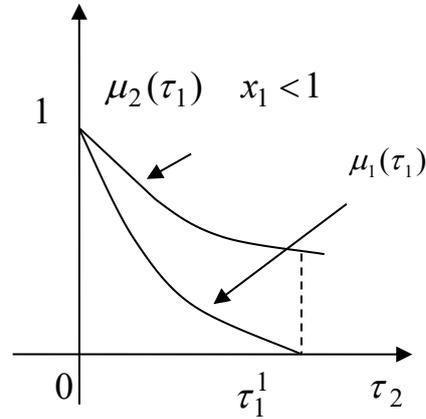


Рис. 1.13

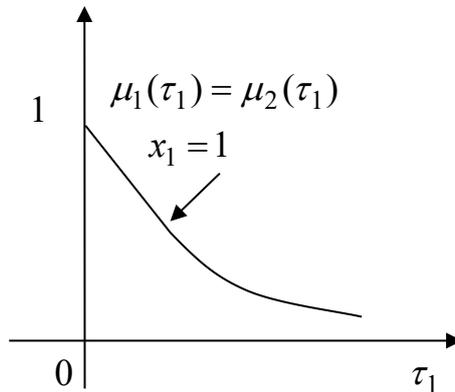


Рис. 1.14

На рис. 1.12 при $\tau_1 = \tau_1^0$ все ЛФ стороны 2 откорректированы, на рис. 1.13 при $\tau_1 = \tau_1^1$ откорректированы все ПФ стороны 1. Значение τ_1^0 находится из условия $ch\tau_1 - x_1 sh\tau_1 = 0$:

$$\frac{1}{2}(e^{-\tau_1^0} + e^{\tau_1^0}) - \frac{1}{2}x_1(e^{\tau_1^0} - e^{-\tau_1^0}) = 0, \quad (1.51)$$

откуда

$$\tau_1^0 = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1}. \quad (1.52)$$

Аналогично находится $\tau_1^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x_1}{1-x_1}$. При этом, как нетрудно показать, $\tau_1^0 < \tau_1^1$, если $x_1 > 1$, и $\tau_1^0 > \tau_1^1$, если $x_1 < 1$.

Проанализируем зависимость x_1 от $n_1, n_2, \beta^{(1)}, \alpha^{(2)}$. Предположим, что $n_2 = k n_1 (k > 1)$, тогда $x_1 = \frac{n_1}{k n_1} \sqrt{\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}}$, и стороне 1 для обеспечения своего преимущества необходимо иметь $x_1 > 1$, т. е. $\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\beta^{(1)}}{\alpha^{(2)}}} > 1$ и $\beta^{(1)} > k^2 \alpha^{(2)}$.

Следовательно, для преодоления численности ЛФ, в k раз превосходящей численность ПФ, стороне 1 необходимо иметь показатель $\beta^{(1)}$, который в k^2 раз превышает показатель $\alpha^{(2)}$ стороны 2.

Если же $\alpha^{(2)} = k \beta^{(1)}$, то при $x_1 > 1$ следует, что $n_1 > \sqrt{k} n_2$. Таким образом, увеличение численного превосходства дает большее преимущество, чем такое же увеличение показателя $\alpha^{(2)}$.

Итак, предложено системное описание процесса корректировки не понятых учащимися фрагментов дисциплины. Данный метод обобщает метод динамики средних и может найти применение в социологии, политологии, юриспруденции, педагогике.

§ 1.3. Системное представление процесса формирования личности

Процесс воспитания и формирования личности представляет собой сложную, динамически развивающуюся систему, на которую оказывает управляющие воздействия образовательный процесс. Важным является вопрос анализа устойчивости данной системы.

Обобщенная схема системы воздействия образовательного процесса на развитие личности показана на рис. 1.15. Состояния системы обозначены через S_i . Это структурные звенья системы. Вероятности нахождения системы в состояниях S_i обозначены через P_i . Протекающий в системе процесс условно можно считать *марковским*, так как переход из состояния S_i в состояние S_j не зависит от того, каким образом система попала в состояние S_i .

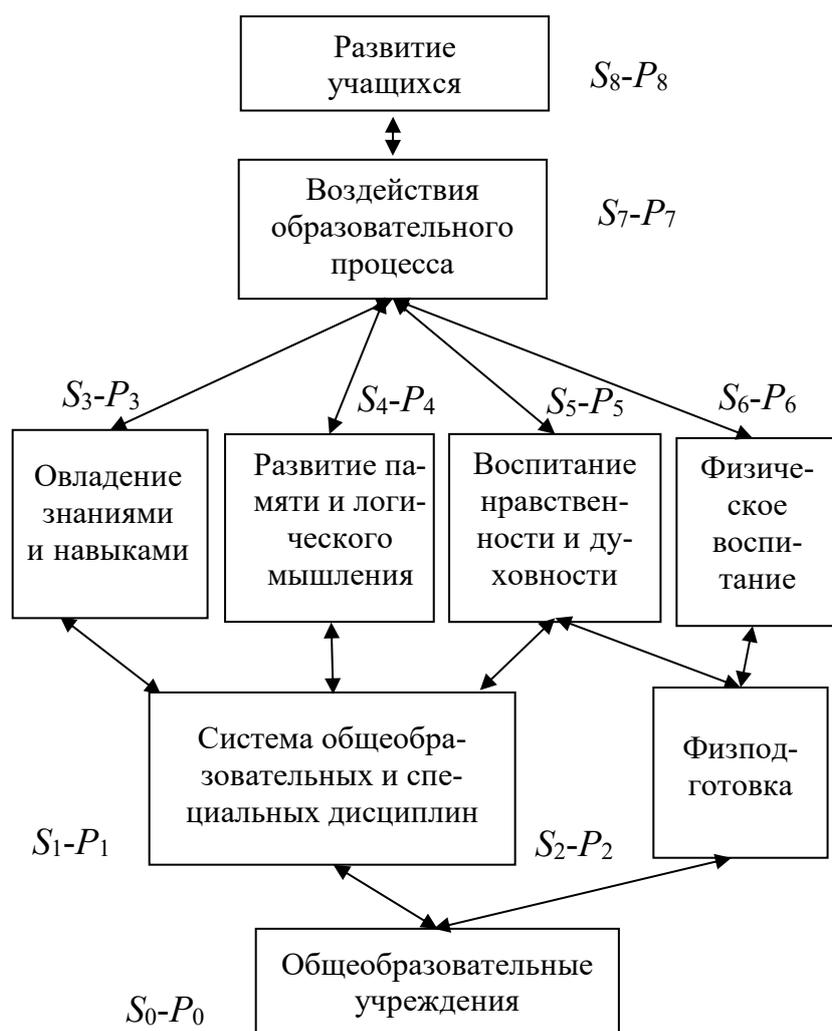


Рис. 1.15

Возможен вариант описания исходных данных в виде непрерывной марковской цепи, когда временной интервал от S_0 до S_8 представляется как непрерывный без выделения этапов. В этом случае используются плотности λ_{ij} потоков воздействия основных единиц учебно-воспитательно-трудовой деятельности образовательного учреждения. При этом в общем случае потоки могут иметь двустороннюю направленность, т. е. не только от S_i к S_j (при $j > i$), но и, наоборот, от S_j к S_i . Соответствующие плотности будем обозначать через μ_{ij} . Это могут быть потоки откликов вышестоящих уровней системы на поступающее воздействие нижестоящих уровней.

В этом случае рассматриваемую систему можно описать системой уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= \mu_{10}P_1(t) + \mu_{20}P_2(t) - \lambda_{01}P_0(t) - \lambda_{02}P_0(t); \\
P_1(t) &= \lambda_{01}P_0(t) + \mu_{31}P_3(t) + \mu_{41}P_4(t) + \mu_{51}P_5(t) - \lambda_{13}P_1(t) - \lambda_{14}P_1(t) - \lambda_{15}P_1(t); \\
P_2(t) &= \lambda_{02}P_0(t) + \mu_{52}P_5(t) + \mu_{62}P_6(t) - \lambda_{25}P_2(t) - \lambda_{26}P_2(t); \\
P_3(t) &= \lambda_{13}P_1(t) + \mu_{73}P_7(t) - \lambda_{37}P_3(t); \\
P_4(t) &= \lambda_{14}P_1(t) + \mu_{74}P_7(t) - \lambda_{47}P_4(t); \\
P_5(t) &= \lambda_{15}P_1(t) + \lambda_{25}P_2(t) + \mu_{75}P_7(t) - \lambda_{57}P_5(t); \\
P_6(t) &= \lambda_{26}P_2(t) + \mu_{76}P_7(t) - \lambda_{67}P_6(t); \\
P_7(t) &= \lambda_{37}P_3(t) + \lambda_{47}P_4(t) + \lambda_{57}P_5(t) + \lambda_{67}P_6(t) + \mu_{87}P_8(t) - \lambda_{78}P_7(t); \\
P_8(t) &= \lambda_{78}P_7(t); \\
P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) + P_6(t) + P_7(t) + P_8(t) &= 1.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

В стационарном режиме (при достаточно большом периоде t) все λ_{ij} , μ_{ij} , P_i ($i = \overline{0,8}$) постоянны, все $P_i(t)$, ($i = \overline{0,8}$) равны 0, т. е. имеем однородную систему алгебраических уравнений, решая которую при заданных λ_{ij} и μ_{ji} ($i, j = \overline{0,8}$), находим вероятности P_i ($i = \overline{0,8}$). Вероятность P_8 конечного состояния системы сравнивается с порогом P_8^* . В случае если $P_8^* > P_8$, необходимо изменить исходные данные – плотности λ_{ij} и μ_{ji} переводящих потоков.

Одна из важнейших задач, определяющих нормальное функционирование гражданского общества, связана с его *устойчивостью*, предполагающей сохранение нравственно-этических, юридических, экономических норм независимо от различного рода негативных влияний. Модель считается структурно устойчивой, если достаточно малые изменения в структуре самой модели вызывают такое ее поведение, которое в определенном смысле качественно аналогично поведению исходной модели [89]. В связи с этим возникает задача устойчивого функционирования рассматриваемой системы (рис. 1.15). Рассмотрим постановку задачи в общем виде. Пусть функциональная система описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.54}$$

где все x_i – функции времени t . Введем обозначения: $\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, $\bar{x}^0(t) = \{x_1^0(t), x_2^0(t), \dots, x_n^0(t)\}$, $\|\bar{x}(t)\|$ – норма вектора $\|\bar{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)}$.

Решение $\bar{x}(t)$ устойчиво по Ляпунову, если достаточно близкие к нему в любой начальный момент t_0 решения $\bar{x}(t)$ целиком погружаются в сколь угодно узкую ε -трубку, построенную вокруг решения $\bar{x}^0(t)$. Определение неустойчивости решения получается в результате отрицания приведенного определения. Решение $\bar{x}^0(t)$ называется *асимптотически устойчивым* при $t \rightarrow \infty$, если:

- 1) это решение устойчиво (по Ляпунову);
- 2) для любого $\Delta > 0$ справедливо неравенство $\Delta = \Delta(t_0) > 0$, при котором все решения $\bar{x}(t)$ ($t_0 < t < \infty$), удовлетворяющие условию $\|\bar{x}(t_0) - \bar{x}^0(t_0)\| < \Delta$, обладают свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - \bar{x}^0(t)\| = 0$.

Линейная система (1.54) называется *устойчивой* (или *вполне неустойчивой*), если все ее решения $\bar{x}(t)$ соответственно устойчивые (или неустойчивые) по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$.

Пусть система имеет n уровней, каждый из которых содержит n элементов, a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – обобщающая характеристика функционирования элемента S_{ij} , т. е. j -го элемента i -го уровня. Если на некотором уровне элементов меньше, чем n , то соответствующие a_{ij} принимают нулевые значения. В общем случае a_{ij} – функции, в частном случае – числа. Составим из них матрицу, которая применяется при анализе системы на устойчивость:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Матрица A имеет ровно n собственных значений: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.56)$$

Данное уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n -го порядка вида

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0. \quad (1.57)$$

Если все элементы a_{ij} являются числами, то b_i ($i = \overline{1, n}$) тоже числа.

Из теории устойчивости [84] известно:

система (1.54) с матрицей A является устойчивой тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют меньшие или равные 0 вещественные (действительные) части. Если вещественная часть собственного значения равна 0, то оно имеет количество линейно независимых собственных векторов, соответствующее его кратности;

система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части;

система неустойчива тогда и только тогда, когда ее матрица A имеет хотя бы одно собственное значение λ , для которого вещественная часть положительна либо равна 0, но при этом ранг матрицы $A - \lambda I$ меньше кратности собственного значения λ , где I – единичная матрица.

Поскольку уравнения высоких степеней типа (1.57) не имеют общих выражений для корней, то используются правила (критерии), которые позволяют судить о знаках действительных частей корней уравнения (1.57). Рассмотрим критерий Гурвица [84].

Из коэффициентов алгебраического уравнения составляется квадратная матрица специального вида, называемая матрицей Гурвица:

$$\Gamma = \begin{array}{cccccc} b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{array},$$

где $b_m = 0$, если $m > n$.

Согласно критерию устойчивости Гурвица система (1.54) с матрицей A является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры соответствующей матрицы Гурвица являются положительными, т. е. $\Delta_i > 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\Delta_1 = b_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & 1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = b_n \Delta_{n-1}.$$

Система дифференциальных уравнений (1.54) представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений типа (1.55), матрица которой имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} - \lambda_{02} & \mu_{10} & \mu_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{01} & -\lambda_{13} - \lambda_{14} - \lambda_{15} & 0 & \mu_{31} & \mu_{41} & \mu_{51} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{02} & 0 & -\lambda_{25} - \lambda_{26} & 0 & 0 & \mu_{52} & \mu_{62} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{13} & 0 & -\lambda_{37} & 0 & 0 & 0 & \mu_{73} & 0 \\ 0 & \lambda_{14} & 0 & 0 & -\lambda_{47} & 0 & 0 & \mu_{73} & 0 \\ 0 & \lambda_{15} & \lambda_{25} & 0 & 0 & -\lambda_{57} & 0 & \mu_{74} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{26} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{67} & \mu_{76} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{37} & \lambda_{47} & \lambda_{57} & \lambda_{67} & -\lambda_{78} & \mu_{87} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{78} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Параметры λ_{ij} и μ_{ij} ($i, j = \overline{0,8}$) для рассматриваемого случая могут иметь смысл соответственно плотностей потоков реальных и нормативных показателей качества. При конкретных значениях данных плотностей, используя указанные критерии, можно исследовать систему (1.54) на устойчивость. Из устойчивости этой системы будет следовать устойчивость представленной на рис. 1.5 системы воздействия образовательного процесса на развитие личности.

§ 1.4. Совершенствование внутренней среды вуза

Исследование деятельности вуза, как и любой другой организации, включает анализ внешней и внутренней среды. К факторам внешней среды организации относятся макро- и микрофакторы. Примерами макрофакторов являются мировой рынок, состояние экономики, развитие технологий, политика, социально-культурная сфера, правовая система, демографическая ситуация, природно-экологические показатели жизни общества. Микрофакторы – это положение вузов-конкурентов, уровень жизни региона, потребности потребителей образовательных услуги др.

Для внешней среды вуза характерны непредсказуемость, неопределенность, сложность, динамичность, фактор конкуренции (плотность рынка, количество основных конкурентов).

Исследование внешней среды организации может проводиться с использованием методики PEST- и SWOT-анализа.

Внутренняя среда организации представляет собой совокупность организационной структуры, внутриорганизационных процессов, образовательных и информационных технологий, материально-технического оборудования. К ней также относятся финансы, кадры, организационная культура, имидж, количество обучаемых и качественные показатели студентов, специальности, уровень квалификации профессорско-преподавательского состава и научный потенциал, организация системы контроля качества

обучения, состояние учебно-лабораторной, инструментальной, библиотечной и спортивной баз, обеспеченность общежитиями [83, 103].

Внутренняя среда организации определяет ее функционирование. Анализ внутренней среды вуза можно проводить по следующим срезам (функциональным зонам) (таблица).

Срез внутренней среды	Ключевые процессы и элементы организации
Учебная деятельность	Содержание и качество учебных программ и планов; инновационные технологии преподавания; квалификация преподавателей; материально-техническое обеспечение учебного процесса; управление контингентом обучающихся; наличие современной учебной базы; организация дополнительного образования; подготовленность обслуживающего персонала
Система управления вузом	Создание и поддержка инновационной структуры вуза (наличие системы повышения квалификации и т. д.); структура организационной системы управления и ее особенности; организация управления учебными подразделениями (факультетами, кафедрами, лабораториями и т. д.); система организации финансового и материально-технического обеспечения деятельности вуза
Научная деятельность	Участие вуза в конференциях и конкурсах и других мероприятиях; публикационная активность и уровень работ преподавателей; участие обучающихся в научно-исследовательской деятельности; изобретательская и рационализаторская деятельность
Воспитательный и социально-культурный срез	Участие вуза в культурно-просветительных и развлекательных мероприятиях, проводимых на разных уровнях; организация профориентационной и подготовительной работы с абитуриентами; наличие механизмов взаимодействия вуза и работодателей; уровень культурного досуга обучающихся (наличие кружков, секций, экскурсий, спортивная база и т. д.)

Внутренняя среда подвержена внешним воздействиям, на которые она должна быстро и гибко реагировать.

Наиболее совершенной структурой организации является *само-регулирующаяся* (саморазвивающаяся) система. Организация как система считается *самоорганизующейся*, если она без дополнительного воздействия внешней среды только под воздействием внутренних факторов изменяет свою функциональную структуру или свойства. Самоорганизация основана на том, что каждый член трудового коллектива обладает потенциалом не только для исполнения непосредственно своих трудовых функций, но и для участия в организации процесса работы коллектива.

В этом случае учебная организация способна изменять внутреннюю среду по собственному усмотрению (например, в ответ на резкие изменения внешней среды). Главное преимущество таких систем – сочетание устойчивости (прочности, надежности, стабильности, конкурентноспособности) и адаптивности (гибкости) [103].

Для этого весь персонал должен быть одинаково талантлив, настроен на инновации, способен к творчеству. Любой работник может предлагать новые идеи и проекты. Удерживать вместе массу талантливых людей может только общность интересов.

Как у отдельных участников учебного процесса, так и у коллективов существуют собственные интересы (или цели), которые находятся в определенных отношениях с интересами государства как выразителя интересов общества в целом. Другими словами, существует некоторая многоуровневая иерархия интересов. В этой связи особое значение приобретает нахождение и развитие оптимального сочетания интересов на всех уровнях. В работе [50] предложена иерархическая система согласования интересов участников образовательного процесса.

Формы интересов так же многообразны, как и вся деятельность человека. Любой вид деятельности личности в той или иной степени связан с определенным интересом. Большое значение имеет классификация интересов по их общественно-социальному характеру, которая предполагает разделение интересов на государственные, корпоративные и личные интересы. В свою очередь каждый из этих видов интересов представляет совокупность материальных, моральных, идеологических, политических и других интересов.

В ходе учебного процесса возникает система интересов, включающая интересы руководства вуза, интересы преподавательского коллектива кафедр и интересы учащихся. От оптимального сочетания этих интересов зависит результат всего учебного процесса.

В вузе должна присутствовать многофункциональная система эффективного повышения квалификации персонала. Необходима общая парадигма коллектива (корпоративная идеология), базирующаяся на общности ценностей, согласовании целей. Важным элементом моделируемой системы является единая ИТ-среда вуза (среда, основанная на информационно-коммуникационных технологиях) [126].

Самоорганизационные процессы в вузе основаны на совершенствовании производственных отношений за счет согласования целей работников. Происходит изменение приоритетов, потребностей, интересов, ценностных установок, мотивов отдельного человека и коллектива [13, 50].

Самоорганизующиеся системы характеризуются:

- 1) общностью интересов;
- 2) согласованной деятельностью всех членов коллектива для достижения поставленных целей;
- 3) осознанием того, что получаемое в результате коллективного труда вознаграждение будет доставаться каждому члену коллектива и позволит развивать дальнейшую деятельность всего коллектива. При этом процесс распределения получаемого вознаграждения носит прозрачный характер;
- 4) способностью коллектива конструктивно и в заданные сроки решать возникающие в процессе деятельности проблемы и противоречия.

Эффект самоорганизации в вузовском коллективе, как показано в работе [83], проявляется в следующем:

- совершенствовании морально-психологического климата;
- увеличении скорости принятия решений и повышении их качества на разных уровнях управления;
- применении коллективных решений с помощью современных математических методов;
- эффективной системе подготовки кадров;
- оперативном разрешении конфликтных ситуаций;
- совершенствовании системы выборов и процедуры голосования;
- обоснованном и аргументированном формировании коллективного мнения.

ГЛАВА 2

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ И ПОДДЕРЖКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 2.1. Информационная технология поддержки решения математических задач

В настоящее время в образовании широко используются современные информационные технологии обучения (ИТО). Разработано большое количество специализированных компьютерных систем, ориентированных на поддержку различных сторон учебно-воспитательного процесса.

Одним из наиболее перспективных направлений развития ИТО является *интеллектуализация* информационно-образовательных систем. Интеллектуальные системы обучения (ИСО) являются результатом применения методов ИИ в области автоматизированного обучения. В таких системах проверяется ход, логика решения, а не только правильность конечного результата. Такие системы называют «следящими», поскольку для проверки хода решения обучаемого с точки зрения завершенности и правильности они сверяют шаги решения, предложенные обучаемым, с шагами возможных правильных решений. Имеющиеся правильные решения могут быть автоматически сгенерированы некоторым алгоритмом или внесены в базу данных преподавателем. При использовании таких систем преподаватель избавляется от рутинной работы, причем не только по проверке результата, но и поиску ошибок по ходу решения задачи. Анализ современного состояния разработки ИСО выполнен в работе [116].

Большое количество имеющихся ИСО позволяет говорить о специальной информационной технологии поддержки решения задач. Постановки решения задач даже естественно-научного цикла (например, математики, физики) столь разнообразны, что, на наш взгляд, здесь не может быть унификации технологических методов автоматизированного решения. Целью данной главы является разработка подхода к формированию концепции информационной технологии поддержки решения математических задач (информационной технологии автоматизированного решения задач).

2.1.1. Характеристика и назначение систем поддержки решения математических задач

Системы поддержки решения математических задач похожи на системы поддержки принятия решений (СППР), поэтому и соответствующие им технологии должны иметь сходство. Цель технологии поддержки решения математических задач состоит в получении обучаемым осознанного решения математической задачи. Особенностью технологии является качественно новый метод организации взаимодействия человека и компьютера в интерактивном режиме. Человек выступает в роли объекта обучения; система поддержки решения задач выступает как управляющее звено, задающее входные данные [49, 55].

Информационная система совместно с обучаемым создает новую информацию для решения задачи. Технология должна быть ориентирована на решение разнообразных математических задач, обладать высокой адаптивностью к особенностям имеющегося технического и программного обеспечения, а также требованиям пользователя.

Перечислим некоторые возможности системы:

- 1) интеллектуальный анализ промежуточных и окончательного результата решения задачи обучаемым;
- 2) интерактивная поддержка в решении задач (подсказки, отсылки к справочным формулам, теоретическому материалу и т. д.);
- 3) помощь, основанная на примере пошагового решения аналогичных задач.

2.1.2. Основные компоненты систем поддержки решения математических задач

В состав системы поддержки решения математических задач входят три главных компонента: база данных, база моделей решения задач, интеллектуальный анализатор решений и программная подсистема, которая состоит из системы управления базой данных, системы управления базой моделей решения задач и системы управления интерфейсом между пользователями (преподавателем, обучаемым) и компьютером.

База данных играет в данной информационной технологии важную роль. Данные можно разделить на внутренние и внешние. К внутренним данным относится набор задач, решаемых обучаемыми на данном занятии. В качестве внешних данных можно использовать теоретический материал, математические формулы, инструкции, примеры решения задач, тесты и т. д. [58]. Для надежности эту информацию можно хранить в файлах за пределами системы поддержки решения задач. В системе должна

быть предусмотрена возможность получения информации из внешних баз данных (например, получение литературы из специализированных библиотек).

Система управления базой данных должна комбинировать информацию из различных источников (внутренних, внешних данных и данных из внешних баз), а также обладать возможностью выполнения процедур агрегирования и фильтрации данных; быстрого прибавления или исключения того или иного источника информации; построения логической структуры данных и т. д.

Ключевую роль в данной системе играют база моделей, содержащая модели решения математических задач по разным разделам [19, 45, 51], и интеллектуальный анализатор решений.

Имеющиеся в моделях решения могут быть автоматически сгенерированы некоторым алгоритмом или внесены в базу моделей пользователем – преподавателем. Необходимо отметить, что реализовать проверку решения задачи во всех деталях невозможно, поэтому при использовании подобных систем следует ограничивать возможное количество просматриваемых ситуаций исходя из имеющихся вычислительных ресурсов. Цель интеллектуального анализатора решений – определение правильности решения задачи, анализ того, что именно в ответе неправильно или неполно, и, возможно, определение тех недостающих или неправильных знаний, которые могут быть ответственны за ошибку. Интеллектуальные анализаторы предполагают наличие обратной связи с обучаемым.

Анализатор должен осуществлять интерактивную поддержку (помощь) на каждом шаге решения задачи – например, создавать специальную подсказку, указывающую на то, что неправильно (некорректно) в данном шаге решения, выдачу совета для выполнения следующего шага, или указание на то, что следует делать дальше. Интеллектуальный анализ решений обучаемого можно осуществить при ограничении количества возможных ответов обучаемого. Анализатор должен оценивать, насколько продвинулся обучаемый после каждого шага, т. е. измерять прогресс в решении, выставлять итоговую оценку и обосновывать ее [30, 57]. Последнее в ряде случаев может быть наиболее важным для обучаемого в данной технологии, даже важнее, чем сама оценка. При построении анализатора можно использовать специальные языки, аналогичные тем, что применяются в базе моделей СППР, и позволяющие моделировать ситуации типа «*Что будет, если...*» или «*Как сделать, чтобы...*». Такие языки, созданные специально для построения моделей, дают возможность построения моделей определенного типа, обеспечивающих нахождение решения при гибком изменении переменных. Анализатор должен оказывать поддержку в решении задач путем демонстрации решения или

его фрагмента на аналогичных примерах. Это поможет обучаемым решать новые задачи, выполнять анализ примеров из решенных схожих задач.

Однако эти системы не могут проверить корректность пошагового решения математической задачи в полном объеме, потому что существует бесконечное множество правильных записей одной и той же формулы.

Система управления базой моделей решения задач должна обладать следующими возможностями: создавать новые модели или изменять существующие, поддерживать и обновлять параметры моделей, манипулировать моделями.

Проверка анализатором на корректность пошагового решения может осуществляться различными способами (например, подстановкой числовых значений переменных, содержащихся в формулах, и анализом на тождество; представлением известной программе решений задачи в виде списков формул и сравнения формул, введенных обучаемым, с формулами из этих списков).

Для построения анализатора предлагается использовать графовые модели (сетевые, деревья И/ИЛИ, нечеткие графы), формальные грамматики, предикаты и фреймовые структуры.

Эффективность и гибкость информационной технологии во многом обусловлены характеристиками интерфейса системы. Интерфейс определяет способы взаимодействия пользователей с системой. Так как в данной системе два типа пользователей (преподаватели и обучаемые), то следует предусмотреть специальные возможности для каждой из категорий пользователей. Элементами интерфейса являются язык пользователей; язык сообщений компьютера, организующий диалог на экране дисплея; знания пользователей о правилах работы с системой.

Элементами языка пользователя могут быть формы (шаблоны) входной и выходной информации и т. п. Язык сообщений компьютера может быть разнообразен: всплывающие подсказки, поощрения или порицания и т. д.

Нельзя надеяться, что системы поддержки решения математических задач смогут распознать любой шаг решения задачи обучаемым, так как даже для самой простой задачи требуется внести очень много возможных решений, отличающихся друг от друга одной или несколькими формулами. В данной ситуации относительно качества работы системы можно говорить только о высокой вероятности правильного распознавания большинства шагов решений обучаемых для конкретных классов задач из некоторых разделов математики. Поэтому система автоматизированного управления обучением должна быть дополнительным средством к традиционным методам обучения. Кроме того, при ее использовании должны учитываться индивидуальные особенности обучаемых.

Технология поддержки решения задач может использоваться в самых различных сферах и на различных этапах обучения.

§ 2.2. Электронное учебное пособие «Практикум по высшей математике»

Важнейшая задача процесса обучения – подготовка специалиста, умеющего логически мыслить, моделировать возникающие ситуации производственно-трудовой деятельности, социальной сферы, находить оптимальные стратегии в решении проблем.

При решении данной задачи важная роль отводится учебникам (учебным пособиям) и методам обучения. К сожалению, многие имеющиеся в настоящее время учебники и учебные пособия не удовлетворяют обучаемых. Большой листаж, непродуманная последовательность изложения, отсутствие соответствующих примеров прикладных задач – все это приводит к формированию у обучаемых негативного отношения к литературным источникам. Однако даже очень хорошо написанный учебник не является панацеей от неудовлетворительных оценок, свидетельствующих о том, что данные обучаемые не в состоянии на достаточном уровне усвоить предлагаемый материал. К тому же в связи с платной формой обучения во многих случаях учащиеся имеют достаточно большие пробелы в знании школьного материала, являющегося базовым для обучения в институте.

Встает вопрос: возможно ли решение задачи полного усвоения всеми обучаемыми данной дисциплины? Ответ таков: да, но при определенных условиях, связанных, в частности, с введением новых форм и методов обучения, используемых в автоматизированном электронном учебном пособии «Практикум по высшей математике»

Глобальная цель исследования – создание на базе учебного пособия обучающей системы ИИ. Отсюда вытекают основные подцели (задачи): 1) создание учебного пособия соответствующего уровня и структуры; 2) формирование базы данных по анализу возможных шагов (действий) обучаемых при решении типовых задач данной дисциплины; 3) разработка программного обеспечения для использования компьютерной технологии обучения и самообучения.

Учебное пособие «Высшая математика» [17] предназначено для студентов экономических и смежных специальностей и представляет собой, во-первых, учебное пособие и, во-вторых, систему ИИ.

Как учебное пособие, оно, в соответствии с государственным стандартом, содержит краткий, но охватывающий все ключевые понятия дисциплины перечень основных определений и формул к каждой теме, а также основные правила, методы и алгоритмы. Имеется детальный разбор всех типов задач по каждой теме. В конце каждой главы приводится список задач с ответами в конце книги. Использование таблиц для систематизации изложения материала существенно облегчает его

восприятие. Многие из предлагаемых задач носят прикладной характер, что важно для приобретения обучаемыми навыков моделирования социально-экономических ситуаций.

Таким образом, учебное пособие «Высшая математика» имеет проблемно ориентированный характер. Изложенный в нем в краткой и систематизированной форме теоретический материал вместе с решенными типовыми задачами служит достаточной основой для овладения основными навыками в решении задач по курсу высшей математики. Подтверждение этому – успешная апробация первых двух изданий в ряде институтов Твери и Москвы. Учебное пособие «Высшая математика» представляет собой доработанный с учетом пожеланий студентов и преподавателей материал, на 50 % актуализированный новыми заданиями, в том числе прикладного характера, а также приложениями, содержащими основные (базовые) формулы школьного курса и варианты контрольных работ по всем темам.

Как система ИИ, пособие представляет собой автоматизированную систему обучения и самообучения студентов, предполагающую работу в диалоговом режиме «человек – компьютер» с использованием базы данных относительно возможных правильных и неправильных ответов обучаемых в ходе решения задач.

При этом возможно использование различных режимов работы:

0) решение задач по курсу высшей математики без стадии обучения;
1) простая проверка решения; 2) проверка решения с рекомендациями: повторить тот или иной вопрос, раздел, посмотреть тот или иной шаг решения соответствующих типовых задач; 3) режим «натаскивания», заключающийся в анализе и комментарии каждого шага решения обучаемого.

Общеизвестно, что лучшую подготовку учащиеся получают при индивидуальном обучении, иначе называемом репетиторством. Предлагаемая система ИИ позволяет осуществлять подобное репетиторство как в группе во время практических или лабораторных занятий, так и в индивидуальном порядке, как при контроле со стороны преподавателя, так и при самостоятельном обучении под руководством, образно говоря, ИИ; при этом имеется возможность многократного рассмотрения предложенных примеров. Предлагаемый пакет программ можно использовать не только при обучении по данному учебному пособию, но и для решения любых задач по высшей математике.

Учебное пособие «Высшая математика» содержит 15 глав, охватывающих весь курс высшей математики для студентов экономических специальностей вузов.

Глава 1. Математическое моделирование. Перечислены математические модели процессов с указанием применяемого математического аппарата.

Глава 2. Множества. Рассмотрены основные понятия теории множеств, решение соответствующих типовых задач и задачи к главе, решаемые с использованием компьютерной обучающей системы в первом или втором режиме.

Глава 3. Функции и их свойства. Приведены основные определения и примеры решения задач. Представлены задачи для самостоятельного решения, в том числе с использованием обучающей системы в первом или втором режиме.

Глава 4. Матрицы и определители. Приведены основные понятия, правила и алгоритмы с иллюстрирующими примерами. В конце главы дан перечень задач для решения с возможным использованием компьютерной обучающей системы в первом, втором или третьем режиме.

Глава 5. Системы линейных уравнений. Даны основные определения и методы, проиллюстрированные на типовых задачах. Рассмотрены методы Крамера, обратной матрицы, ранга и Гаусса. Приведены примеры для решения с возможным использованием компьютерного обучения в первом, втором или третьем режиме.

Глава 6. Векторная алгебра. Приведены основные понятия, формулы и решения типовых примеров. Рассмотрены скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, линейная зависимость и независимость векторов, базис, собственные векторы и числа. Дан перечень задач для приобретения навыков с возможным использованием компьютерного обучения в первом, втором или третьем режиме.

Глава 7. Аналитическая геометрия. Рассмотрены основные понятия, формулы и типовые задачи аналитической геометрии на плоскости в пространстве. В конце главы помещены аналогичные задачи для самостоятельного решения, в том числе с использованием компьютерной технологии обучения в любом из трех указанных выше режимов.

Глава 8. Предел функции. Приведены основные определения, формулы, свойства и примеры решения задач. Помещены задачи к главе, решаемые при использовании первого или второго режима работы.

Глава 9. Производная и дифференциал. Даны основные определения, формулы, примеры решения типовых задач. Представлены задачи для отработки материала, которые могут быть решены с использованием обучающей системы в первом, втором или третьем режиме.

Глава 10. Приложения производной. Приводятся основные понятия, формулы, правила, решение типовых задач на правило Лопиталя, исследование функций на монотонность, экстремум, наибольшее и наименьшее значения, выпуклость, вогнутость, перегиб, отыскание

асимптот. Имеются задачи для решения, в том числе с использованием первого, второго или третьего режима.

Глава 11. Неопределенный интеграл. Приведены основные определения, формулы, правила и примеры решения типовых задач на непосредственное интегрирование, а также интегрирование по частям и заменой переменной (интегрирование дробно-рациональных, иррациональных и тригонометрических функций). Приведены задачи для решения с использованием первого или второго режима.

Глава 12. Определенный интеграл. Основные определения, основные формулы, примеры решения типовых задач, в том числе по отысканию пройденного пути, объема выполненной работы, а также на вычисление несобственных интегралов, площадей плоских фигур и объемов тел вращения. В конце главы приведены задачи для закрепления изученного материала, которые можно решать с использованием первого и второго режимов.

Глава 13. Функции двух переменных. Содержатся основные определения, формулы, правила и примеры решения типовых задач по вычислению частных производных, производных по направлению, градиента, полного дифференциала, двойных интегралов. В конце главы имеются задачи для закрепления материала и приобретения навыков. При их решении можно использовать первый и второй режимы компьютерной системы обучения.

Глава 14. Дифференциальные уравнения и системы. Содержатся основные определения, формулы, правила, примеры решения типовых задач по решению различных видов дифференциальных уравнений I и II порядков и нормальных систем дифференциальных уравнений. Имеются задачи для самостоятельного решения, в том числе на основе обучающей системы.

Глава 15. Ряды. Перечень основных определений, формул и признаков. Представлены примеры типовых задач на исследование сходимости, разложение функций в ряд, приложения рядов в приближенном вычислении. Приведены задачи для самостоятельного решения с использованием обучающей системы.

Учебное пособие содержит список литературы, ответы к задачам, два приложения (варианты контрольных работ и основные формулы школьного курса).

Основные научные и научно-технические результаты:

1. Разработка уникальной, не имеющей аналогов системы ИИ по обучению высшей математике.
2. Возможность существенно облегчить труд преподавателя.
3. Создание компьютерного индивидуального репетитора.
4. Возможность при соответствующем объеме проделанной работы под руководством ИИ учиться без двоек.

5. Разработка (в перспективе) подобных обучающих систем по другим математическим курсам.

6. Создание (в перспективе) новой науки – математической информатики.

§ 2.3. Математическое моделирование учебников и учебных пособий

Математическое моделирование учебников и учебных пособий является важной и актуальной задачей. В данном параграфе предложен новый подход к построению математической модели учебника. Цель заключается в построении обучающей системы на примере учебника.

Основные решаемые задачи:

1. Построение математической модели учебника.

2. Оценка характеристик системы.

Прежде всего укажем, что выводы, сделанные в работе, основаны на использовании статистических данных обучения на протяжении нескольких лет студентов Тверского филиала Московского университета экономики, статистики и информатики, Тверского филиала Московского социального университета, Тверской государственной сельскохозяйственной академии.

Любой учебник (учебное пособие) можно рассматривать как иерархическую многоуровневую систему. При этом возможны разные подходы, или этапы. Первый подход (этап) заключается в рассмотрении структурно-логической схемы учебника безотносительно к студентам, обучающимся по данному учебнику. Второй, связанный с рассмотрением системы «учебник – учащиеся», отражает процесс обучения по данному учебнику и получение среднестатистических показателей. Третий связан с оценкой процесса обучения конкретного обучаемого (конкретной группы обучаемых), в частности, с целью выявления отклонений в его (их) обучении относительно среднестатистических данных. В качестве верхнего (нулевого) уровня можно рассматривать введение, где сформулированы основные цели, задачи изучения данной дисциплины, перечислены разделы и темы. Нижележащие уровни представляют собой разделы или главы, темы, параграфы учебника (учебного пособия). При описании учебника (учебного пособия) как системы удобно использовать статистическое моделирование, поэтому рассматриваемые выборки должны быть репрезентативными. Следовательно, в качестве уровней системы целесообразно рассматривать либо главы, либо параграфы, либо пункты. Мы выберем параграфы. Последние имеют сплошную нумерацию согласно их следованию в учебнике (рис. 2.1).

На этом рисунке нижний уровень характеризует итоговую аттестацию по изучению данного учебника. «Внешняя среда» представляет собой, например, обращение обучаемых к другим источникам, консультации у преподавателей, сокурсников, родителей и т. д.

В общем случае весь текст учебника можно представить в виде конкатенации (последовательного соединения) указанных фрагментов.

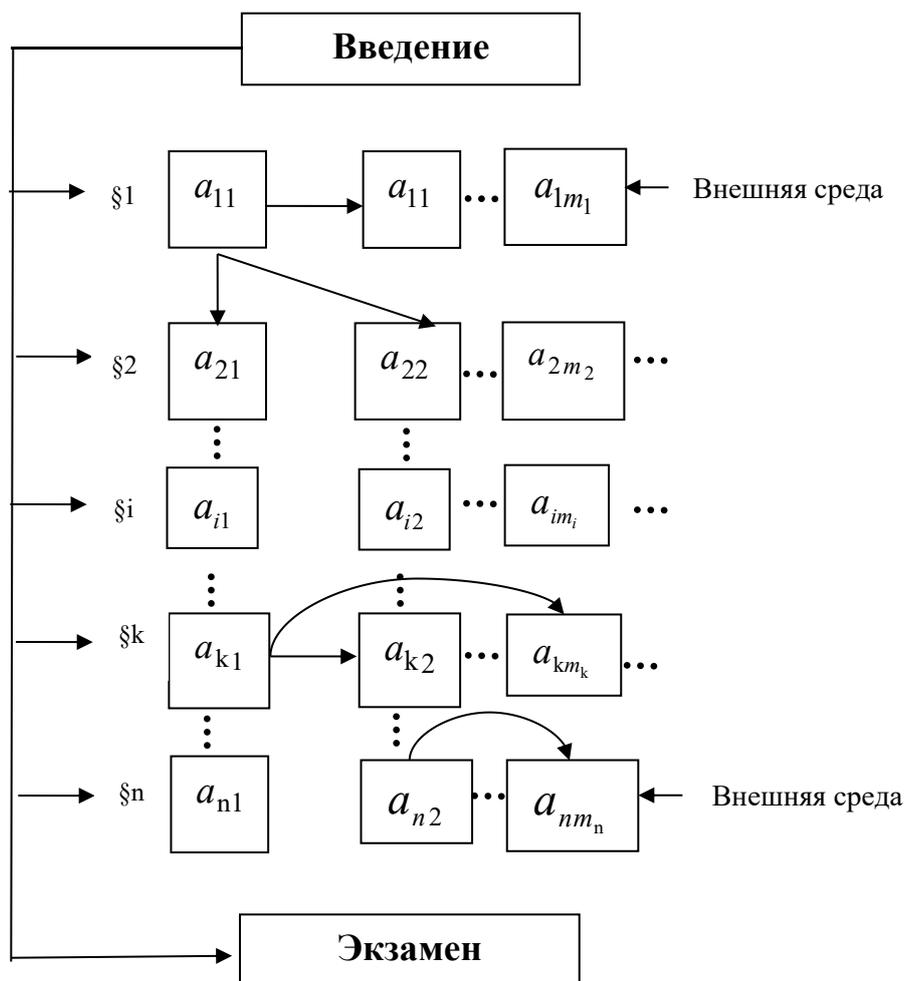


Рис. 2.1

Заметим, что при изучении учебника конкатенация часто нарушается и рассматривается либо объединение фрагментов, либо объединение конкатенаций определенных фрагментов. Будем говорить, что фрагмент a_{ij} определяет фрагмент a_{kl} ($i < k$ при $i = kj$), если a_{kl} следует из a_{ij} , т. е. a_{ij} используется при изучении a_{kl} . Параграфы, отнесенные к одной теме, образуют группу уровней данной темы. Каждый параграф содержит определенное количество фрагментов a_{ij} , где i – номер уровня (параграфа), а j – порядковый номер фрагмента в i -м параграфе. Фрагменты образуют элементы данной системы.

На множестве фрагментов определено отношение следования $a_{ij}Ra_{kl}$, которое означает, что фрагмент a_{ij} используется при изучении a_{kl} (здесь $k > i$) и определяет связь между i -м и k -м ($k > i$) параграфами, направленную от i -го уровня к k -му, либо фрагментами данного параграфа при $i = k$ (на рис. 2.1 показана соответствующими стрелками). Если рассматривать систему «учебник – учащиеся», то появляются стрелки, идущие от фрагментов нижележащих уровней к фрагментам вышележащих уровней, отражающие факт непонимания фрагмента a_{kl} и возврат к определяющему его фрагменту a_{ij} ($i < k$, при $i=k$ $l = j$) либо повторение непонятного фрагмента. Таким образом, на графе (см. рис. 2.1) могут быть петли.

Фрагмент a_{ij} может напрямую определять фрагмент a_{kl} , т. е. непосредственно использоваться при изучении a_{kl} (обозначение: $a_{ij} \rightarrow a_{kl}$), либо опосредованно через последовательность фрагментов $a_{i_1j_1}$, $a_{i_2j_2}$, ..., $a_{i_uj_u}$ таких, что последующий член непосредственно определяется предыдущим, a_{ij} непосредственно определяет $a_{i_1j_1}$, а $a_{i_uj_u}$ непосредственно определяет a_{kl} . Если при изучении a_{kl} используются фрагменты $a_{u_1q_1}$, $a_{u_2q_2}$, ..., $a_{u_vq_v}$, то запись имеет вид $a_{u_1q_1} a_{u_2q_2} \dots a_{u_vq_v} \rightarrow a_{kl}$.

Оценим основные характеристики данной системы.

1. Степень целостности системы, рассмотренная в п. 1.1.2. Для учебника, имеющего n параграфов с $m_i (i = \overline{1, n})$ фрагментами на i -м уровне, имеющими $s_{ij} (i = \overline{1, m_i})$ связей с элементами нижних уровней,

$$M_{\Phi} = n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} m_i s_{ij} .$$

Первое слагаемое соответствует связям между нулевым и нижележащими уровнями, второе соответствует связям между фрагментами. Таким образом,

нулевым и нижележащими уровнями, второе соответствует связям между фрагментами. Таким образом,

$$Ц = n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} m_i s_{ij} / m^2. \quad (2.1)$$

Во избежание громоздкости, но не нарушая общности, оценим целостность параграфа «Потоки событий» из [96]. Для упрощения записи будем нумеровать его цифрой «1». Укажем конкатенацию фрагментов данного параграфа, причем отдельные фрагменты будем заключать в кавычки: a_{11} = «Определение потока событий»; a_{12} = «Пример потока событий»; a_{13} = «Определение интенсивности потока»; a_{14} = «Определение регулярного потока»; a_{15} = «Пример регулярного потока»; a_{16} = «Определение стационарного потока»; a_{17} = «Пример

стационарного потока»; a_{18} = «Определение потока без последствия»; a_{19} = «Пример потока без последствия»; $a_{1,10}$ = «Определение ординарного потока»; $a_{1,11}$ = «Пример»; $a_{1,12}$ = «Определение простейшего потока»; $a_{1,13}$ = «Условия его возникновения»; $a_{1,14}$ = «Вывод формулы Пуассона»; $a_{1,15}$ = «Трактовка этой формулы при отсутствующих событиях»; $a_{1,16}$ = «Пример применения формулы Пуассона»; $a_{1,17}$ = «Описание распределения интервала времени между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока» (используются 3 формулы и 1 график); $a_{1,18}$ = «Определение показательного закона»; $a_{1,19}$ = «Связь характеристик показательного закона с интенсивностью потока»; $a_{1,20}$ = «Свойство показательного закона»; $a_{1,21}$ = «Приближенная формула вероятности попадания хотя бы одного события на малый отрезок времени».

Рассмотрим случай непосредственных связей: $a_{11} \rightarrow a_{12}$, $a_{11} \rightarrow a_{13}$, $a_{11} \rightarrow a_{14}$, $a_{14} \rightarrow a_{15}$, $a_{11} \rightarrow a_{16}$, $a_{16} \rightarrow a_{17}$, $a_{11} \rightarrow a_{18}$, $a_{18} \rightarrow a_{19}$, $a_{11} \rightarrow a_{1,10}$, $a_{1,10} \rightarrow a_{14}$, $a_{16} \rightarrow a_{18}$, $a_{1,10} \rightarrow a_{1,12}$, $a_{1,12} \rightarrow a_{1,13}$, $a_{16} \rightarrow a_{18}$, $a_{1,10} \rightarrow a_{1,14}$, $a_{1,14} \rightarrow a_{1,15}$, $a_{1,15} \rightarrow a_{1,16}$, где b = «Вероятность противоположного события» (фрагмент предшествующего параграфа); $a_{1,15} \rightarrow a_{17}$, где c = «Определение функции распределения $F(t)$ » – фрагмент предыдущего параграфа, d = «Определение плотности распределения» – фрагмент предыдущего параграфа, e = «График плотности распределения» – фрагмент предыдущего параграфа; $a_{1,17} \rightarrow a_{1,18}$, $a_{1,18} \rightarrow a_{1,19}$, $f \rightarrow a_{1,20}$, где f = «Пример» – разъяснение свойства; $b \rightarrow a_{1,21}$, где g = «Разложение в ряд функции» – другой учебник (учебное пособие) – внешняя среда. В этом примере a_{11} опосредованно используется для понимания a_{19} через промежуточный фрагмент a_{18} .

2. *Эффективность* системы, которая характеризуется вероятностью изучения дисциплины по данному учебнику без «сбоев». «Сбоем» будем называть непонимание данного фрагмента учебного материала. Пусть μ – среднестатистическая плотность «сбоев» в понимании фрагментов изучаемой дисциплины среднестатистического студента при изучении данного учебника, его раздела или темы, полученная на основе наблюдений за группами обучаемых, и поток «сбоев» является простейшим пуассоновским потоком. Такое допущение оправдано, если, во-первых, плотность μ потока постоянна, во-вторых, можно считать, что отсутствует последствие, так как число будущих «сбоев» определяется числом «сбоев» в настоящий период и не зависит от предыстории, и,

в-третьих, за малый промежуток времени можно ожидать не более одного «сбоя».

В случае простейшего потока «сбоев» процесс изучения учебника обучаемым (группой обучаемых) можно считать марковским и рассматривать аналогично процессу ликвидации неисправностей в техническом устройстве, где состояние $S_i (i = \overline{0, m})$ означает, что в данный момент имеется i «сбоев» в понимании фрагментов. Переход из состояния S_i в состояние S_{i+1} происходит под воздействием простейшего потока «сбоев» с плотностью $\mu_{i, i+1}$, обратный переход осуществляется под воздействием простейшего потока устраненных «сбоев» с плотностью $\mu_{i+1, i}$ в результате соответствующих обработок непонятого материала под руководством преподавателя либо в результате консультаций у других обучаемых, репетитора и т. п. (рис. 2.2).

Как известно [1], в этом случае вероятность отсутствия «сбоев» вычисляется по формуле

$$P_0 = 1 + \frac{\mu_{01}}{\mu_{10}} + \frac{\mu_{12}\mu_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}} + \dots + \frac{\mu_{m-1,m}\dots\mu_{12}\mu_{01}}{\mu_{m,m-1}\dots\mu_{21}\mu_{10}}^{-1}, \quad (2.2)$$

а вероятности $P_i (i = \overline{1, m})$ остальных состояний $S_i (i = \overline{1, m})$ – соответственно по формулам:

$$P_1 = \frac{\mu_{01}}{\mu_{10}} P_0; P_2 = \frac{\mu_{12}\mu_{01}}{\mu_{21}\mu_{10}} P_0; \dots; P_m = \frac{\mu_{m-1,m}\dots\mu_{12}\mu_{01}}{\mu_{m,m-1}\dots\mu_{21}\mu_{10}} P_0. \quad (2.3)$$

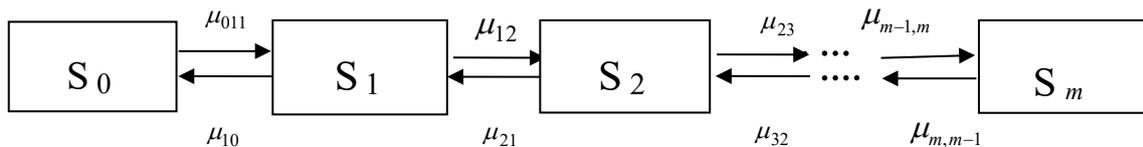


Рис. 2.2

Изучение каждого параграфа (или темы) удобно моделировать марковским процессом. Тогда эффективность \mathcal{E} изучения курса теории вероятностей по данному учебнику можно определить как вероятность изучения без «сбоев» всех параграфов. Таким образом,

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n P_0^{(i)}, \quad (2.4)$$

где $P_0^{(i)}$ – вероятность изучения без «сбоев» i -го параграфа; n – число параграфов.

Например, § 3.5 «Функция распределения случайной величины» из [96], согласно статистическим данным, имеет в среднем 4 разных «сбоя» при изучении данного материала. Первый «сбой» обычно происходит при восприятии определения функции $F(x)$, второй – в процессе рассмотрения примера построения ее графика, третий – при изучении 3-го свойства, четвертый – при изучении 4-го свойства. Таким образом, имеем систему с пятью состояниями $S_i (i = \overline{0, 4})$. Сначала рассмотрим упрощенный вариант, когда все $\mu_{i,i+1}$ и $\mu_{i+1,i} (i = \overline{0, 4})$ равны 1. Тогда $P_0 = (1+1+1+1+1)^{-1} = 0,2$; $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = = P_0 = 0,2$.

Это означает, что пятую часть времени система находится в каждом из состояний – S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 . Однако в рассматриваемом примере далеко не все обучаемые, «споткнувшись» на определении функции распределения, после повторного ознакомления с этим вопросом воспринимают его осознанно. У одних обучаемых осознанное восприятие наступает со второго, у других – с третьего раза. Поэтому в общем случае переход из состояния S_0 в состояние S_1 осуществляется под воздействием потока «сбоев» в понимании определения функции $F(x)$ с плотностью M_{01} , равной средней арифметической подобных «сбоев» у данной группы обучаемых.

Аналогично находятся плотности $\mu_{i,i+1} (i = \overline{1, 4})$. При каждом таком «сбое» учащийся снова переосмысливает данное понятие самостоятельно или с помощью преподавателя, других учащихся и т. п. В результате происходит обратный переход от состояния S_{i+1} к $S_i (i = \overline{0, 4})$ под воздействием потоков устраненных «сбоев», плотность $\mu_{i+1,i}$ которых рассматривается как средняя арифметическая для данной группы обучаемых, так как у одних обучаемых при переходе от S_{i+1} к S_i это будет один устраненный «сбой», у других – два и т. д. Например, если $\mu_{01} = 1$, $\mu_{12} = 3$, $\mu_{23} = 1$, $\mu_{34} = 1$, $\mu_{10} = 2$, $\mu_{21} = 4$, $\mu_{32} = 2$, $\mu_{43} = 2$, то, согласно формулам (2.2) и (2.3), находим $P_0 = 0,46$; $P_1 = 0,23$; $P_2 = 0,17$; $P_3 = 0,086$; $P_4 = 0,043$.

Следовательно, наибольшую часть времени система будет находиться в состоянии S_0 отсутствия «сбоев». Эффективность изучения данного параграфа составляет 0,46. Возникает важная задача повышения эффективности. В общем случае, как показано в [24], данная система управляема и на каждом шаге можно найти значение плотности $\mu_{i+1,i}$, такое, чтобы вероятность состояния S_i имела заданное значение, и тем самым повысить эффективность работы данной системы.

Поскольку потоки «сбоев» и устраненных «сбоев» являются простейшими, время T_i между «сбоями» при переходе от S_i к S_{i+1} , время $T_i^{(1)}$ между устраненными «сбоями» при переходе от S_{i+1} к S_i имеют показательное распределение, а вероятность того, что это время будет в диапазоне от t_1 до t_2 , вычисляется соответственно по формулам:

$$P(t_1 < T_i < t_2) = e^{-\mu_{i,i+1} t_1} - e^{-\mu_{i,i+1} t_2}; \quad (2.5)$$

$$P(t_1 < T_i^{(1)} < t_2) = e^{-\mu_{i+1,i} t_1} - e^{-\mu_{i+1,i} t_2}. \quad (2.6)$$

Вероятность того, что данное время будет меньше или равно t , определяется соответственно из выражений:

$$P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\mu_{i,i+1} t}; \quad (2.7)$$

$$P(T_i^{(1)} \leq t) = 1 - e^{-\mu_{i+1,i} t}. \quad (2.8)$$

Так, для рассмотренного примера вероятность того, что за первые 0,5 ч не будет «сбоев» в восприятии учебного материала, при плотности $\mu_{01} = 1$ «сбой» за 0,25 ч составит $P(T_0 \leq 0,5) = 1 - e^{-0,25 \cdot 2} = 0,4$. Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: в среднем у 4 обучаемых из 10 не будет «сбоев» в восприятии учебного материала в течение 0,5 ч.

Еще один марковский процесс, протекающий в системе «учебник – учащиеся», связан с простейшими потоками изучаемых и изученных фрагментов. Данный процесс можно охарактеризовать вероятностями, аналогичными (2.2) и (2.3), причем в числителях указаны плотности изучаемых, а в знаменателях – изученных фрагментов. Эффективность и вероятности того, что время между изучаемыми и время между изученными фрагментами будет в указанном диапазоне, вычисляются соответственно по формулам, аналогичным формулам (2.4)–(2.8).

3. Надежность системы, которая связана с изучением данного материала в течение данного времени $T < t$. Если поток «сбоев» – простейший, время T между сбоями имеет показательное распределение с функцией распределения $F(t)$, а надежность системы характеризуется вероятностью [10]:

$$p(t) = P(T < t) = 1 - F(t) = e^{-\mu t}. \quad (2.9)$$

Если плотность «сбоев» $\mu = \mu(t)$, т. е. зависит от времени, то поток будет не стационарным пуассоновским и, как показано в [10], в этом случае

$$p(t) = P(T < t) = 1 - F_{t_0}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \mu(t) dt}, \quad (2.10)$$

где t_0 – фиксированный момент времени, при этом

$$\mu(t) = f(t) / p(t), \quad (2.11)$$

где $f(t)$ – плотность распределения времени T между «сбоями».

Рассмотрим примеры.

Из статистических данных было установлено, что плотность распределения времени чтения данного учебника без «сбоев» имеет распределение, показанное: а) – на рис. 2.3; б) – на рис. 2.5. Зависимость плотности потока «сбоев» от времени представлена на рис. 2.4 и 2.6. Требуется определить надежность данной системы.

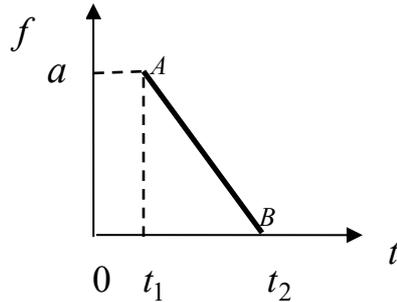


Рис. 2.3

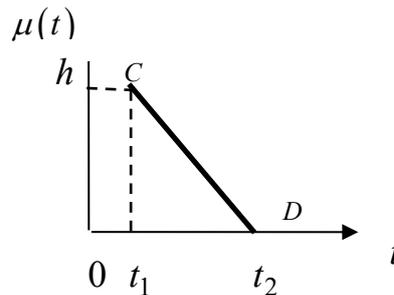


Рис. 2.4

По свойству плотности распределения площадь под прямой $f(t)$ равна 1, отсюда для случая а) находим $a = \frac{2}{t_2 - t_1}$. Используем уравнение прямой, проходящей через точки A и B :

$$\frac{t - t_1}{f(t) - a} = \frac{t_2 - t_1}{-a}, \quad (2.12)$$

отсюда

$$f(t) = \frac{2(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)^2} (t > 0). \quad (2.13)$$

Аналогично для $\mu(t)$ из уравнения прямой, проходящей через точки C и D :

$$\mu(t) = h(t_2 - t) / (t_2 - t_1). \quad (2.14)$$

С учетом полученных выражений для $\mu(t)$, $f(t)$ из (2.12) можно записать

$$p(t) = \frac{f(t)}{\mu(t)} = \frac{2(t_2 - t)(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)^2 h(t_2 - t)} = \frac{2}{(t_2 - t_1)}. \quad (2.15)$$

Следовательно, в рассматриваемом примере надежность является постоянной величиной, не зависящей от времени и определяемой

параметрами t_1 , t_2 и h . Для того чтобы функция $p(t)$ имела смысл, необходимо, чтобы $t_2 - t_1 \geq \frac{2}{h}$.

Случай б) представлен на рис. 2.5.

По свойству плотности распределения находим $a = \frac{1}{t_2 - t_1}$. Таким образом,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_2 - t_1} & \text{при } t \in [t_1, t_2]; \\ 0 & \text{при } t \notin [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (2.16)$$

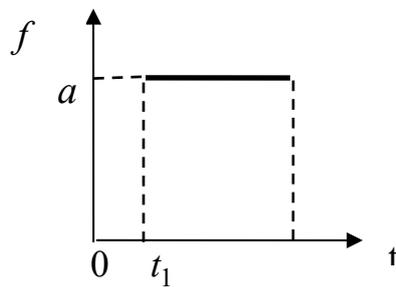


Рис. 2.5

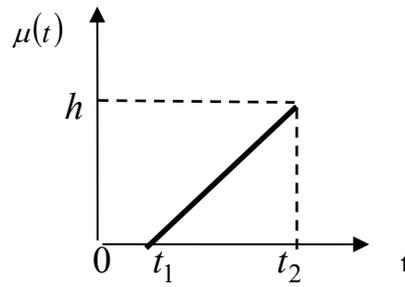


Рис. 2.6

Уравнение для $\mu(t)$ находится из уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\mu(t) = h \frac{(t - t_1)}{t_2 - t_1} \quad (t > 0). \quad (2.17)$$

Тогда

$$p(t) = \frac{f(t)}{\mu(t)} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{1}{h(t - t_1)} = \frac{1}{h(t - t_1)} \quad (t > 0). \quad (2.18)$$

Значит, в данном случае $p(t)$ имеет гиперболическую зависимость от времени. Если в потоке не выполняется условие последействия, то вместо простейшего потока рассматривается поток Эрланга k -го порядка, получающийся в результате разряжения простейшего потока. В этом случае плотность $f_k(t)$ распределения времени между соседними точками («сбоями» в изучении учебного материала) потока Эрланга k -го порядка вычисляется по формуле

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{\mu(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Тогда функция распределения

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(t) dt. \quad (2.20)$$

Надежность системы в этом случае можно рассчитать по формуле

$$p_k(t) = P_k(T > t) = 1 - F_k(t). \quad (2.21)$$

Так, например, если поток «сбоев» можно аппроксимировать потоком Эрланга третьего порядка, то надежность $p_3(t)$ составит

$$1 - \int_0^t \frac{\mu(\mu t)^3}{3!} e^{-\mu t} dt = 1 - \frac{\mu^2 e^{-\mu t}}{3!} \left(-t^3 + \frac{3}{\mu} t^2 + \frac{6}{\mu^2} t + \frac{6}{\mu^3} \right). \quad (2.22)$$

Каждую страницу учебника можно рассматривать как карту, содержащую, например, 32 горизонтальные и 64 вертикальные строки. В этом случае учебник в целом и любой его раздел представляет собой карту, если сделать соответствующую плоскую развертку. Тогда можно говорить о пуассоновском поле фрагментов данной области со среднестатистической плотностью, равной λ . При этом каждый фрагмент интерпретируется как точка на карте, для чего ему ставится в соответствии либо точка, характеризующая его начало, либо точка, координаты которой представляют собой средние арифметические соответственно первых и вторых координат символов или точек (если речь идет о графике) данного фрагмента.

Например, пусть фрагмент a_{ij} – это определение случайного события и a_{ij} = «Случайным событием (возможным событием или просто событием) называется любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти». Пусть начальный символ «С» этого фрагмента имеет координаты (7, 4), тогда эту точку можно рассматривать как представителя указанного фрагмента. Однако такое соответствие является грубым и неполным, так как не учитывается общее количество символов. Поэтому желательно рассматривать все символы фрагмента.

Для рассматриваемого примера фрагмент разбивается на 3 строки, содержащие соответственно 58, 64 и 24 символа, включая пробелы. Номера строк – 4, 5 и 6. Четвертая строка начинается с седьмого символа, две другие – с первого. Имеем следующие средние арифметические суммы координат символов:

$$x(a_{ij}) = \frac{7 + 8 + \dots + 64 + 1 + 2 + \dots + 64 + 1 + 2 + \dots + 24}{58 + 64 + 24} = 30,83; \quad (2.23)$$

$$y(a_{ij}) = \frac{58 \cdot 4 + 64 \cdot 5 + 24 \cdot 6}{58 + 64 + 24} = 4,77. \quad (2.24)$$

Пусть R – расстояние от произвольного фрагмента до ближайшего к нему, выраженное в условных единицах. Для того чтобы R было меньше r , необходимо, чтобы в круг радиуса r попала хотя бы одна точка (кроме данной). В силу отсутствия последействия, вероятность этого события не зависит от того, есть ли в центре круга точка. Значит, функция распределения R будет иметь вид

$$F(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \quad \text{при } r > 0. \quad (2.25)$$

Продифференцировав данную функцию, найдем плотность распределения данного расстояния:

$$f(r) = \begin{cases} 2\pi r \lambda e^{-\pi r^2 \lambda} & \text{при } r > 0; \\ 0 & \text{при } r = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Формула (2.26) описывает распределение Рэля с числовыми характеристиками $m_r = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$, $D_r = \frac{4-\pi}{4\pi\lambda}$, которые для каждого фрагмента определяют соответственно среднее расстояние от данного фрагмента до ближайшего к нему и разброс этого расстояния.

В случае если $\lambda = \lambda(x, y)$, т. е. зависит от координат точки (фрагмента), то, как показано в [1], функция распределения R запишется в виде

$$F(r) = 1 - e^{-\int_S \lambda(x,y) dx dy} \quad (2.27)$$

где S – площадь фигуры (для рассматриваемого случая это площадь круга радиуса r).

Исходя из предложенного представления учебника как системы, можно утверждать, что учебник – это иерархическая многофункциональная система, поскольку наряду с обучающей функцией учебник должен выполнять развивающую и воспитательную функции. Развивающая функция связана с развитием умственных способностей, творческого подхода, интереса и т. д. Воспитательная функция должна способствовать развитию трудолюбия, ответственности, патриотизма на примере жизнедеятельности великих ученых.

Система «учебник – учащиеся» взаимодействует с внешней средой через а) связь обучаемых с преподавателем (событие A), б) связь обучаемых с другими учебными пособиями (событие B), в) консультации у одноклассников, родителей, знакомых (C), г) репетиторство (D). Согласно статистическим данным,

$$\begin{aligned} P(A \ B \ C \ D) &= 0,3; \quad P(\bar{A} \ B \ C \ D) = 0,03; \quad P(A \ \bar{B} \ C \ D) = 0,1; \quad P(\bar{A} \ \bar{B} \ C \ D) = 0,03; \\ P(A \ B \ \bar{C} \ D) &= 0,1; \quad P(\bar{A} \ B \ \bar{C} \ D) = 0,05; \quad P(A \ \bar{B} \ \bar{C} \ D) = 0,05; \quad P(\bar{A} \ \bar{B} \ \bar{C} \ D) = 0,01; \\ P(A \ B \ C \ \bar{D}) &= 0,05; \quad P(\bar{A} \ B \ C \ \bar{D}) = 0,05; \quad P(A \ \bar{B} \ C \ \bar{D}) = 0,03; \quad P(\bar{A} \ \bar{B} \ C \ \bar{D}) = 0,01; \\ P(A \ B \ \bar{C} \ \bar{D}) &= 0,05; \quad P(\bar{A} \ B \ \bar{C} \ \bar{D}) = 0,03; \quad P(A \ \bar{B} \ \bar{C} \ \bar{D}) = 0,1; \quad P(\bar{A} \ \bar{B} \ \bar{C} \ \bar{D}) = 0,01. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность одной связи будет равна

$$p_1 = 0,01 + 0,01 + 0,03 + 0,1 = 0,15;$$

двух –

$$p_2 = 0,03 + 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,03 + 0,05 = 0,26;$$

трех –

$$p_3 = 0,03 + 0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,28;$$

четырёх –

$$p_4 = 0,3.$$

Среднее число связей

$$m = 1 p_1 + 2 p_2 + 3 p_3 + 4 p_4 = 0,15 + 2 \cdot 0,26 + 3 \cdot 0,28 + 4 \cdot 0,3 = 2,71.$$

Система «учебник – учащиеся» обладает свойством оптимальности, поскольку хороший учебник обеспечивает выполнение запланированных целей при наилучшем использовании потенциала системы, включая структуру, подбор соответствующих задач и примеров.

Учебник обладает свойством мультипликативности, согласно которому результаты некоторых свойств определяются умножением относительно свойства каждого компонента системы. Действительно, вероятность усвоения данной темы равна произведению вероятностей усвоения слагающих ее параграфов, вероятность усвоения раздела учебника равна произведению вероятностей усвоения тем данного раздела, вероятность усвоения учебника равна произведению вероятностей усвоения его разделов.

Система «учебник – учащиеся» обладает синергетическим свойством, состоящим в том, что сумма эффективностей подсистем меньше эффективности системы в целом. В самом деле, если эффективность системы «учебник – учащийся» трактовать как результат его изучения данным учащимся (данной группой учащихся), то учебнику и его темам (или разделами), образующим подсистемы учебника, ставятся в соответствие баллы данного обучаемого (средние баллы группы обучаемых). Тогда изучение тем (разделов) в произвольном порядке, без связи друг с другом может иметь вообще нулевой эффект.

Итак, подведем итог. Построенная на основе учебника обучающая система может найти широкое применение в учебном процессе, особенно при дистанционной форме обучения, а также в системах ИИ.

§ 2.4. Учебник и учебное пособие как обучающие интеллектуальные системы

В настоящее время интеллектуализация современных информационно-образовательных ресурсов является одним из наиболее перспективных направлений совершенствования учебного процесса. Для решения данной проблемы требуются совместные усилия педагогов, психологов, специалистов в области математических методов систем ИИ, прикладной лингвистики и информационных образовательных технологий.

Методы ИИ применяются для решения самых различных задач. Например, авторами данной монографии разработаны методы автоматического распознавания структурированности текстов [60], [61]. Многие прикладные вопросы решаются с помощью теории формальных грамматик.

Так, формальные грамматики используются для контент-анализа мнений [6], автоматизации семантического анализа текста технического задания [90].

Крайне важным является применение методов ИИ в учебном процессе. В [52] разработана синергетическая система учебного процесса как лингвистическая модель с использованием аппарата формальных грамматик и языков. В [12] представлена экспертная система «Электронный сборник упражнений по основам элементарной логики». Интеллектуальную информационную систему предлагается использовать для оптимального контроля знаний учащихся [19].

Актуальной задачей является применение методов ИИ к учебным материалам (учебникам, учебным пособиям, конспектам лекций, практикумам и т. д.). Примером такого подхода может служить работа [55], где учебник рассматривается как обучающая система.

Цель данного параграфа заключается в рассмотрении учебного пособия как интеллектуальной системы обучения. Для ее достижения решены следующие задачи:

- 1) разработана автоматная грамматика описания структуры учебного пособия;
- 2) с позиций теории формальных грамматик рассмотрена структура параграфа; показано, как проводить более подробную детализацию учебного пособия;
- 3) разработан метод описания онтологий учебного пособия в виде цепочек формального языка;
- 4) рассмотрены вопросы представления формальной грамматикой процесса изучения учащимися учебного пособия.

Применение новых интеллектуальных информационных технологий способствует повышению эффективности обучения, а также является незаменимым инструментом при самостоятельной подготовке студентов, особенно при дистанционной форме обучения. Интенсивное использование инноваций является сильнейшим аргументом в конкурентной борьбе на мировом и российском рынке образовательных услуг.

2.4.1. Описание и анализ структуры учебного пособия с помощью аппарата теории формальных грамматик

Учебное пособие должно быть четко структурировано, что предполагает возможность выделения его составных частей и их соответствие определенным требованиям. Возможны разные подходы для анализа структурированности текстов: графовый, дискурсивный [60, 61]. В данном разделе используется аппарат формальных грамматик.

Любое учебное пособие (или учебник) имеет типовую линейную структуру, представленную на рис. 2.7.

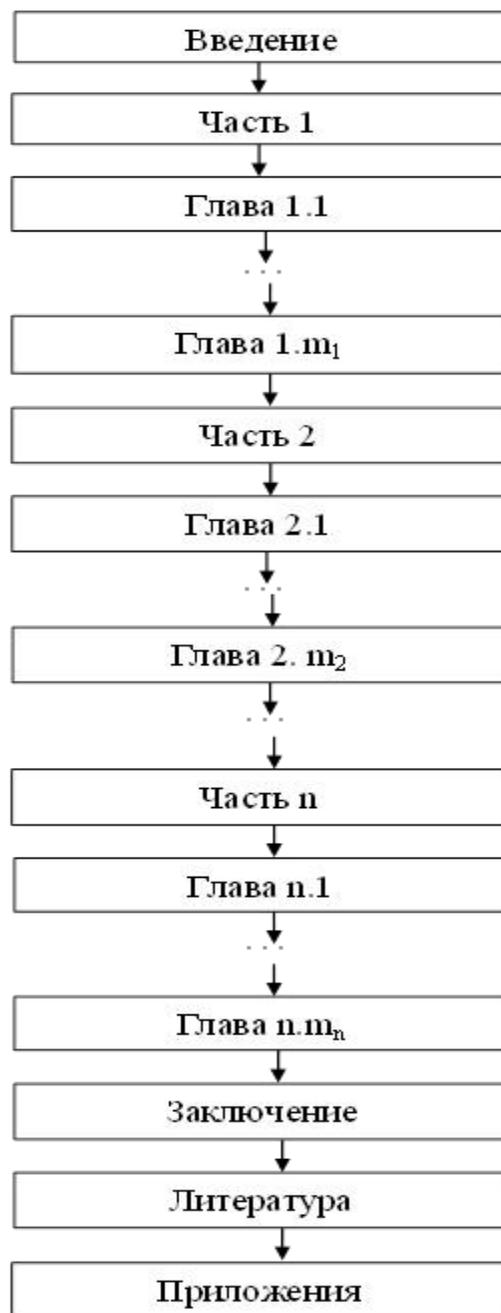


Рис. 2.7

Подобные структуры описываются автоматными грамматиками вида

$$G = \langle I, N, T, R \rangle,$$

где I – начальный символ; N – нетерминальный алфавит, $N = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$; T – терминальный алфавит, $T = \{\langle \text{Введение} \rangle, \langle \text{Часть 1} \rangle, \dots, \langle \text{Часть } N \rangle, \langle \text{Глава 1.1} \rangle, \dots, \langle \text{Глава } n.m_n \rangle, \langle \S 1.1.1 \rangle, \dots, \langle \S n.m_n.k_n \rangle\}$; R – совокупность правил вывода.

Правила вывода имеют вид

$I \rightarrow \langle \text{Учебное пособие} \rangle A_1, A_1 \rightarrow \langle \text{Введение} \rangle A_2, A_2 \rightarrow \langle \text{Часть 1} \rangle A_3,$
 $A_3 \rightarrow \langle \text{Глава 1.1} \rangle A_4, A_4 \rightarrow \langle \text{\$1.1.1} \rangle A_5, A_5 \rightarrow \langle \text{1.1.1} \rangle A_6$ и т. д.

Возможна более подробная детализация структуры учебного пособия (например, описание структуры каждого параграфа). Так, в учебном пособии [66] параграф, посвященный финансовым решениям в условиях рынка и оценки текущей стоимости фирмы (§ 7), описывается следующим образом (рис. 2.8).

Нумерация блоков слева обозначает номер структурного звена.

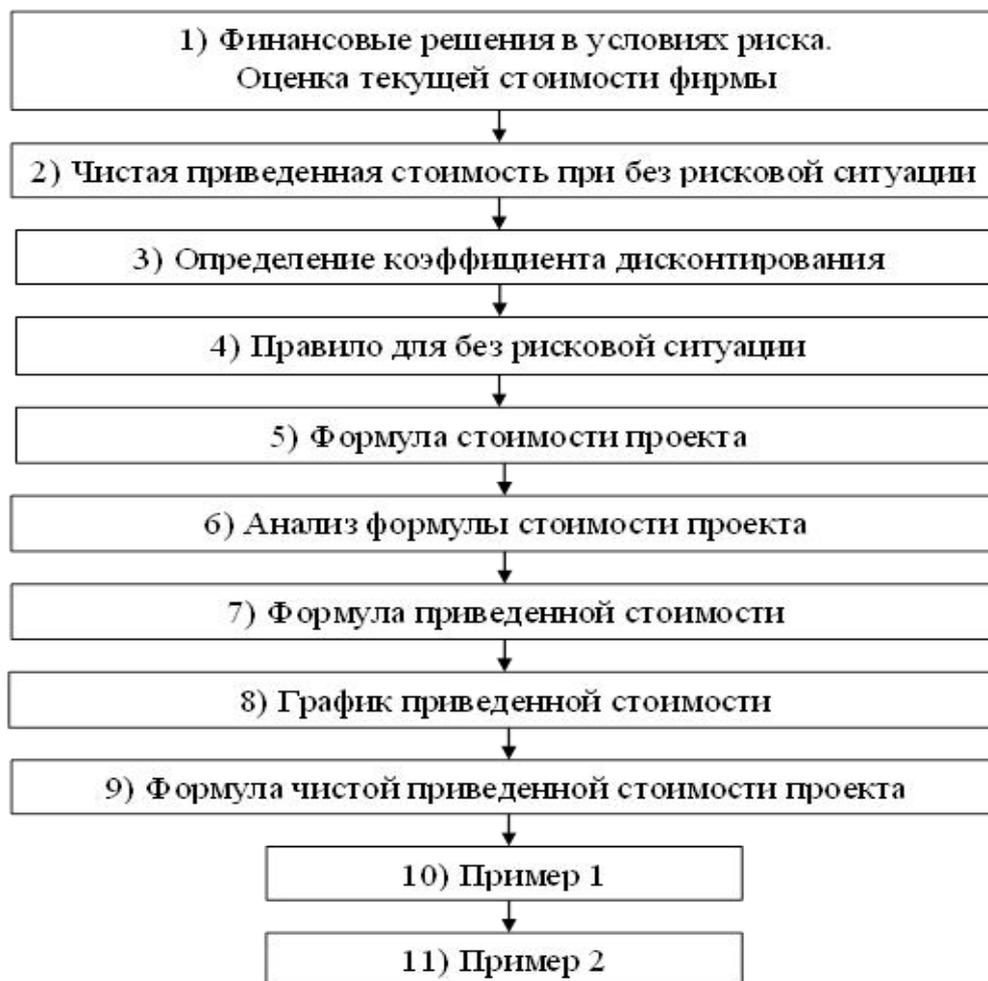


Рис 2.8

Структуру § 7 учебного пособия [66] согласно рис. 2.8 можно описать автоматной грамматикой:

$\langle I, N, T, R \rangle$.

В данной грамматике: $N = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$; T – это структурные звенья системы, изображенной на рис. 2.8; R – правила вида

$I \rightarrow \text{\$ 7 1) } A_1, A_1 \rightarrow \text{2) } A_2, A_2 \rightarrow \text{3) } A_3, A_3 \rightarrow \text{4) } A_4, A_4 \rightarrow \text{5) } A_5,$
 $A_5 \rightarrow \text{6) } A_6, A_6 \rightarrow \text{7) } A_7, A_7 \rightarrow \text{8) } A_8, A_8 \rightarrow \text{9) } A_9, A_9 \rightarrow \text{10) } A_{10}, A_{10} \rightarrow \text{11).}$

2.4.2. Контекстно-свободная грамматика онтологии

Содержащиеся в учебном пособии онтологии также можно представить в виде цепочки языка. Например, в [51] онтология «Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка» представлена графически следующим образом (рис. 2.9).



Рис. 2.9

Данная онтология описывается грамматикой $\langle I, N, T, R \rangle$, где $I \rightarrow$ «Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка» A_1 ,

$A_1 \rightarrow 1) A_2, A_2 \rightarrow 2) A_3, A_3 \rightarrow 3) A_4, A_4 \rightarrow 4) A_5 A_6, A_5 \rightarrow 5), A_6 \rightarrow 6) A_7, A_7 \rightarrow 7) A_8, A_8 \rightarrow 8) A_9 10) A_{10}, A_9 \rightarrow 12), A_{10} \rightarrow 11) A_{11}, 13) A_{11} \rightarrow 13).$

Терминальный алфавит – структурные звенья {«Обыкновенное дифференциальное уравнение», 1), 2), ..., 13)}; нетерминальный алфавит – $N = \{I, A_1, A_2, \dots, A_{11}\}$.

Данная грамматика является контекстно-свободной грамматикой.

2.4.3. Грамматическое представление процесса изучения учебного пособия

Процесс изучения учебного пособия также можно описать грамматикой, как это сделано в работе [57].

В типичный параграф входят следующие фрагменты учебного материала: A_0 – вступление, A_1 – определение, A_2 – теорема, A_3 – доказательство, A_4 – следствие, A_5 – пример, A_6 – задача, A_7 – пояснение, A_8 – рекомендации.

В общем случае такой параграф описывается грамматикой

$$G = \langle I, N, T, R \rangle,$$

где $N = \{B_1, B_2, \dots, B_8\}$; $T = \{A_1, A_2, \dots, A_8\}$; R – совокупность правил вывода.

Правила R имеют вид: 1) $I \rightarrow A_0 B$, 2) $B_0 \rightarrow A_1 B_1$, 3) $B_1 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 2, 4-8}$), 4) $B_2 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 5) $B_3 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 6) $B_4 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 7) $B_5 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 8) $B_6 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 9) $B_7 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 10) $B_8 \rightarrow A_i B_i$ ($i = \overline{0, 8}$), 11) $B_i \rightarrow A_{i+1}$, 12) $B_8 \rightarrow A_8$.

Здесь в правиле 3) исключен случай следования из определения без изучения формулировки теоремы прямо на ее доказательство.

Пусть, например, некоторый параграф имеет такую последовательность перечисленных фрагментов:

$$A_0 A_1 A_7 A_5 A_2 A_3 A_7 A_4 A_6 A_8.$$

Пусть процесс изучения этих фрагментов данным учащимся происходит согласно схеме

$$A_1 A_7 A_5 \underbrace{A_1}_{A_5} \underbrace{A_2}_{A_3} A_0 A_2 A_3 A_7 A_4 A_6.$$

Из данной схемы видно, что к фрагментам A_1 , A_5 , A_2 и A_3 учащийся возвращается дважды. Здесь дугами снизу показаны дополнительные фрагменты. Чем больше дополнительных фрагментов и символов в них, тем более трудоемким является усвоение данного учебного материала.

Вывод данной цепочки будет происходить по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
I &\xrightarrow{1)} A_0 B_0 \xrightarrow{2)} A_0 A_1 B_1 \xrightarrow{3)} A_0 A_1 A_7 B_7 \xrightarrow{9)} A_0 A_1 A_7 A_5 B_5 \xrightarrow{7)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 B_4 \xrightarrow{6)} \\
&\xrightarrow{6)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 B_5 \xrightarrow{7)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 B_2 \xrightarrow{4)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 B_3 \xrightarrow{5)} \\
&\xrightarrow{5)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 A_2 B_2 \xrightarrow{4)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 A_2 A_3 B_2 \xrightarrow{5)} \\
&\xrightarrow{5)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 A_2 A_3 A_7 B_7 \xrightarrow{9)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 A_2 A_3 A_7 A_4 B_4 \xrightarrow{6)} \\
&\xrightarrow{6)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 A_2 A_3 A_7 A_4 A_6 B_6 \xrightarrow{8)} A_0 A_1 A_7 A_5 A_1 A_5 A_2 A_3 A_2 A_3 A_7 A_4 A_6 A_8.
\end{aligned}$$

Рассмотрен упрощенный вариант направленности «движения» студента по учебному пособию с возможностью перехода из одного блока в другой, кроме одного указанного перехода. Переходный режим можно сделать более строгим, если запретить еще некоторые переходы (например, из <Введения> в <Пояснения> и т. п.). В этом случае строится соответствующая грамматика, которая является своеобразным «автоматическим регулятором» при определении последовательности изучения студентом учебного пособия (учебника). При «движении» студента по учебному пособию целесообразно учитывать типологию учащихся. Для этого можно использовать ее математическое описание [28].

Рассмотренные методы грамматического описания и анализа структуры учебного пособия, его элементов, онтологий и построение грамматик обучения учащихся могут применяться не только по четким данным, но и по нечеткой информации, для чего используются вероятностные и нечеткие грамматики [76, 77, 108].

Интеллектуальные системы обучения являются практическим результатом применения методов и средств ИИ в области автоматизированного обучения и представляют собой новое поколение учебных систем.

§ 2.5. Информатизация решения вероятностных задач

Значение теории вероятностей в математическом образовании студентов в настоящее время возрастает. Имеется противоречие между необходимостью приобретения обучающимися системных знаний и умений в области теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов, с одной стороны, и фрагментарностью и низким уровнем реально усваиваемого стохастического материала – с другой. По мнению Карла Пирсона, в математике нет другой области, в которой столь же легко допустить ошибку, как в теории вероятностей [81]. Формулы полной вероятности и Байеса сплошь и рядом применяются студентами не по назначению, студенты не проверяют наличие полной группы несовместных событий, неверно определяют вероятности гипотез [81, с. 191]. Для решения данной проблемы следует использовать

новые информационные технологии. Предметная область «Математика» открывает большие возможности для применения информационных технологий в процессе обучения [85]. Технологические приемы решения вероятностных задач разработаны в [54], [106]. Методам решения проблем вероятностных задач уделяется большое внимание за рубежом. Например, во французской средней и старшей школе учащиеся сначала должны разработать вероятностную ситуацию, а затем смоделировать ее с помощью программного обеспечения [131]. В [129] рассматриваются проблемы преподавания условных вероятностей.

В настоящее время необходимо разрабатывать информационные технологии решения математических задач [63, 64].

Целью данного исследования является разработка метода, который позволит автоматически решать задачи по теме «Алгебра событий». Для этого следует дать классификацию задач по разбору вероятностных ситуаций; алгоритмизировать их решение; показать использование разработанного метода на примерах.

Постановка задач по теории вероятностей включает *ситуации*. Ситуацию можно рассматривать как некоторое сложное событие, составленное из элементарных событий, связанных операциями сложения, умножения и взятия противоположного события. Как правило, при анализе ситуации можно судить о составляющих ее элементарных событиях с заданной вероятностью, поэтому и результирующее событие, которое описывает данную ситуацию, вообще говоря, имеет определенную вероятность.

Обычно при анализе сложной ситуации применяют так называемую формулу полной вероятности и формулы Байеса. Однако, как показывает опыт, эти формулы трудно вычленивать при анализе сложных ситуаций. К тому же при компьютеризации процесса обучения было бы целесообразно использовать вычислительную технику для анализа различных ситуаций и выработки оптимального решения. Поэтому необходим более простой способ анализа ситуации для нахождения оптимального варианта. Этот способ должен вытекать из простейших логических законов мышления, кроме того, необходимо иметь возможность на основе этого способа организовать работу по анализу ситуаций в виде работы в диалоговом режиме компьютера и пользователя.

Пусть имеется некоторое словесное описание ситуации, состоящее из определенных предложений (фраз). Предложения могут быть простыми и сложными.

На первом шаге алгоритма компьютер запрашивает упорядоченный перечень элементарных событий. Самый простой способ их выделения заключается в том, что в качестве элементарных событий рассматриваются простые предложения, которые участвуют в словесном описании ситуации

(разумеется, при наличии определенных навыков элементарные события можно выбирать более рационально). Итак, пусть выделены события A_1, A_2, \dots, A_S .

На втором шаге осуществляется перебор всевозможных произведений вида $\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \dots \tilde{A}_S$, где \tilde{A}_i – это либо A_i , либо \bar{A}_i ($i = 1, 2, \dots, S$). Этот перебор нетрудно организовать путем лексикографического упорядочения наборов. В дальнейшем, при анализе ситуации, очевидно, будут рассматриваться далеко не все наборы указанного вида, так как во многих наборах найдутся такие элементарные события, совместное осуществление которых невозможно. Компьютер задает пользователю вопрос: «Возможно ли совместное осуществление событий \tilde{A}_i и \tilde{A}_j ?». В память компьютера заносятся лишь те наборы, в которых все составляющие события могут происходить совместно.

На третьем шаге алгоритма пользователь вычисляет условные вероятности событий в каждом наборе и загружает эти данные в компьютер. Затем компьютер производит необходимые операции и выдает результат.

При анализе логических ситуаций все решаемые задачи делятся на 2 класса.

Задачи первого класса связаны с вычислением вероятности глобального события, описывающего данную ситуацию.

Ко второму классу относятся задачи, связанные с выбором оптимального (наиболее вероятного) пути осуществления глобального события, характеризующего данную ситуацию. При решении задач первого класса используются операции умножения и сложения. При решении задач второго класса добавляется еще и операция деления.

Рассмотрим **пример**.

При планировании занятия преподаватель предполагает дать задачу на закрепление изученного материала. Задача состоит из двух довольно трудных подзадач по двум ранее изученным темам. Исходя из предыдущего опыта решения учащимися подобных задач, он предполагает, что студент Ивлев может решить каждую из подзадач с вероятностью 0,65, Гумбин может решить первую подзадачу с вероятностью 0,55, а Зайцев может решить вторую подзадачу с вероятностью 0,75. Поскольку время, отведенное на решение, жестко ограничено, преподаватель решает сначала вызвать Ивлева, а если с какой-то из двух подзадач Ивлев не справится, то предложит решить эту задачу (подзадачу 1) Гумбину либо Зайцеву (подзадачу 2). Задача должна быть решена. Необходимо оценить достоверность этого исхода, т. е. найти вероятность соответствующего события.

Введем в рассмотрение элементарные события: A_1 – Ивлев решил подзадачу 1; A_2 – Ивлев решил подзадачу 2; A_3 – Гумбин решил подзадачу 1; A_4 – Зайцев решил подзадачу 2.

Возможны переборы: A_1A_2 , $\bar{A}_1A_2A_3$, $A_1\bar{A}_2A_4$, $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4$.

Искомая вероятность: $0,65 \cdot 0,65 + 0,35 \cdot 0,65 \cdot 0,55 + 0,65 \cdot 0,35 \cdot 0,75 + 0,35 \cdot 0,35 \cdot 0,55 \cdot 0,75 = 0,77$.

Результирующая вероятность, вообще говоря, неудовлетворительна. Поэтому преподаватель делает вывод: либо вызвать других учащихся, о подготовленности которых он также имеет определенное априорное знание, либо несколько упростить предложенную задачу.

В заключение отметим, что приведенный пример довольно простой и не несет определенной смысловой нагрузки, так как он служит лишь для наглядного представления работы предложенного алгоритма.

Другая обширная область применения рассмотренного алгоритма связана с самоконтролем обучаемыми решения вероятностных задач из раздела «Алгебра событий».

Рассмотрим применение предлагаемого метода на конкретных примерах.

Задача 1

Два студента решают одну и ту же задачу независимо друг от друга. Вероятность правильного решения задачи первым студентом составит 0,7, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что задача не будет решена ни одним студентом.

Решение

Введем в рассмотрение два элементарных события: A_1 – задача решена первым студентом, A_2 – задача решена вторым студентом. Глобальное событие B (событие, вероятность которого требуется найти в условии задачи) – задача не решена ни одним студентом.

Перечень всевозможных наборов: A_1A_2 , $A_1\bar{A}_2$, $A_2\bar{A}_1$, $\bar{A}_1\bar{A}_2$. Компьютер спрашивает, какие из этих наборов возможны в силу совместности слагающих их элементарных событий и совместности каждого из этих элементарных событий в данном наборе с глобальным событием.

В нашем примере наборы A_1A_2 , $A_1\bar{A}_2$, $A_2\bar{A}_1$ невозможны в силу того, что каждый из них содержит событие, несовместное с глобальным событием B . Поэтому остается единственный набор $\bar{A}_1\bar{A}_2$. Участвующие в этом наборе события \bar{A}_1 и \bar{A}_2 совместны и независимы. Следовательно, для решения задачи достаточно посчитать вероятность события $\bar{A}_1\bar{A}_2$, равного произведению событий \bar{A}_1 и \bar{A}_2 . События \bar{A}_1 и \bar{A}_2 независимы, поэтому $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2)$. И, наконец, искомый ответ: 0,12.

Задача 2

Для допуска к экзамену студент должен сдать три темы. Вероятности сдачи тем равны соответственно 0,7; 0,65; 0,60. При допуске к экзамену студент может сдать его с вероятностью 0,9.

Найти вероятность сдачи экзамена.

Решение

Выберем элементарные события: A_1 – сдача первой темы, A_2 – сдача второй темы, A_3 – сдача третьей темы, A_4 – сдача экзамена при условии допуска.

Пусть глобальное событие B – сдача экзамена.

Все множество наборов включает в себя $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$, $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$, $A_1 A_2 A_3 A_4$, $\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4$, $A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4$, $A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4$, $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4$, $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$, $A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4$, $\bar{A}_1 A_2 A_3 \bar{A}_4$, $A_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4$, $A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$.

Из этих наборов возможны только 3: $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4$, $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$.
Остальные наборы невозможны в силу несовместности составляющих их элементарных событий, а также несовместности некоторых из этих событий с глобальным событием B .

Процесс выделения возможных наборов осуществляет компьютер путем задания пользователю вопросов типа: «Возможно ли совместное существование данных двух событий?».

Затем вычисляются вероятности событий, заданных выделенными наборами:

$P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(A_1) = 0,7$, так как событие A_1 влечет событие $A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$;

$P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4) = P(\bar{A}_1) P(A_2) = 0,195$, так как события \bar{A}_1 и A_2 независимы и $A_2 = A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$ (т. е. A_2 влечет событие $\bar{A}_3 \bar{A}_4$);

$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) = 0,063$, так как события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ попарно несовместны и $A_3 = A_3 \bar{A}_4$ (\bar{A}_4 – следствие A_3);

$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) P(A_4) = 0,00002$.

Согласно алгоритму событие B может быть представлено в виде суммы 4 слагаемых:

$$B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4,$$

поэтому $P(B) = 0,7 + 0,195 + 0,063 + 0,00002 = 0,9682$.

Задача 3

Производится поставка однотипных партий товара на 3 склада. Вероятность обнаружения брака на первом складе равна 0,04, на втором – 0,1, на третьем – 0,09. При обнаружении брака на одном из складов бракуется

вся поставка товара. Определить вероятность того, что вся поставка товара будет забракована, если поставляются две однотипные партии.

Решение

Элементарные события: A_1 – попадание хотя бы одной бракованной партии на первый склад; A_2 – на второй склад; A_3 – на третий склад; B – глобальное событие (поставка товара забракована).

Возможные наборы: $\bar{A}_1 A_2 A_3, A_1 \bar{A}_2 A_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3, A_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + \\ &+ P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = \\ &= P(A_2 A_3) + P(A_1 A_3) + P(A_3 A_4) + P(A_1 A_2) + P(A_2 A_4) + P(A_1 A_4), \end{aligned}$$

где A_4 дополняет $A_1 + A_2 + A_3$ до достоверного события.

Отсюда

$$\begin{aligned} P(B) &= 2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,04 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,09 \cdot 0,77 + 2 \cdot 0,04 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,77 + \\ &+ 2 \cdot 0,04 \cdot 0,77 = 0,41. \end{aligned}$$

Коэффициент 2 применяется вследствие того, что всюду рассматриваются варианты попадания 2 однотипных партий в оба места.

Задача 4

На устройство распознавания изображений поступил образ одного из двух возможных объектов x_1, x_2 , причем образ первого объекта может поступать в два раза чаще, чем второго. Наличие помех может искажать образ объекта: вместо поступившего образа объекта x_1 устройство распознавания примет решение о поступлении образа объекта x_2 и наоборот. Характеристики устройства распознавания связи таковы, что образ объекта x_1 искажается в 10 % случаев, а образ объекта x_2 – в 40 % случаев. Требуется определить вероятность того, что поступил образ объекта x_1 , если принято решение об объекте x_1 .

Решение

Элементарные события: A_1 – поступил x_1 , A_2 – решение x_2 , B_1 – поступил x_1 , B_2 – решение x_2 . Глобальное событие C – принятие решения об объекте x_1 .

Возможны наборы: $\bar{A}_1 A_2 B_1 \bar{B}_2, A_1 \bar{A}_2 B_1 \bar{B}_2$. Имеем:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{A}_1 A_2 B_1 \bar{B}_2) + P(A_1 \bar{A}_2 B_1 \bar{B}_2) = P(A_2 B_1) + P(A_1 B_1); \\ P(C) &= \frac{1}{3} \cdot 0,4 + \frac{2}{3} \cdot 0,9 = \frac{11}{15} = 0,7333. \end{aligned}$$

Тогда искомая вероятность равна отношению

$$\frac{P(A_1B_1)}{P(A_2B_1)+P(A_1B_1)} = \frac{0,6}{0,7333} = 0,818.$$

Расширенный перечень задач по теме «Алгебра событий» можно найти в работе [53].

Разработанный метод алгоритмизации решения вероятностных задач позволит автоматизировать процесс их решения студентами и организовать проверку полученных знаний с помощью информационных технологий, что особенно полезно в системах дистанционного образования.

ГЛАВА 3

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ

§ 3.1. Матрично-вероятностное моделирование обучения

Математическое моделирование процесса обучения является актуальной задачей, важность которой возрастает с широким использованием информационных технологий в социально-экономической жизни общества и, в частности, в учебном процессе. Обзор возникающих здесь проблем и пути их решения рассмотрены в [9].

В данном параграфе будет построена математическая модель описания и оценки процесса усвоения ключевых понятий данной темы. Для этого решаются следующие задачи:

1. Графовое моделирование структурно-логической схемы изучения данной темы.
2. Анализ матрицы смежности построенного графа для определения степени усвоения ключевых понятий.
3. Нахождение вероятностных оценок усвоения данного учебного материала.

Пусть A – произвольная тема данного курса и $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ – множество ключевых понятий данной темы. Эти понятия будем интерпретировать вершинами ориентированного графа, дуги которого определим так: из вершины a_i идет дуга в вершину a_j , если ключевое понятие a_i используется при изучении ключевого понятия a_j .

Заметим, что в математических дисциплинах утверждения и примеры, раскрывающие содержание определений и утверждений, также целесообразно считать ключевыми понятиями.

Для примера рассмотрим тему «Основные теоремы теории вероятностей» согласно ее изложению в [80].

Данная тема включает в себя ключевые понятия: a_1 = «сумма двух событий», a_2 = «сумма нескольких событий», a_3 = «пример суммы событий», a_4 = «произведение двух событий», a_5 = «произведение нескольких событий», a_6 = «пример произведения событий», a_7 = «противоположное событие», a_8 = «пример противоположного события», a_9 = «сложное событие», a_{10} = «пример сложного события», a_{11} = «свойства операций над событиями», a_{12} = «зависимые и независимые события», a_{13} = «условная вероятность», a_{14} = «теорема умножения вероятностей», a_{15} = «совместные и несовместные события», a_{16} = «теорема сложения вероятностей», a_{17} = «пример применения теоремы сложения вероятностей», a_{18} = «следствие 1», a_{19} = «следствие 2», a_{20} = «вероятность появления хотя бы одного события» и a_{21} = «пример».

Соответствующий граф показан на рис. 3.1 (a_0 – начальная вершина). Этот граф представляет структурно-логическую схему изучения изучения темы «Основные теоремы теории вероятностей».

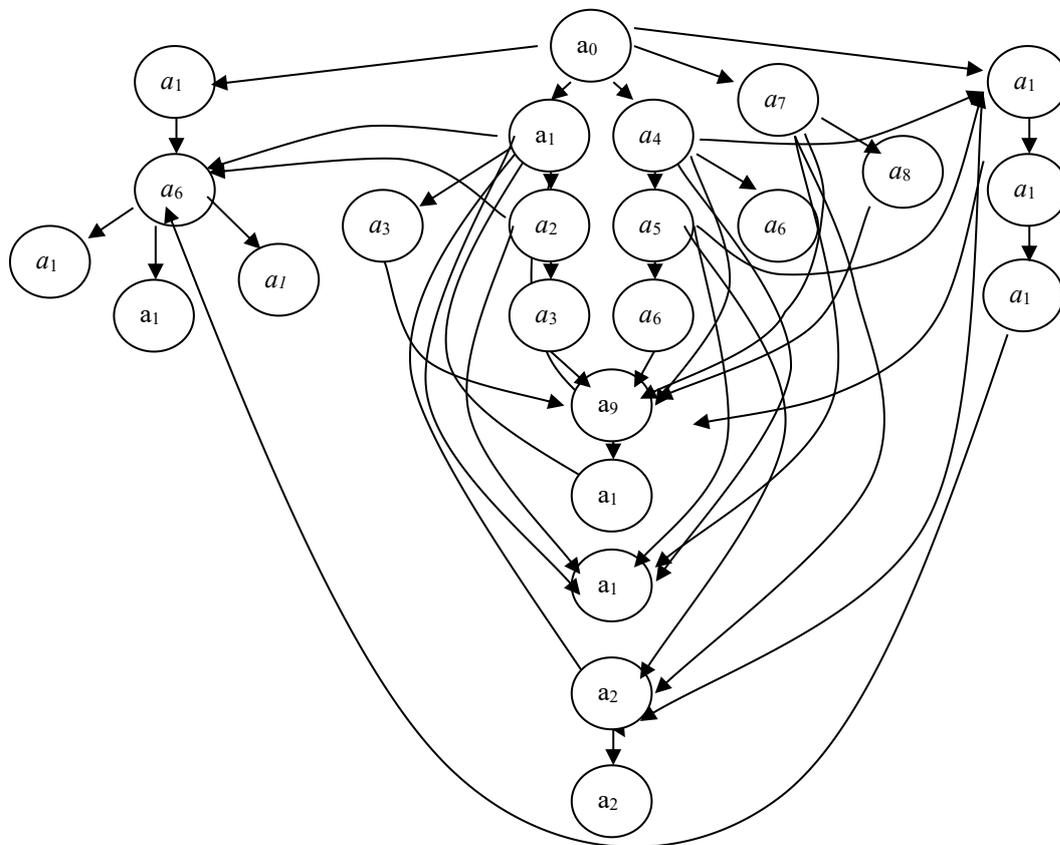


Рис. 3.1

Переход от понятия a_i к понятию a_j осуществляется с разной степенью сложности. Поэтому процесс перехода от одних понятий к другим целесообразно моделировать нагруженным ориентированным графом, где в качестве весов выступают значения сложности соответствующих переходов. Каждое такое значение определяется, например, как взвешенная средняя арифметическая на основе статистического материала в результате опроса преподавателей и обучаемых. Возникает задача отыскания кратчайшего пути от понятия a_i к понятию a_j , которая может быть решена с использованием алгоритма Дейкстры [22, 80].

При хаотическом изучении темы, когда обучаемый плохо представляет себе структурно-логическую схему, при неусвоении понятия a_j он может возвратиться к понятию a_k , которое не лежит на пути, ведущему в вершину a_j . Такого рода возврат в матрице A должен быть отмечен особо, поскольку это говорит о плохом понимании темы. Поэтому в клетке (j, k) должна в этом случае стоять особая метка, которая может представлять, например, строчку каких-либо знаков, количество которых равно числу подобных неверных или даже абсурдных возвратов. Другой вариант такой метки: количество подобных возвратов умножается на некий коэффициент «абсурдности». Подобный коэффициент будет тем больше, чем абсурднее переход от a_j к a_k .

Вернемся к рассмотренному примеру. Допустим, что обучаемый не усвоил понятия $a_{14} = \langle \text{теорема умножения вероятностей} \rangle$ и обратился к понятию $a_3 = \langle \text{пример суммы событий} \rangle$. Из вершины a_3 нет пути в вершину a_{14} , поэтому такое обращение абсурдно. Аналогичный вывод получается и в результате тщетных попыток объяснить теорему умножения вероятностей через пример суммы событий.

При прогнозировании изучения данной темы с учетом прошлого опыта целесообразно использовать априорную оценку вероятности того, что у обучаемого (группы или потока обучаемых) при переходе от понятия a_i к понятию a_j будет $k-1$ возвратов. Пусть n – максимальное статистическое число возвратов. Возможны два варианта возвратов от a_j к a_i . В первом варианте возвраты и невозвраты чередуются произвольным образом.

Во втором варианте до некоторого момента идут постоянные возвраты, а после этого обучаемым (обучаемыми) понятие a_j усвоено настолько хорошо, что возврат к a_i больше не происходит. В грубом приближении вероятность $k-1$ возвратов для первого варианта можно вычислить по формуле Бернулли [53]:

$$P_{k-1} = C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}, \quad (3.1)$$

где p – вероятность возврата, одна и та же для всех случаев. Однако в общем случае вероятность p меняется. Пусть $p_i(i=\overline{1, n})$ – вероятность возврата в i -м случае, заданная на основе статистических данных либо определенная, например, согласно закону убывающей арифметической или геометрической прогрессии, так как с каждым последующим обращением к a_j и затем к a_i повышается степень усвоения учебного материала. Вероятность P_{k-1} в этом случае можно вычислить с использованием производящей функции

$$\phi_n(x) = \prod_{i=1}^n (p_i + (1-p_i)x). \quad (3.2)$$

Тогда вероятность P_{k-1} будет равна коэффициенту при $k-1$ -й степени x многочлена $\phi_n(x)$. Во втором варианте в грубом приближении

$$P_{k-1} = p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}, \quad (3.3)$$

а с учетом изменяющегося значения p вероятность P_{k-1} можно вычислить по формуле

$$P_{k-1} = \prod_{i=1}^{k-1} p_i \prod_{i=k}^n (1-p_i), \quad (3.4)$$

где вероятности возврата $p_i(i=\overline{1, n})$ определяются на основе статистических данных, либо следуя, например, закону убывающей арифметической или геометрической прогрессии.

Для оценки степени усвоения вводится гарантийная вероятность $P_{k-1} P(k)_{\text{гарант}} = 1 - \prod_{i=k-1}^n P_i$, означающая, что возвратов было меньше, чем $k-1$. Очевидно, что чем больше $P(k)_{\text{гарант}}$ при k , стремящемся к 2, тем успешнее идет усвоение понятия a_j .

Итак, построена математическая модель описания, анализа и оценки произвольной темы курса с использованием графо-матричного и вероятностного описания процесса обучения. Полученные результаты могут найти широкое применение также в структурном распознавании образов, при описании работы различных схем из функциональных элементов, в математической лингвистике, в системах ИИ.

§ 3.2. Критерий планирования контрольных мероприятий

Одной из важных задач учебного процесса является определение частоты и сроков контрольных мероприятий. Покажем на конкретном примере, как для этого может применяться планирование эксперимента в условиях *риска*. Введем следующие состояния уровня знаний обучаемых

данной группы: Π_1 – уровень знаний выше среднего, Π_2 – средний, Π_3 – значительно ниже среднего. Вероятности этих состояний соответственно равны $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$. Преподаватель может использовать следующие стратегии: A_1 – оставить методику преподавания без изменения; A_2 – провести необходимую корректировку применяемой методики; A_3 – существенно переработать методику обучения на данном этапе. *Риском* будем называть то дополнительное время, которое в среднем затрачивается группой обучаемых на отработку и самостоятельную работу по усвоению данного учебного материала.

Матрица рисков приведена в табл. 3.1, в последнем столбце которой указаны средние риски при данных стратегиях, при этом A_2 – оптимальная стратегия; в последней строке – вероятности состояний Π_j ($j = 1, 2, 3$).

Таблица 3.1

$A_i \backslash \Pi_j$	Π_1	Π_2	Π_3	\bar{r}_i
A_1	1	5	7	3,4
A_2	3	2	6	3,3
A_3	5	4	3	4,3
p_j	0,5	0,3	0,2	

Для уточнения истинного состояния учебного процесса проводится контрольное мероприятие, которое лишь приблизительно отражает состояние и может иметь 4 исхода: B_1 – средний балл обучаемых высокий, B_2 – на среднем уровне, B_3 – ниже среднего и B_4 – недостаточен. Вероятности каждого из этих исходов заданы в табл. 3.2, там же указаны априорные вероятности Π_j ($j = 1, 2, 3$). Определим оптимальную стратегию преподавателя при условии, что исход единичного эксперимента выявил средний уровень (B_2).

Таблица 3.2

$\Pi_j \backslash p$	B_1/Π_j	B_2/Π_j	B_3/Π_j	B_4/Π_j	p_j
Π_1	0,5	0,5	0	0	0,5
Π_2	0	0,5	0,5	0	0,3
Π_3	0	0	0,3	0,6	0,2

Сначала вычислим апостериорные вероятности состояний Π_j для исхода B_2 :

$$\tilde{p}_{12} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0} = 0,625; \quad \tilde{p}_{22} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5} = 0,375;$$

$$\tilde{p}_{32} = \frac{0 \cdot 0,2}{0,4} = 0.$$

Затем найдем средние риски стратегий $A_l (l = 1, 2, 3)$ в случае исхода B_2 с учетом полученных апостериорных вероятностей:

$$\bar{r}_1 = 1 \cdot 0,625 + 5 \cdot 0,375 + 7 \cdot 0 = 2,5;$$

$$\bar{r}_2 = 3 \cdot 0,625 + 2 \cdot 0,375 + 6 \cdot 0 = 2,625; \quad \bar{r}_3 = 5 \cdot 0,625 + 4 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0 = 4,625.$$

Оптимальная стратегия преподавателя определяется условием минимального среднего риска $\bar{r}_1 = 2,5$.

Вывод: оптимальной является стратегия A_1^* .

Конечно, чтобы решить, проводить ли эксперимент, необходимо заранее произвести расчеты для всех исходов. Затем для каждого исхода B_j вычисляется средний риск и выбирается стратегия, при использовании которой он минимален. После этого определяется полный средний риск как сумма произведений соответствующих минимальных средних рисков на вероятности исходов B_j . Тогда выигрыш Δr^* от проведения контрольного мероприятия будет равен разности между минимальным средним риском до эксперимента и полным средним риском. Отсюда получаем следующий критерий планирования контрольного мероприятия: контрольное мероприятие следует проводить тогда и только тогда, когда выигрыш Δr^* будет положительным.

Можно проводить эксперимент несколько раз и аналогичным образом просчитать, выгоден ли повторный эксперимент. Однако более правильно не назначать число испытаний заранее, а решать после каждого испытания, целесообразны ли следующие мероприятия. Границы в этом случае определяются широко распространенным в управленческих решениях методом последовательного анализа Вальда [37], что в ряде случаев позволяет экономить средства при проведении эксперимента.

§ 3.3. Интеллектуальная информационная система оптимального контроля знаний

Важнейшие задачи обучения заключаются в формировании и оценке компетентности учащихся на основе компетентностного подхода [31], повышении качества управляемых процессов по ликвидации негативных явлений в учебном процессе [24], оценки эффективности процесса

обучения [43]. Решение этих задач невозможно без создания оптимальной системы контрольных мероприятий с точки зрения структуры их размещения и оценки степени усвоения соответствующего учебного материала.

В данном параграфе разработана графовая модель, представляющая собой интеллектуальную информационную систему оптимального управления контролем знаний учащихся с применением понятия внешней устойчивости нечеткого графа [4].

Решение данной задачи рассмотрим на примере дисциплины «Линейная алгебра» (направление подготовки 08.01.00 «Экономика», профиль «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»), модуль 2 «Векторная алгебра» согласно программе бакалавриата, разработанной в Тверской государственной сельскохозяйственной академии. Данный модуль содержит 8 двух- и четырехчасовых практических занятий.

Перечислим учебные вопросы этих занятий по порядку следования:

ПЗ1. Действия над векторами (2 часа):

1. Линейные операции в алгебраической форме.
2. Линейные операции над векторами в геометрической форме.

ПЗ2. Вычисление скалярного произведения (2 часа):

3. Вычисление длины вектора.
4. Различные способы вычисления скалярного произведения.
5. Исследование векторов на ортогональность.

ПЗ3. Решение треугольников (4 часа):

6. Нахождение длин сторон, медиан, высот треугольника.
7. Нахождение углов и площади треугольника.

ПЗ4. Решение задач на векторное и смешанное произведение (2 часа):

8. Применение векторного произведения для решения практических задач.

9. Применение смешанного произведения.

ПЗ5. Линейное пространство, базис (2 часа):

10. Отработка понятия линейного пространства.
11. Исследование системы векторов на линейную зависимость и линейную независимость.

12. Отыскание базисов.

ПЗ6. Применение ранга при исследовании систем линейных уравнений (4 часа):

13. Вычисление ранга.
14. Исследование систем при помощи ранга.

ПЗ7. Линейные преобразования (4 часа):

15. Отработка понятия линейного преобразования.
16. Анализ преобразования на линейность.
17. Отыскание собственных векторов и собственных значений линейного преобразования.

ПЗ8. Квадратичные формы (2 часа):

18. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции.

19. Исследование на положительную (отрицательную) определенность.

Граф G определим следующим образом. Он имеет 19 вершин согласно числу сформулированных учебных вопросов. Если знание вопроса j определяет знание вопроса i ($i, j = \overline{1,19}, i \neq j$), то вопрос i будем называть контролируемым, а вопрос j – контролирующим. На графе в этом случае идет дуга из вершины i в вершину j . Для данной дуги определяется функция принадлежности $\mu(x_i, x_j)$ степени использования учебного материала i -го вопроса при изучении j -го учебного вопроса. Граф будем рассматривать нечеткий, сначала воспользуемся матричным представлением графов. Запишем матрицу смежности этого графа с учетом введенного на вершинах отношения *контролируемости* согласно рассмотренной выше части учебной программы:

$x_j \backslash x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0,1	1	1	1	1	0	
2	0	1	1	1	1	1	0	1	0,3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	1	1	1	0	0,5	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0,5	0,8	0,8	0,8	1	0	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0,5	0,8	0,8	0,8	0	0	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0,5	1	0,5	0,8	0	0	
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0,5	0,5	0,8	1	0	
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,8	1	0	
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0,8	1	0	
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Значения функции принадлежности получены на основе суждений экспертов (преподавателей кафедры). Каждой i -й вершине графа ставится в соответствие булева переменная P_i , принимающая значение 1, если данная

вершина принадлежит некоторому нечеткому внешне устойчивому множеству T , и равная 0 в противном случае. Пусть $v(T)$ – степень внешней устойчивости множества. Высказыванию $\mu(x_i, x_j) \beta(T)$ ставится в соответствие нечеткая переменная $\xi_{ij} = \mu(x_i, x_j)$. Согласно общему алгоритму [4] находим минимальные внешние устойчивые множества Φ_T :

$$\begin{aligned} \Phi_T = & (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} + 0,1P_{14} + \\ & + P_{15} + P_{16} + P_{17} + P_{18} + P_{19}) \& (P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_8 + 0,3P_9 + P_{10} + \\ & + P_{17} + P_{19}) \& (P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9) \& (P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_9) \& \\ & \& (P_5 + P_6 + P_7 + 0,5P_9) \& (P_6 + P_7) \& (P_7 + P_8) \& (P_8 + P_9) \& P_9 \& (P_{10} + P_{11} + \\ & + P_{12} + P_{13} + 0,5P_{14} + 0,8P_{15} + 0,8P_{16} + 0,8P_{17} + P_{18} + P_{19}) \& (P_{11} + P_{12} + P_{13} + \\ & + 0,5P_{14} + 0,8P_{15} + 0,8P_{16} + 0,8P_{17}) \& (P_{12} + P_{13} + 0,5P_{14} + P_{15} + 0,5P_{16} + 0,8P_{17}) \& \\ & \& (P_{13} + P_{14} + 0,5P_{15} + 0,5P_{16} + 0,8P_{17} + P_{18} + P_{19}) \& (P_{14} + 0,8P_{17} + P_{18} + P_{19}) \& \\ & \& (P_{16} + P_{17} + P_{18} + P_{19}) \& (P_{17} + P_{18} + P_{19} + P_{20}) \& (P_{18} + P_{19} + P_{20}) \& \\ & \& (P_{19} + P_{20}) \& P_{20}. \end{aligned}$$

С учетом правил $a \& b = a$, $a \& b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, $\xi \& a$, $\xi \vee a \& b = \xi \& a$, если ξ , ξ и $a, b \in [0, 1]$, формула Φ_T преобразуется в дизъюнкцию конъюнкций с соответствующими постоянными множителями [4]. Каждый такой дизъюнктивный член соответствует минимальному внешнему устойчивому множеству вершин графа при взаимно однозначном соответствии $x_i \leftrightarrow P_i$, числовой коэффициент m при соответствующем произведении, согласно определению нечеткой конъюнкции, равен минимальному из коэффициентов при сомножителях P_i в данном слагаемом. Этот коэффициент показывает степень выполнения контрольных мероприятий по изучению рассмотренного выше фрагмента программы. По определению коэффициент m не превосходит 1. Если $m=1$, то это означает 100%-е выполнение контрольных мероприятий; чем m ближе к 0, тем хуже происходит выполнение контрольных мероприятий. В то же время большое значение имеет количество этих мероприятий, поскольку на каждое из них затрачивается достаточное количество сил и времени как при аудиторной, так и при самостоятельной работе. Минимальное количество контрольных мероприятий определяется минимальным числом сомножителей в дизъюнктивных членах суммы Φ_T . Не будем проводить громоздкие преобразования формулы Φ_T , к тому же эти преобразования можно осуществить с использованием Microsoft Excel. Установим критерий отбора минимальных внешних устойчивых множеств: во-первых, множитель m , характеризующий степень выполнения контрольных мероприятий (степень контроля), должен быть максимально возможным в данной ситуа-

ции; во-вторых, число сомножителей, равное числу контрольных мероприятий по данному фрагменту учебной дисциплины, должно быть минимально возможным. Для рассматриваемого примера данному критерию удовлетворяют 4 минимальных внешних устойчивых множества:

$$x_6x_9x_{12}x_{18}x_{19}, \quad x_6x_9x_{13}x_{18}x_{19}, \quad x_7x_9x_{12}x_{18}x_{19}, \quad x_7x_9x_{13}x_{18}x_{19}.$$

Коэффициент степени контроля у каждого из этих множеств равен 1, т. е. соответствует 100%-му выполнению контрольных мероприятий. Число вершин в каждом множестве равно 5, что соответствует числу контрольных мероприятий. Какой из вариантов предпочтителен в данной ситуации, преподаватель решает индивидуально с учетом общего уровня подготовленности и способности группы к обучению.

Проведем анализ предполагаемых контрольных мероприятий. Согласно первым двум вариантам, первое контрольное мероприятие охватывает вопросы 1–6, т. е. практические занятия № 1 и 2, и только первую половину практического занятия № 3 (четырёхчасового), а вторая половина этого занятия попадает в следующее контрольное мероприятие. Третий и четвертый варианты предполагают проведение первого контрольного занятия после прохождения практического занятия № 3. Первый и второй варианты предпочтительнее, если первое контрольное мероприятие достаточно объемное, а второе, охватывающее вопросы 8–12 или 8–13, не очень загружено. В противном случае предпочтительнее следующие два варианта. Однако в случае второго и четвертого вариантов предполагается во второе контрольное мероприятие отнести вопрос № 13, разбив тем самым практическое занятие № 6 на две половины. Такое разбиение целесообразно, если контрольное мероприятие № 3 не очень загружено в противовес практическому занятию № 4, которое проводится после изучения учебного вопроса № 19. Кроме того, разбиение практических занятий № 3 и 6 и отнесение вторых вопросов к следующему контрольному мероприятию дает возможность повторного опроса учебного материала по тематике указанных занятий. Особо стоит остановиться на контроле учебного вопроса № 19. На графе вершина x_{19} имеет петлю, других контролируемых вопросов, связанных с этой вершиной, нет, поэтому проверочная работа проводится в обязательном порядке после изучения как вопроса № 18, так и вопроса № 19.

Таким образом, в курсе «Линейная алгебра» при изучении перечисленных вопросов минимальное количество контрольных мероприятий должно быть равно 5. При этом в программе данной учебной дисциплины на этот фрагмент отведено только одно контрольное мероприятие – двухчасовая классная контрольная работа после 4-го практического занятия (вопросы 1–9). Следовательно, остальные контрольные мероприятия должны проводиться либо как домашние контрольные работы, либо в виде тестирования по этим вопросам, либо при использовании

интерактивного метода «Ромашка», представляющего собой краткий и быстрый опрос по основным изученным понятиям.

На основе матрицы смежности (см. табл. 3.3) построим следующий граф (рис. 3.2). Он похож на двудольный граф, у которого одну долю образуют выделенные, например по первому варианту, вершины $x_6, x_9, x_{12}, x_{18}, x_{19}$, а вторую долю образуют остальные вершины, стрелки на графе направлены от вершин второй доли к вершинам первой доли согласно нулевым значениям в столбцах таблицы для контролирующих вершин $x_6, x_9, x_{12}, x_{18}, x_{19}$, каждая из которых имеет петлю. Вершины, от которых идут стрелки в контролируемую вершину $x_i (i = 6, 9, 12, 18, 19)$, образуют группы зависимости данной контролирующей вершины, т. е. знание учебных вопросов группы зависимости определяет знание учебного вопроса, соответствующего данной контролирующей вершине.

Применение данного графа дает возможность упростить анализ «пробелов в обучении» и активизировать их ликвидацию.

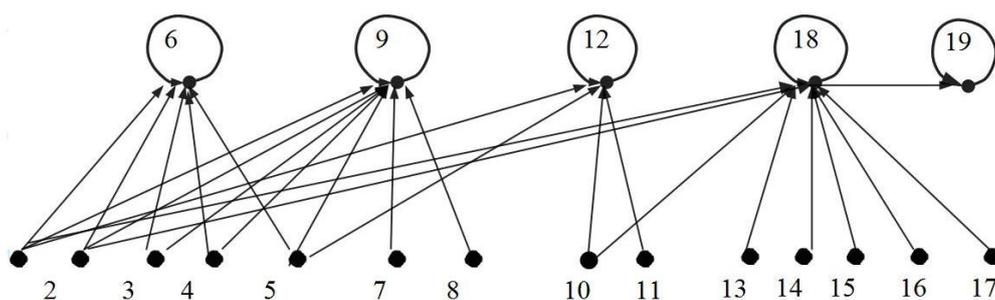


Рис. 3.2

Другая важная задача планирования контрольных мероприятий связана с определением такого множества K контролируемых вопросов, чтобы знание всех остальных учебных вопросов рассматриваемого фрагмента дисциплины «Линейная алгебра» зависело от множества K . Данную задачу также будем решать на основе понятия внешней устойчивости нечеткого графа. Соответствующий граф G будет иметь 19 вершин по числу сформулированных вопросов рассматриваемого учебного фрагмента. Если контрольное мероприятие проводится непосредственно после изучения i -го учебного вопроса, то на графе имеется петля в вершине $x_i (i = \overline{1, 19})$; кроме того, если для знания какой-либо части i -го вопроса необходимо знание j -го вопроса ($i > j$), то на графе из вершины x_i идет стрелка в вершину x_j . Это нечеткий граф. Для каждой его дуги (x_i, x_j) определяется функция принадлежности $\mu(x_i, x_j)$ степени использования материала j -го учебного вопроса при изучении материала i -го вопроса.

Возможны разные способы оценки степени использования – например, как результат экспертного оценивания группой специалистов. Возможен и такой подход. Каждый учебный вопрос разбивается на элементарные подвопросы, которые взвешиваются согласно их важности и сложности. Вес каждого подвопроса делится на максимальный из этих весов, получают приведенные веса. Тогда степень использования j -го учебного вопроса при рассмотрении i -го равна сумме приведенных весов соответствующих элементарных подвопросов. К примеру, вопрос № 3 о вычислении длины вектора полностью используется при рассмотрении вопроса № 4, связанного с вычислением скалярного произведения векторов. Поэтому для этих вершин функция принадлежности равна 1. А вопрос № 7, содержанием которого является нахождение углов и площади треугольника, связан лишь с первым и третьим подвопросами вопроса № 6, относящимися только к нахождению длин сторон и высот треугольника, но не медиан. Как известно, задача отыскания длин высот треугольника (при известных вершинах) существенно сложнее задачи нахождения длин сторон и диагоналей. Так, если по теореме Пифагора при заданных координатах вершин длина стороны находится в одно действие, то при нахождении длины медианы необходимо еще одно предшествующее действие для отыскания неизвестной вершины, а при вычислении высоты необходимо уже множество из 3–4 действий. Три действия получаются, если учащийся помнит формулу расстояния от точки до прямой. Тогда первые 2 действия – нахождение уравнения противоположной стороны и подстановка в него координат данной точки, третье действие – деление на нормирующий множитель. Если учащийся не помнит формулу расстояния, то сначала записывается уравнение противоположной стороны, затем – уравнение перпендикуляра к ней (высоты), в третьем действии находится точка пересечения основания с высотой, в четвертом – расстояние между данной вершиной и найденной точкой пересечения. Если треугольник задан уравнениями своих сторон, то для отыскания длины стороны нужно произвести три действия, для отыскания длины медианы – 4 действия, для нахождения высоты – 2 действия, если учащийся помнит формулу расстояния от точки до прямой, и 3 действия, если он эту формулу не помнит.

Для простоты будем считать все действия равноценными, тогда при известных вершинах веса подвопросов, связанных с вычислением длин стороны, медианы и высоты в случае, если учащийся помнит указанную формулу, можно определить соответственно как $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ и $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

В этом случае $\mu(x_7, x_6) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3} = 0,67$. Если же он эту формулу не помнит, то $\mu(x_7, x_6) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7} = 0,71$. Считаем оба случая равновероятными,

отсюда среднее значение $\mu(x_7, x_6) = 0,69$. Если треугольник задан уравнениями сторон, то из аналогичных рассуждений получается среднее значение $\mu(x_7, x_6) = 0,61$.

Оба типа задач по нахождению длины стороны, медианы и высоты будем считать равноценными. Поэтому итоговое среднее значение $\mu(x_7, x_6) = 0,66$. Не будем рисовать нечеткий граф данного модуля по причине его громоздкости. Ограничимся заданием матрицы функции принадлежности, которая является нечеткой матрицей смежности. Для рассматриваемого примера это квадратная матрица порядка 19 (по числу учебных вопросов модуля), в которой x_i – первая вершина дуги (x_i, x_j) , а x_j – вторая:

$x_i \backslash x_j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0,5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,5	0,5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0,5	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	1	0,66	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0,3	1	0,5	0,5	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
14	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	1	1	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0,8	1	0,5	0	1	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0,8	0,5	0,5	0	1	1	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	1	1	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	1	1	1	1	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Находим все минимальные внешние установочные множества:

$$\begin{aligned} \Phi_T = & P_1 \&(P_1 P_2) \&(P_1 P_3) \&(P_1 0,5P_2 P_3 P_4) \&(0,5P_1 0,5P_2 P_3 \\ & P_4 P_5) \&(P_1 0,5P_2 P_3 P_4 P_5 P_6) \&(P_3 P_4 P_7 P_5 0,66P_6) \& \\ & \&(P_1 P_2 P_3 P_8) \&(0,3P_2 P_3 0,5P_4 0,5P_5 P_7 P_8 P_9) \& \\ & \&(P_1 P_2 P_{10}) \&(P_1 P_5 P_{10} P_{11}) \&(P_1 P_5 P_{10} P_{11} P_{12}) \& \\ & \&(P_1 P_5 P_{11} P_{12} P_{13}) \&(0,1P_1 0,5P_{10} 0,5P_{11} 0,5P_{12} P_{13} P_{14}) \& \\ & \&(P_{15} P_1 0,8P_{10} 0,8P_{11} P_{12} 0,5P_{13}) \&(P_{16} P_1 0,8P_{10} 0,8P_{11} \\ & 0,5P_{12} 0,5P_{13} P_{15}) \&(P_{17} P_1 0,8P_{10} 0,8P_{11} 0,8P_{12} 0,8P_3 \\ & 0,8P_{14} 0,8P_{15} P_{16}) \&(P_1 0,5P_{10} P_{15} P_{16} P_{17} P_{18}) \&(P_{18} P_{19}). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей формуле Φ_T данная формула преобразуется в дизъюнкцию конъюнкций с некоторыми числовыми множителями. Числовой множитель M при данном слагаемом равен нечеткой конъюнкции числовых коэффициентов всех его сомножителей и характеризует степень использования учебного материала по учебным вопросам, связанным с данным слагаемым, при изучении всех учебных вопросов рассматриваемого фрагмента дисциплины. Оставим тот же критерий отбора минимальных внешних устойчивых множеств, что и в предыдущем примере. С учетом этого после упрощения формулы Φ_T можно выделить 4 минимальных внешних устойчивых множества, удовлетворяющих рассматриваемому критерию:

$$x_1x_3x_{13}x_{18}, \quad x_1x_3x_{14}x_{18}, \quad x_1x_3x_{13}x_{19}, \quad x_1x_3x_{14}x_{19}.$$

Множество вершин в каждом слагаемом соответствует множеству контролируемых вопросов, которые используются при изучении всех остальных учебных вопросов данного фрагмента. Количество контролируемых вопросов, образующих минимальное внешнее устойчивое множество, можно уменьшить до трех – после раскрытия скобок в Φ_T одно из слагаемых будет $0,5P_1P_3P_{12}$. Однако в этом случае степень использования вопросов № 1, 3, 12 будет равна 0,5.

Предложенный метод позволяет осуществлять оптимальное планирование контрольных мероприятий, оценить степень использования в изучении данной дисциплины различных групп учебных вопросов и провести соответствующую градацию весовых коэффициентов.

Текущий контроль успеваемости играет первостепенную роль в обучении. В [75] описан волновой процесс обучения в соответствии с мероприятиями текущего контроля. В [105] рассмотрен нечеткий контролер знаний учащихся, построенный на основе нечетких онтологий. Эту методику можно усовершенствовать в двух направлениях: во-первых, подвергать проверке не только онтологии, но и доказательства утверждений, схемы доказательств, алгоритмы вычислений, правила решений, моделируемые нечеткими графами, и, во-вторых, осуществлять сравнение полученных результатов с эталоном, используя изоморфизм нечетких графов с одинаковыми вершинами. Приведем общее определение степени изоморфизма графов [4]. Пусть $G_X(X, U_X)$ и $G_Y(Y, U_Y)$ – нечеткие ориентированные графы, где X и Y – множества вершин, а

$$U_X = \{ \langle \mu_X(x_i, x_j) / (x_i, x_j) \rangle | (x_i, x_j) \in X^2 \};$$

$$U_Y = \{ \langle \mu_Y(y_i, y_j) / (y_i, y_j) \rangle | (y_i, y_j) \in Y^2 \}$$
(3.5)

являются нечеткими множествами ребер с функциями принадлежности $\mu_X : X^2 \rightarrow [0, 1]$ и $\mu_Y : Y^2 \rightarrow [0, 1]$, при этом число вершин в графах

одинаково. Степень изоморфизма нечетких графов определяется как значение выражения

$$f = \min_{i=1,n} \max_{j=1,n} (m_X(x_i, x_j) \leftrightarrow m_Y(y_i, y_j)), \quad (3.6)$$

где \min обозначает операцию минимума, эквивалентность определяется как $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)$, где \rightarrow – операция нечеткой импликации, в частности, в логике Лукасевича определяемая как $a \rightarrow b = \min\{1, 1 - a + b\}$.

Степень *изоморфизма* можно рассматривать в качестве степени усвоения учащимися данного вопроса (задачи).

Рассмотрим конкретный **пример** оценки степени усвоения правила отыскания экстремумов функции. Пусть требуется найти экстремум функции $y = x^3 - 2x^2 - 3x/4 + 4$. Решение (эталон) оформим в виде графа.

Вершина x_1 соответствует вычислению производной $y = 3x^2 - 4x - 3/4$. Вершина x_2 обозначает, что производная приравнивается к 0 и ищутся критические точки; вершина x_3 соответствует найденному решению 1,5; вершина x_4 соответствует значению $-1/6$. При этом в вершине x_2 имеется развилка, связанная с вершинами x_3 и x_4 . Вершина x_5 соответствует случаю, когда левее числа 1,5 производная отрицательная; вершина x_6 соответствует случаю $y > 0$ правее точки 1,5. В вершине x_3 развилка в x_5 и x_6 . Вершина x_7 определяет случай $y > 0$ левее точки $-1/6$, x_8 – случай $y < 0$ правее точки $-1/6$. В вершине x_4 развилка в x_7 и x_8 . Вершина x_9 связана с максимумом функции, вершина x_{10} – с минимумом. Граф эталонного решения показан на рис. 3.3. При этом $\mu(x_i, x_j) = 1; i, j = \overline{1, 10}; i \neq j$. Заметим, что эталонным будет также граф, полученный из графа на рис. 3.3 перестановкой вершин x_3 и x_4 , x_5 и x_6 , x_7 и x_8 соответственно.

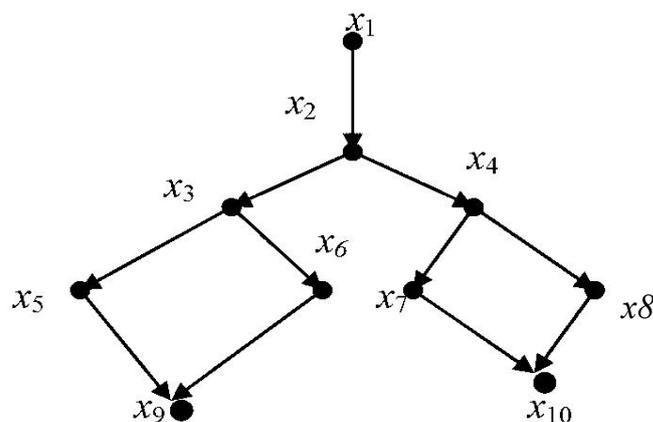


Рис. 3.3

Рассмотрим пример неэталонного графа решения данной задачи. Пусть, к примеру, этот граф имеет вид, изображенный на рис. 3.4. При этом учащийся неправильно нашел производную, поэтому для его графа $\mu(x_1, x_2) < 1$, а насколько эта степень меньше, чем 1, определяется либо путем экспертного оценивания степени серьезности ошибки, либо по графу вычисления производной, который строится аналогично графам на рис. 3.3 и 3.4. Пусть, к примеру, $\mu(x_1, x_2) = 0,5$. Поскольку на графе, показанном на рис. 3.4, отсутствуют дуги (x_3, x_5) , (x_3, x_6) , (x_5, x_9) (x_6, x_9) , соответствующие значения функций $\mu(x_i, x_j)$ для указанных дуг будут равны 0.

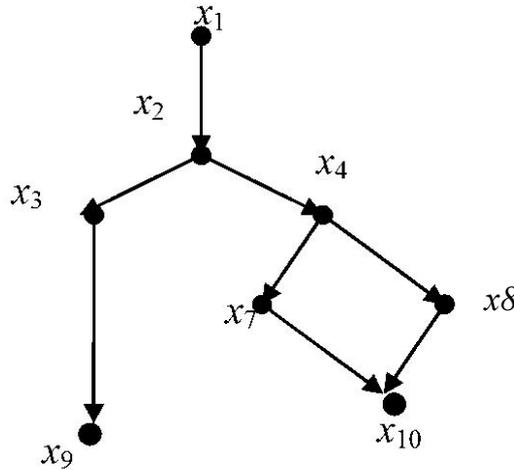


Рис. 3.4

Предположим, что до вершин x_7 и x_8 учащийся «добрался» благополучно, а вывод относительно вершины x_{10} сделал ошибочный, перепутав максимальные и минимальные значения. В этом случае $\mu(x_4, x_7) = \mu(x_4, x_8) = 1$, а $\mu(x_7, x_{10}) < 1$ и $\mu(x_8, x_{10}) < 1$. Конкретные значения функции для этих дуг определяются путем опроса экспертов. Пусть, например, $\mu(x_7, x_{10}) = 0,2$ и $\mu(x_8, x_{10}) = 0,2$. Воспользуемся формулой (3.6). Для этого найдем $\mu_X(x_1, x_2) \leftrightarrow \mu_Y(x_1, x_2) = \min\{1, 1 - \mu_X(x_1, x_2) + \mu_Y(x_1, x_2)\} \& \min\{1, 1 - \mu_Y(x_1, x_2) + \mu_X(x_1, x_2)\} = 1$.

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} \mu_X(x_2, x_3) \leftrightarrow \mu_Y(x_2, x_3) &= 0,5; & \mu_X(x_2, x_4) \leftrightarrow \mu_Y(x_2, x_4) &= 0,5; \\ \mu_X(x_3, x_5) \leftrightarrow \mu_Y(x_3, x_5) &= 0; & \mu_X(x_3, x_6) \leftrightarrow \mu_Y(x_3, x_6) &= 0; \\ \mu_X(x_5, x_9) \leftrightarrow \mu_Y(x_5, x_9) &= 0; & \mu_X(x_6, x_9) \leftrightarrow \mu_Y(x_6, x_9) &= 0; \\ \mu_X(x_4, x_7) \leftrightarrow \mu_Y(x_4, x_7) &= 1; & \mu_X(x_4, x_8) \leftrightarrow \mu_Y(x_4, x_8) &= 1; \end{aligned}$$

$$\mu_X(x_7, x_{10}) \leftrightarrow \mu_Y(x_7, x_{10}) = 0,2; \quad \mu_X(x_8, x_{10}) \leftrightarrow \mu_Y(x_8, x_{10}) = 0,2.$$

Окончательно по формуле (3.6) имеем: степень изоморфизма $f = 0$. Следовательно, степень усвоения решения данного примера у данного учащегося равна 0.

Можно задать градацию балла успеваемости по решению данной задачи согласно степени изоморфизма. Например, степень изоморфизма в границах от 0 до 0,5 соответствует неудовлетворительной оценке; более, чем 0,5, но менее, чем 0,75, – удовлетворительной оценке; от 0,75 до 0,9 (не включая 0,9) – хорошей оценке; от 0,9 до 1 – отличными знаниями.

Предложенный метод позволяет оценивать не только в целом знания обучаемых по рассматриваемому учебному материалу, но и производить оценку структуры знаний относительно связей между отдельными вопросами, заданиями, шагами решений, онтологиями и т. п. Такой подход дает возможность упорядочить знания учащихся, а также предлагаемый для изучения материал. Объективность оценки повышается.

Итак, предложена информационная система рационального контроля знаний учащихся, позволяющая для каждой дисциплины (каждого ее фрагмента) определить оптимальное количество и оптимальное планирование контрольных мероприятий по ходу изучения, а также осуществлять оценку структуры знаний. Данная система может с успехом использоваться как в учебном процессе, так и при планировании, анализе и оценке любого процесса в экономике, технике, биологии и т. д.

§ 3.4. Применение теории биматричных игр в учебном процессе

В педагогической практике вузов часто применяются игровые методы. Они относятся к инновационным интерактивным технологиям обучения. Это объясняется тем, что в них, как правило, преобладает рефлексивная деятельность обучающихся. В научной литературе рассматриваются вопросы различного использования теории игр в учебном процессе. Например, статья [118] посвящена обучающим программам на игровых платформах, а работа [7] – игровым методам в подготовке IT-специалистов. Важным вопросом является организация и содержание деловой игры применительно к особенностям профессиональной деятельности [8]. Достоинства и недостатки игровых методов обучения анализируются в статье [16]. С практическими примерами игровых моделей оценки бизнеса, имущества, интеллектуальной собственности можно ознакомиться в работе [26].

В данном параграфе рассматриваются вопросы применения перспективной теории биматричных игр в учебном процессе.

Довольно часто встречаются такие ситуации, когда интересы игроков хотя и не совпадают, но не являются противоположными и каждый из игроков, A и B , при любой паре стратегий (A_i, B_j) получает свой выигрыш. Такие игры называются *биматричными* [66]. Игра происходит в условиях неполной информированности участников.

Биматричные игры задаются двумя платежными матрицами:

$$A = \begin{matrix} & & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & \dots & \dots \end{matrix} ; \quad B = \begin{matrix} & b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} & \dots \end{matrix} ,$$

первая из которых описывает выигрыши игрока A , вторая – выигрыши игрока B .

При выборе игроком A стратегии A_i , игроком B – стратегии B_j выигрыш игрока A будет равен элементу a_{ij} матрицы A , выигрыш игрока B будет представлен элементом b_{ij} матрицы B .

Рассмотрим применение биматричных игр в учебном процессе на *примере сдачи экзамена*.

Студент (A) сдает экзамен преподавателю (B). Возможны следующие ситуации:

- 1) студент подготовился к экзамену (стратегия A_1);
- 2) студент не подготовился к экзамену (стратегия A_2);
- 3) преподаватель поставит соответствующую оценку (стратегия B_1);
- 4) преподаватель не поставит соответствующую оценку (стратегия B_2).

Используя шкалу оценки $[2, 5]$, возможные ситуации можно представить следующими платежными матрицами:

		A	
		B_j	B_1
A_i	A_1	4	3
A_2	2	3	

		B	
		B_j	B_1
A_i	A_1	5	2
A_2	3	3	

Здесь таблица A соответствует представлению студента о данной ситуации, таблица B – представлению преподавателя.

Обозначим через p частоту выбора студентом стратегии A_1 , q – преподавателем стратегии B_1 , тогда $1 - p$ – частота выбора студентом

стратегии A_2 , $1 - q$ – преподавателем стратегии B_2 . (Вместо частот могут использоваться вероятности выигрыша, если они известны.)

Необходимо найти компромиссное решение, которое удовлетворяло бы обоим игрокам, т. е. *равновесную* ситуацию, отклонение от которой уменьшает выигрыш игрока.

Рассмотрим игру 2×2 с платежными матрицами $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Пусть $H_A(p, q)$ и $H_B(p, q)$ – средние выигрыши, которые вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} H_A(p, q) &= a_{11}p \cdot q + a_{12}p \cdot (1 - q) + a_{21}(1 - p) \cdot q + a_{22}(1 - p)(1 - q); \\ H_B(p, q) &= b_{11}p \cdot q + b_{12}p \cdot (1 - q) + b_{21}(1 - p) \cdot q + b_{22}(1 - p)(1 - q). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Доказано [66], что всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию, т. е. точку равновесия (p^*, q^*) в смешанных стратегиях, такую, что $0 \leq p^* \leq 1$, $0 \leq q^* \leq 1$ и для любых $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ выполняются условия:

$$\begin{aligned} H_A(p, q^*) &\geq H_A(p^*, q^*); \\ H_B(p^*, q) &\geq H_B(p^*, q^*). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Можно показать, что система (3.8) эквивалентна системе соотношений

$$\begin{aligned} (p-1)(Cq - \alpha) &\leq 0 & C &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}; \\ p(Cq - \alpha) &\leq 0 & \alpha &= a_{22} - a_{12}; \\ (q-1)(Dp - \beta) &\leq 0, & D &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}; \\ q(Dp - \beta) &\leq 0 & \beta &= b_{22} - b_{21}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$0 \leq p, q \leq 1$

Условие (3.9) является необходимым и достаточным условием равновесной ситуации, т. е. точка (p, q) является точкой равновесия тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют (3.9).

В ситуации равновесия ни одна из сторон не может увеличить свой выигрыш в одностороннем порядке, меняя свой план действий. Стратегия каждой из сторон в этом случае является лучшим ответом на действия другой стороны. Таким образом, равновесная ситуация обеспечивает стороны игры максимумом полезности. Это означает, что каждый из игроков не может достичь наибольшей выгоды (максимизации функции полезности) изменением только своей стратегии, если другие участники твердо придерживаются собственной оптимальной линии поведения.

Для рассматриваемого примера имеем: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем:

$$C = 4 - 3 - 2 + 3 = 2; \quad \alpha = 3 - 3 = 0; \quad D = 5 - 2 - 3 + 3 = 3; \quad \beta = 3 - 2 = 1.$$

Система (3.9) примет вид

$$\begin{aligned} (p-1)(2-q) &= 0; \\ p(2-q) &= 0; \\ (q-1)(3-p) &= 0; \\ q(3-p) &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Возможны следующие случаи:

а) $p = 1$, тогда из (3.10) получаем $0 = 0$; $q = 0$; $q = 1$; $q = 0$. Следовательно, $q = 1$.

Оптимальные стратегии игроков $S_A^* = \{1; 0\}$, $S_B^* = \{1; 0\}$, т. е. студент рассчитывает только на стратегию A_1 , преподаватель – только на стратегию B_1 . Средний выигрыш составит:

$$H_A = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 4;$$

$$H_B = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 5;$$

б) $p = 0$. Используя неравенства (3.10), получаем: $q = 0$; $p = 1$; $0 = 0$; $q = 1$.

Неравенства и условие $p = 0$ противоречат друг другу, поэтому случай $p = 0$ исключается;

в) $0 < p < 1$.

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ q &= 0, \text{ откуда } q = 0. \end{aligned}$$

Подставив $q = 0$ во вторые два неравенства (3.10), получим

$$\begin{aligned} 3p - 1 &= 0 \\ 0 &= 0, \text{ т. е. } p = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(p, 0)$ – точка равновесия. Соответствующие оптимальные стратегии игроков:

$$S_A^* = \{p; 1-p\}; \quad S_B^* = \{0; 1\},$$

т. е. стратегия A_1 применяется с частотой $p = \frac{1}{3}$; стратегия A_2 – с частотой $1-p$; стратегия B_1 – с частотой 0; стратегия B_2 – с частотой 1.

Средний выигрыш составит:

$$H_A = 4 \cdot p \cdot (1-p) + 3 \cdot p \cdot (1-p) + 2 \cdot (1-p) \cdot (1-p) + 3 \cdot (1-p) \cdot p = 2 + 6p - 8p^2;$$

$$H_B = 5 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 3.$$

Поскольку $0 < p < \frac{1}{3}$, то $\max H_A = 3,1$.

Таким образом, для заданных в примере платежных матриц возможны две стратегии поведения (равновесные ситуации):

1) студент подготовился к экзамену, преподаватель поставил соответствующую оценку;

2) студент подготовил к сдаче менее трети материала, а преподаватель не поставил соответствующую оценку.

В первой ситуации выигрыши сторон существенно выше, чем при второй, т. е. в учебном процессе следует руководствоваться именно этой стратегией.

§ 3.5. Модель динамического программирования проведения контрольных мероприятий

Одним из перспективных путей повышения качества учебного процесса является использование интеллектуальных систем диагностики процесса и результатов обучения. Контроль знаний студентов вуза проводится в форме текущих проверок, а также семестровых экзаменов и зачетов. Для проведения текущих проверок используются опросы, коллоквиумы, тесты, контрольные работы, эссе, рефераты и другие мероприятия. Сроки проведения данного вида контроля, как правило, совпадают с окончанием изучения отдельных тем учебной дисциплины.

Редкое проведение контрольных мероприятий снижает качество усвоения учебного материала. В этом случае к экзамену (зачету) накапливается большой объем не освоенной обучаемым информации.

В то же время слишком частое проведение проверок знаний обучаемых приводит к их систематической перегрузке при подготовке к контрольным мероприятиям, трате учебного времени на проверку знаний. Поэтому определение оптимальных сроков проведения контрольных мероприятий является важнейшей задачей управления учебным процессом.

Для оптимизации многошаговых задач оптимизации управляемых систем используется метод динамического программирования [14, 70, 95]. Этот метод применяется для оптимизации учебного процесса. Например, он используется для составления учебного плана изучения дисциплины [110], определения стратегии подготовки к зачетам [1], распределения объема информации по учебным дисциплинам и выбора оптимальной последовательности изучения теоретических и практических вопросов разделов дисциплины [86]. Эти применения динамического программирования основаны на классической модели дискретной задачи распределения инвестиций [38].

Целью данного параграфа является определение оптимального количества контрольных мероприятий для проверки знаний обучаемых. Для решения этой задачи применяется классическая модель замены оборудования [68, 95].

3.5.1. Учебный процесс как управляемая система обучения

Дискретность задачи управления учебным процессом определяется его естественной разбивкой на отдельные этапы (шаги) в соответствии с привязкой контрольных мероприятий к завершению изучения учебных тем дисциплины. Поэтому оптимальные сроки контрольных мероприятий можно определить при помощи дискретных методов динамического программирования. В качестве критерия оптимальности данной задачи можно использовать объем накопленных знаний (задача максимизации) или общие затраты времени на получение заданного объема знаний в течение планируемого периода обучения (задача минимизации).

Рассмотрим задачу минимизации затрат времени студентом за счет оптимизации числа контрольных мероприятий. Будем считать, что затраты времени складываются из трех составляющих:

1) подготовка к экзамену и его сдача (функция $g(k)$, $k = \overline{1, n}$, где n – общее количество проведенных контрольных мероприятий);

2) подготовка и проведение текущих контрольных мероприятий (функция $f(k)$);

3) самостоятельная работа обучаемых (функция $r(t)$, $t = \overline{1, m}$, где t – количество пройденных тем).

Пусть решение о необходимости проведения контрольного мероприятия принимается по завершении изучения каждой темы или раздела дисциплины. В этом случае возможное управление на каждом шаге (t) можно связать с бинарным признаком:

$$x_t = \begin{cases} 1 & \text{– проводить проверку знаний,} \\ 0 & \text{– не проводить.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Параметром состояния системы является количество контрольных мероприятий $s_{t-1} = k$. При этом начальное состояние системы $s_0 = 0$.

Уравнения состояний, зависящие от осуществляемого управления, записываются следующим образом:

$$s_t = \begin{cases} k+1, & \text{если } x_t = 1; \\ k, & \text{если } x_t = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Показатель эффективности t -го шага будет определяться функцией

$$w_t(x_t, k) = \begin{cases} r(t) + f(k), & \text{если } x_t = 1; \\ f(k), & \text{если } x_t = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Обозначим через $Z_t^*(k)$ условно оптимальное управление (минимальные затраты на получение заданного объема знаний) начиная с t -го шага до конца.

Пусть к началу t -го шага проведено k контрольных мероприятий. Для функции $Z_t^*(k)$ уравнения Беллмана будут иметь вид:

$$Z_n^* = \min \begin{cases} r(m) + g(n) + f(n), & \text{если } x_n = 1; \\ r(m) + g(n), & \text{если } x_n = 0; \end{cases} \quad Z_t = \min \begin{cases} r(t) + f(k) + Z_{t+1}^*(k+1), & \text{если } x_t = 1; \\ r(t) + Z_{t+1}^*(k), & \text{если } x_t = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$Z_{\min} = Z_1^*(0).$$

При решении уравнений Беллмана вначале осуществляется условная оптимизация показателя эффективности начиная с последнего шага, а затем безусловная оптимизация начиная с первого шага решения задачи.

3.5.2. Оптимизация количества контрольных мероприятий на примере изучения дисциплины «Исследование операций»

Рассмотрим применение метода динамического программирования к планированию контрольных мероприятий на следующем примере. Учебная дисциплина «Исследование операций» включает 5 тем (62 часа учебных занятий), изучается один семестр и завершается экзаменом.

В результате экспериментальных исследований, проведенных в Тверской государственной сельскохозяйственной академии, установлено, что затраты времени (в часах) на подготовку к экзамену и его сдачу зависят от числа k проведенных контрольных мероприятий согласно экспоненциальной функции $g(k) = 45,277 e^{-0,314 k}$.

Затраты на проведение текущей контрольной проверки знаний описываются функцией $f(k) = 4 - 4 e^{-0,99 k}$.

Текущие затраты на самостоятельное изучение дисциплины определяются функцией Гомперца $r(t) = a b^{c^t}$ ($a = 16$; $b = 0,04$; $c = 0,833$).

Подбор функций для описания затрат осуществлялся по методу наименьших квадратов обработки экспериментальных данных.

На основе исходных данных нужно найти оптимальную стратегию проведения контрольных мероприятий, обеспечивающую минимальные суммарные затраты времени на получение заданного объема знаний.

Рассчитаем значения функций затрат:

$$g(k) = \begin{matrix} 32, & k = 0, \\ 25, & k = 1, \\ 19, & k = 2, \\ 14, & k = 3, \\ 9, & k = 4, \\ 7, & k = 5; \end{matrix} \quad f(k) = \begin{matrix} 3, & k = 1, \\ 3, & k = 2, \\ 4, & k = 3, \\ 4, & k = 4, \\ 4, & k = 5; \end{matrix} \quad r(t, k) = \begin{matrix} 1, & t = 1, \\ 3, & t = 2, \\ 8, & t = 3, \\ 11, & t = 4, \\ 13, & t = 5. \end{matrix}$$

Построим граф следующим образом (рис. 3.5). На оси абсцисс откладывается номер шага t – ход учебного процесса (количество пройденных тем), на оси ординат – количество планируемых текущих контрольных мероприятий k .

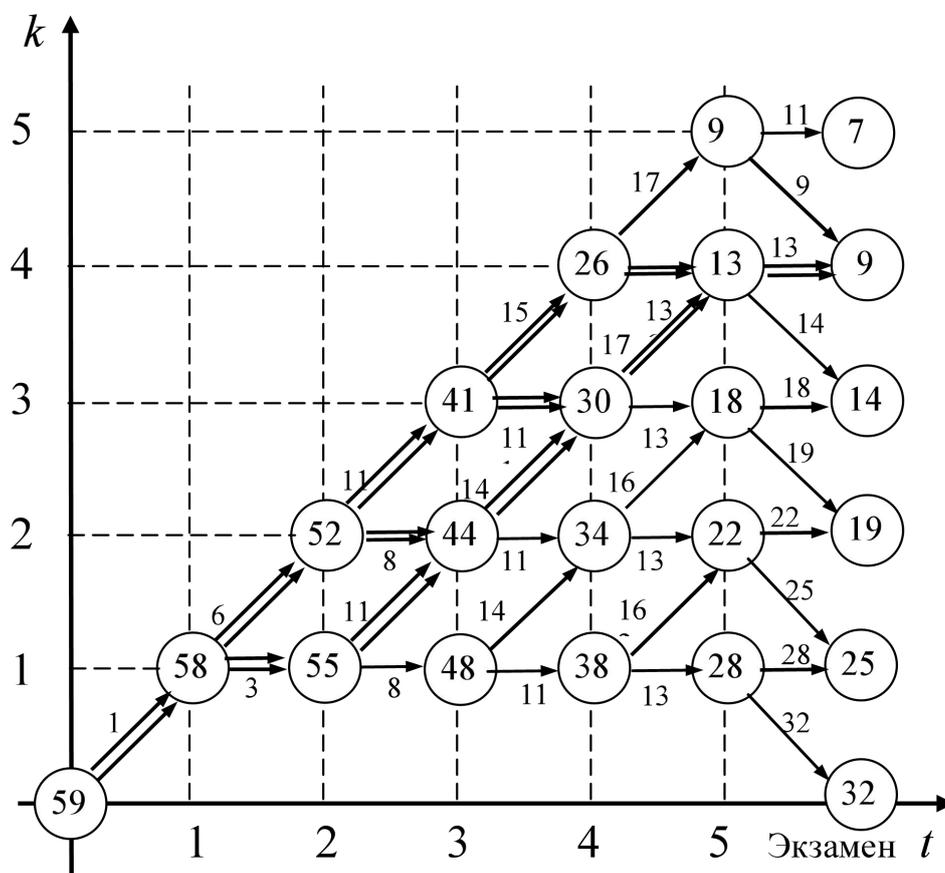


Рис. 3.5

Дуга $(0,0) \rightarrow (1,1)$ длиной 1 соответствует начальному изучению дисциплины. При $t = 1$ возможны 2 пути:

1. Дуга $(1,1) \rightarrow (2,2)$ соответствует проведению контрольной работы по теме 1 и изучению темы 2 (затраты составляют $3 + 3 = 6$);

2. Дуга $(1, 1) \rightarrow (2, 1)$ свидетельствует об отсутствии контрольной работы по теме 1 и изучении темы 2 (затраты составляют 3). При $t = 1$ имеется 4 дуги:

1) дуга $(2, 2) \rightarrow (3, 3)$ свидетельствует о контрольной работе по теме 2 и изучении темы 3 (затраты составляют $3 + 8 = 11$);

2) дуга $(2, 1) \rightarrow (3, 2)$ свидетельствует о проведении контрольной работы по теме 1 и изучении темы 2 (затраты составляют $3 + 8 = 11$);

3) дуга $(2, 1) \rightarrow (3, 1)$ свидетельствует об отсутствии контрольных мероприятий и изучении темы 3 (затраты составляют 8);

4) дуга $(2, 2) \rightarrow (3, 2)$ свидетельствует об отсутствии контрольной работы по теме 2 и изучении темы 3 (затраты составляют 8).

Аналогично можно расписать остальные дуги графа, идущие вверх и направо.

Дуги, идущие вниз при $t = 5$, показывают затраты на подготовку к экзамену без проведения определенного количества контрольных мероприятий. Наибольшие затраты равны $g(0) = 32$ (при полном отсутствии контрольных мероприятий).

На графе толстыми линиями со стрелками показаны условно-оптимальные управления на каждом шаге решения задачи, безусловно-оптимальное управление показано двумя линиями со стрелками.

При заданных исходных данных оптимальным является проведение четырех текущих контрольных мероприятий. В этом случае минимальные суммарные затраты времени на текущие контрольные мероприятия, самостоятельное изучение дисциплины и сдачу экзамена составляют $Z_{\min} = 59$ часов.

Возможны следующие варианты проведения текущих контрольных мероприятий:

$$1) (t, k) = \{(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (5, 4) \rightarrow \text{экзамен}\}$$

(данный вариант предполагает проведение контрольных мероприятий после изучения 1, 2, 3, 4-й тем);

$$2) (t, k) = \{(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (5, 4) \rightarrow \text{экзамен}\}$$

(данный вариант предполагает проведение контрольных мероприятий после изучения 2, 3, 4, 5-й тем);

$$3) (t, k) = \{(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (5, 4) \rightarrow \text{экзамен}\}$$

(данный вариант предполагает проведение контрольных мероприятий после изучения 2, 3, 4, 5-й тем);

$$4) (t, k) = \{(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (5, 4) \rightarrow \text{экзамен}\}$$

(данный вариант предполагает проведение контрольных мероприятий после изучения 2, 3, 4, 5-й тем).

В задаче могут рассматриваться не только затраты времени на текущие

контрольные мероприятия, самостоятельное изучение дисциплины, экзамен, но и другие составляющие общих затрат.

Применение метода динамического программирования позволяет оптимизировать число контрольных мероприятий. Функции, используемые для описания составляющих затрат на процесс обучения, могут отличаться от рассмотренных в данном исследовании.

§ 3.6. Оптимальный график контрольных мероприятий

Модели динамического программирования широко применяются при планировании учебного процесса [68, 110]. Однако они преимущественно используются для дискретных данных. Целью настоящего исследования является построение математической модели динамического программирования для временных интервалов планирования контрольных мероприятий.

Рассмотрим следующую постановку задачи планирования контрольных мероприятий. К контрольным мероприятиям относятся проверка начальных знаний (например, «входное» тестирование), контрольные работы по темам, заключительный зачет. За время изучения учебной дисциплины $(0, T)$ студенты должны выполнить N контрольных работ. Пусть затраты времени на подготовку и выполнение каждой контрольной работы и подготовку к зачету одинаковы и составляют $z > 0$ (часов). В начальный момент времени $t = 0$ проводится оценка начальных (школьных знаний или знаний по предшествующим дисциплинам), а в момент $t = T$ – зачет.

Управляемыми переменными задачи будем считать продолжительности (длины) интервалов между контрольными работами. Обозначим их u_1, u_2, \dots, u_N . Интервал перед последним мероприятием (зачетом) обозначим через u_{N+1} , и он будет равен $T - (u_1 + \dots + u_N)$. Пусть процесс забывания учебного материала студентами за временной интервал u_k задается аналитической функцией $b(u_k)$. Ее значения будут выражаться в условных единицах времени. Эту функцию будем считать гладкой и строго выпуклой, т. е. выполняется условие $b''(u) > 0$.

Требуется выбрать длины интервалов (сроки) проведения контрольных мероприятий u_k ($k = 1, \dots, N + 1$) таким образом, чтобы получить минимум общих (суммарных) затрат времени на изучение студентами пройденного материала.

В такой постановке задачи целевая функция имеет вид

$$\sum_{k=1}^N (z + b(u_k)) + z + b(T - \sum_{i=1}^N u_i) \rightarrow \min. \quad (3.15)$$

Промежутки между контрольными мероприятиями u_1, u_2, \dots, u_{N+1} будем считать управлениями переменными, а в качестве состояний системы будет выступать время, оставшееся до зачета. Обозначим его через x_k ($k = 1, \dots, N + 1$). Шагами (этапами) решения задачи будет проведение контрольных мероприятий. Примем за начальное состояние системы $x_0 = T$. Значения остальных состояний x_k определяются через предыдущее значение состояния и очередное управление на данном шаге, т. е. $x_k = x_{k-1} - u_k$ ($k = 1, \dots, N + 1$).

Функция затрат на k -м шаге

$$d_k(x_{k-1}, u_k) = z + b(u_k) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.16)$$

на последнем шаге (зачете) она будет равна

$$d_{N+1}(x_N, u_{N+1}) = z + b(u_{N+1}) + z + b(x_N - u_{N+1}). \quad (3.17)$$

Составим уравнения Беллмана [2]. Пусть все контрольные мероприятия, кроме $N + 1$ -го, выполнены и учебный процесс находится в состоянии x_N . Для этого состояния минимальные затраты будут равны

$$S_1(x_N) = \min \{2z + b(u_{N+1}) + b(x_N - u_{N+1})\}, \quad (3.18)$$

причем $0 < u_{N+1} < x_N$.

Критическое значение управляемой переменной u_{N+1} , соответствующее экстремуму данной функции, определяется значением первой производной, равным 0: ($S_1'(x_N) = 0$). Получаем условие

$$b'(u_{N+1}) - b'(x_N - u_{N+1}) = 0, \text{ т. е. } b'(u_{N+1}) = b'(x_N - u_{N+1}). \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что

$$u_{N+1}^*(x_N) = x_N / 2. \quad (3.20)$$

Ищем вторую производную функции:

$$S_1''(x_N) = b''(u_{N+1}) + b''(x_N - u_{N+1}). \quad (3.21)$$

Получаем, что $S_1''(x_N) > 0$, т. е. в критической точке $u_{N+1} = x_N / 2$ имеется минимум функции:

$$S_1(x_N) = 2z + 2b(x_N / 2). \quad (3.22)$$

Рассмотрим управляемый процесс на двух последних шагах, когда выполнены все контрольные мероприятия, кроме двух последних – N -го и зачета. Величина оставшегося интервала времени равна x_N . В этом случае уравнение Беллмана имеет вид

$$\begin{aligned} S_2(x_{N-1}) &= \min_{0 < u_N < x_{N-1}} \{z + b(u_N) + S_1(x_{N-1} - u_N)\} = \\ &= \min_{0 < u_N < x_{N-1}} \{3z + b(u_N) + 2b((x_{N-1} - u_N) / 2)\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Минимум находится из условия $S_2'(x_{N-1}) = 0$, т. е.

$$b'(u_N) - b'((x_{N-1} - u_N) / 2) = 0. \quad (3.24)$$

Отсюда следует, что $b'(u_N) = b'((x_{N-1} - u_N) / 2)$. Таким образом,

$$u_N^*(x_{N-1}) = x_{N-1} / 3. \quad (3.25)$$

Минимальное значение функции затрат равно

$$S_2(x_{N-1}) = 3z + 3b(x_{N-1}/3).$$

Тогда для k -го шага уравнение Беллмана:

$$S_k(x_{N-k+1}) = \min_{0 < u_{N-k} < x_{N-k+1}} \{(k+1)z + b(u_{N-k}) + S_{k-1}(x_{N-k+1} - u_{N-k})\} = (k+1)(z + b(x_{N-k+1}/(k+1))); \quad (3.26)$$

$$S_k(x_{N-k+1}) = \min_{0 < u_{N-k} < x_{N-k+1}} \{(k+1)z + b(u_{N-k}) + S_{k-1}(x_{N-k+1} - u_{N-k})\} = (k+1)(z + b(x_{N-k+1}/(k+1)));$$

$$u^*_{N-k+1}(x_{N-k}) = x_{N-k+1}/(k+1). \quad (3.27)$$

Для N -го шага имеем:

$$S_N(x_0) = \min_{x_0} \{(N+1)z + b(x_0) + S_N(x_0)\} = (N+1)(z + b(x_0/(N+1))); \quad (3.28)$$

$$u^*_1(x_0) = x_0/(N+1). \quad (3.29)$$

На этом процесс условно-оптимального планирования заканчивается. Безусловная оптимизация начинается с конечного состояния $x_0 = T$, которое известно.

Путем последовательного применения уравнений Беллмана получим оптимальные значения для управлений и состояний:

$$u^*_1 = u^*_1(x_0) = \frac{T}{N+1}; \quad x^*_1 = T - u^*_1 = \frac{T}{N+1};$$

$$u^*_2 = u^*_2(x^*_1) = \frac{T}{N+1}; \quad x^*_2 = \frac{T(N-1)}{N+1}; \quad (3.30)$$

$$u^*_k = u^*_k(x_{k-1}) = \frac{T}{N+1}; \quad x^*_k = \frac{T(N-k-1)}{N+1}, \dots, u^*_N = u^*_N(x^*_{N-1}) = \frac{T}{N+1}; \quad x^*_N = 0.$$

Минимальные затраты составят

$$S_N(T) = (N+1)(z + b(T/(N+1))). \quad (3.31)$$

Эти затраты получаются при проведении контрольных мероприятий через равные временные интервалы:

$$u^*_1 = u^*_2 = \dots = u^*_k = \dots = u^*_N = T/(N+1).$$

Таким образом, при планировании контрольных мероприятий должен соблюдаться принцип *равномерной* загрузки студентов во время освоения учебной дисциплины.

ГЛАВА 4

ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

§ 4.1. Математическая модель задачи составления расписания в учебной организации

Задача составления расписания вызывает большой теоретический и практический интерес и рассматривается как вклад в комбинаторную оптимизацию [36, 67].

Предлагаемая математическая модель задачи составления расписания в учебной организации является дальнейшим развитием моделей [36, 40]. В качестве оптимизационного критерия задачи о составлении расписания могут выступать различные показатели, например, минимальное количество «окон» у преподавательского состава [40]. В ряде случаев данная задача может рассматриваться как многокритериальная. В данной работе в качестве целевой функции используется минимизация числа переходов учащихся из одной аудитории в другую:

$$\sum_{h=1}^R \sum_{v=1}^4 \sum_{i=1}^N \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^P \sum_{k=1}^S \sum_{u_1, u_2, u_3, u_4=1}^Q \sum_{l=1}^4 [4 - x_{ij_l k(4(h-1)+v)ul}].$$

Ограничения по числу лекционных часов в день для каждой учебной группы (не более C) имеют вид

$$\sum_{t_{h+1}=t_h+1}^{t_h+4} \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^S \sum_{u=1}^Q x_{ijktu} \leq C, \quad (4.1)$$

где $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, P$; $k = 1, \dots, S$; $t = 1, \dots, T$ ($t_0 = 0$); $u = 1, \dots, Q$; $h = 0, 1, \dots, R$; N – количество групп учащихся; P – количество преподавателей; S – количество аудиторий; Q – количество учебных дисциплин (D_1, \dots, D_Q); R – общее число рабочих дней (рассматривается случай, когда число пар в день не превосходит 4). Запись t_h означает t -ю пару h -го учебного дня. Введем в рассмотрение переменную

$$x_{ijktu} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й преподаватель читает лекцию (проводит занятие)} \\ & \text{по дисциплине } D_u \text{ для } i\text{-й группы } k\text{-й аудитории} \\ & \text{в } t\text{-ю пару времени;} \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Условие, что в данной группе планируется ежедневно не более одной пары занятий по данной дисциплине (проводится либо лекция, либо практическое занятие), в этих обозначениях запишется в виде

$$\sum_{t_{h+1}=t_h+1}^{t_h+4} \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^S \sum_{u=1}^Q x_{ijktu} = 1. \quad (4.3)$$

Условия, что один и тот же преподаватель не может иметь более λ часов лекционной нагрузки день и μ часов – общей учебной нагрузки в день имеют вид:

$$\sum_{t_{h+1}=t_h+1}^{t_h+4} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^S \sum_{u=1}^Q x_{ijktu} = \mu; \quad \sum_{t_{h+1}=t_h+1}^{t_h+4} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^S \sum_{u=1}^Q x_{ijktu} = \lambda. \quad (4.4)$$

Последняя сумма рассматривается по тем значениям u , которые соответствуют номерам лекционных курсов, читаемых данным преподавателем: $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l$. Для каждой такой учебной дисциплины через $K_{\tilde{u}_i}$ ($i = 1, \dots, l$) обозначим множество аудиторий, отведенных для занятий по данной дисциплине $D_{\tilde{u}_i}$, $u \in \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l\}$. Условие (4.4) по использованию для некоторых дисциплин специализированных классов можно записать следующим образом:

$$\sum_{t_{h+1}=t_h+1}^{t_h+4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \sum_{k \in K_{\tilde{u}_i}} x_{ijktu} = 1. \quad (4.5)$$

Согласно данному выражению, условие (4.5) рассматривается несколько в упрощенном варианте, когда предполагается, что каждый день какая-то из дисциплин $D_{\tilde{u}_1}, \dots, D_{\tilde{u}_l}$ читается (проводится) кем-либо из преподавателей в одной из отведенных для проведения этой дисциплины аудиторий. Такое условие, как отсутствие «окон» у учащихся, запишется в виде

$$\sum_{u_1=1}^P \sum_{u_2=1}^P \sum_{k_1=1}^S \sum_{k_2=1}^S \sum_{j_1=1}^P \sum_{j_2=1}^P (x_{ij_1k_1(4(h-1)+v)u_1} + x_{ij_2k_2(4(h-1)+v+1)u_2}) = 2, \quad (4.6)$$

где $j_1, j_2 \in \{1, \dots, P\}$; $u_1 \in \{1, \dots, Q\}$; $u_2 \in \{1, \dots, Q\}$; $k_1 \in \{1, \dots, S\}$; $k_2 \in \{1, \dots, S\}$; $h = 1, \dots, R$; $v = 1, 2, 3$. Переменная v соответствует нумерации учебных пар в учебный день; переменная h – нумерация учебных дней.

Рассмотрим условие: если в t -ю пару учебных часов j -й преподаватель располагает временем, то он может прочесть лекцию (провести занятие) по дисциплине D_u лишь для одной группы учащихся.

Пусть

$$d_{jtu} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й преподаватель в } t\text{-ю пару часов располагает} \\ & \text{временем для проведения занятия (лекции)} \\ & \text{по дисциплине } D_u; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Предполагается, что этот вектор известен из условия задачи. Тогда

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^S x_{ijktu} = d_{jtu}. \quad (4.8)$$

Условие (4.9): в t -ую пару i -я группа учащихся может слушать лишь одно занятие. Условие (4.10): в t -ю пару k -я аудитория может быть занята только одной i -й группой с j -м преподавателем. Имеем:

$$\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^S x_{ijktu} = 1; \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P x_{ijktu} = 1. \quad (4.10)$$

Рассмотрим условие (4.11): использование k -й аудитории j -м преподавателем для занятий с i -й группой по дисциплине D_u .

Пусть

$$d_{ijk_u} = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-я аудитория может быть использована} \\ & j\text{-м преподавателем для занятий с } i\text{-группой} \\ & \text{по дисциплине } D_u; \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Этот вектор дан в условии задачи. Тогда условие (4.9) можно записать в виде

$$\sum_{t=1}^T x_{ijktu} = d_{ijk_u}. \quad (4.11)$$

Два условия – ограниченность числа учебных часов по D_u для j -го преподавателя в i -й группе в семестре (году) и ограничение количества «окон» у преподавательского состава – запишутся следующим образом:

$$\sum_{k=1}^S \sum_{t=1}^T x_{ijktu} = B_{iju}; \quad (4.12)$$

$$\sum_{h=1}^R \sum_{v=1}^4 \sum_{j=1}^P \sum_{i_1, i_2=1}^N \sum_{k_1, k_2=1}^S \sum_{u_1, u_2=1}^Q (2 - x_{ij_1 k_1 (4(h-1)+v) u_1} - x_{ij_2 k_2 (4(h-1)+v+1) u_2}) C_1, \quad (4.13)$$

где B_{iju} – число учебных часов по D_u j -го преподавателя в i -й группе в семестре; C_1 выражает согласованное мнение преподавательского коллектива, управленческих структур и администрации учебного заведения.

Кроме того, условия (4.1)–(4.13) необходимо дополнить следующими:

$$0 \leq x_{ijk\ell u} \leq 1 \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, P; k=1, \dots, S; \ell=1, \dots, T; u=1, \dots, Q). \quad (4.14)$$

Определенные в условиях-ограничениях и в оптимизационном условии функции линейные. Данная оптимизационная задача решается методами отсечений, Гомори и другими [95].

Рассмотренные условия не являются догмой: их можно расширять, корректировать. В качестве целевой функции могут рассматриваться, например, затраты времени на переход из одной аудитории в другую (из одного корпуса в другой). В ряде случаев переборная задача целочисленной оптимизации требует больших затрат вычислительных ресурсов, и тогда используют эвристические алгоритмы.

Задача составления расписания находит большое практическое применение не только для организации учебного процесса, но и в других сферах человеческой деятельности (в задачах управления производством, при организации транспортных потоков, грузовых автомобильных перевозках, в управлении воздушным движением для обеспечения безопасности полетов, планировании проектов, управлении ресурсами в вычислительных системах и т. д.).

§ 4.2. Оптимизация распределения учебных дисциплин по преподавателям

В сфере деятельности высшего учебного заведения возникают задачи, связанные с рациональным назначением административного, учебно-педагогического, методического персонала на определенные должности, а также с формированием учебной нагрузки преподавателям (распределение учебных дисциплин по преподавателям).

Количество разнообразных дисциплин, ведущихся одним преподавателем, существенно возрастает с каждым годом. Это связано с увеличением учебной нагрузки, мировой тенденцией к увеличению числа специальностей, осваиваемых человеком в течение его трудовой деятельности, и другими причинами.

Вследствие различия в квалификации, образовании, способностях, опыте работы и других индивидуальных особенностей преподавателей качество учебного процесса существенно зависит от распределения учебных дисциплин по преподавателям (формирования учебной нагрузки).

Существующие в настоящее время процедуры конкурсного отбора персонала и формирования учебной нагрузки недостаточно формализованы и во многом зависят от субъективного мнения администрации учебного заведения, в том числе заведующих кафедрами.

Наиболее распространенным способом решения проблемы рационального назначения (выбора) является математическая модель задачи выбора (в зарубежной литературе она называется задачей о назначении) [119, 123].

Запишем математическую модель данной задачи применительно к задаче формирования учебной нагрузки.

Пусть имеется m учебных дисциплин: $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$, каждая из которых может быть закреплена за одним или несколькими из n преподавателей: $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$. При этом $m \geq n$.

Для каждой учебной дисциплины A_i ($i = \overline{1, m}$) и каждого преподавателя B_j ($j = \overline{1, n}$) методом экспертных оценок (например, методами самооценки, оценки результатов прежней деятельности, оценки деятельности эксперта группой) определяется степень соответствия (полезность) c_{ij} .

Требуется распределить дисциплины по преподавателям таким образом, чтобы добиться максимальной суммарной полезности для учебного процесса.

Следует отметить, что для устранения зависимости назначения преподавателей от мнения администрации учебного заведения процедура формирования экспертных оценок должна быть организована соответствующим образом [27, 32].

Обозначим через переменную x_{ij} назначение i -й дисциплины j -му преподавателю. Вначале рассмотрим случай $m = n$. При этом x_{ij} может принимать только два значения: $x_{ij} = 1$, если i -я дисциплина назначена j -му преподавателю, и $x_{ij} = 0$, если не назначена. Поэтому при назначении i -й дисциплины j -му преподавателю полезность равна $c_{ij} x_{ij}$.

Требуется найти максимум линейной целевой функции

$$L(\bar{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (4.15)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} m \\ i=1 \end{array} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m; \\ \begin{array}{l} n \\ j=1 \end{array} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, m; \\ x_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Умножением целевой функции на -1 задача приводится к модели транспортной задачи с «правильным балансом» [14].

Если $m > n$, то используется модель транспортной задачи с «неправильным балансом». В этом случае для приведения задачи к модели с «правильным балансом» вводятся $(m - n)$ фиктивных преподавателей.

Данная задача имеет следующую наглядную интерпретацию [59]. Строится граф принятия решений специального вида (рис. 4.1), когда i -я ось соответствует i -й дисциплине. На каждой оси в определенном масштабе откладываются значения c_{ij} , которые для данного значения j ($j = 1, \dots, n$) соединяются ломаной линией по всем осям. Затем по определенному алгоритму [59] производится назначение учебной дисциплины преподавателю. В настоящее время известно много пакетов прикладных программ для решения задачи о назначениях (например, с помощью средства «Поиск решения» в MS Excel). При использовании вместо данной информационной технологии [59] других методов данный граф служит наглядной иллюстрацией процесса принятия решений.

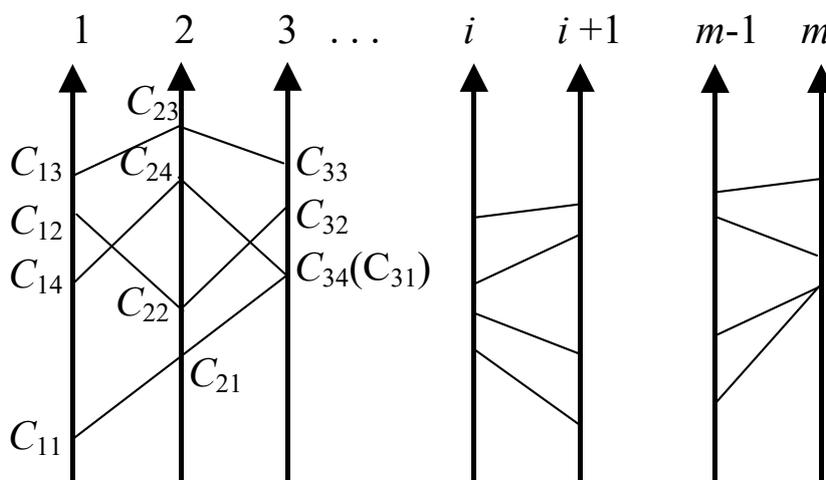


Рис. 4.1

Данный граф представляет собой информационную модель задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности, обеспечивающую возможность эффективного участия в нем человека-оператора.

§ 4.3. Нахождение оптимального распределения учебных составляющих лекции и практического занятия

Одной из актуальных задач в учебном процессе, возникающей при составлении рабочих планов и программы при использовании компетентностного подхода, является задача оптимального распределения времени между часами, отводимыми при чтении лекций на введение основных понятий (определений), разбор иллюстрирующих примеров и другие виды деятельности, на практических занятиях – на проверку домашних заданий, опрос по основным понятиям и т. п. При этом распределение времени должно быть выполнено в соответствии с компетенциями, которые должны быть сформированы при изучении данного раздела дисциплины [35].

В данном параграфе предложен метод решения указанной задачи, основанный на сведении ее к задаче линейного программирования.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим поставленную задачу применительно к математическим дисциплинам. Будем называть составляющей лекции: 1) разбор определений (L_1), 2) демонстрацию иллюстрирующих примеров (L_2), 3) рассмотрение (доказательство) утверждений (теорем) (L_3), 4) разбор решений задач (L_4). В общем случае некоторые из этих составляющих могут отсутствовать.

Учебной составляющей практического занятия будем называть следующие виды деятельности преподавателя и учащегося:

- 1) проверку основных понятий (например, интерактивным методом «Ромашка») (P_1);
- 2) проверку домашнего задания (P_2);
- 3) решение задач по новой теме (новому материалу) (P_3);
- 4) решение задач по закреплению материала (P_4);
- 5) выполнение самостоятельной работы (P_5);
- 6) выполнение контрольной работы (P_6);
- 7) выполнение расчетно-графической работы (P_7);
- 8) тестирование (P_8);
- 9) подготовка реферативного сообщения (P_9).

Некоторые из этих составляющих могут отсутствовать. Пусть рассматриваемый раздел содержит n тем: A_1, A_2, \dots, A_n , при изучении реализуются компетенции B_1, B_2, \dots, B_l .

Пусть раздел содержит m_1 пар часов лекций и m_2 пар часов практических занятий. Обозначим через $P_{ij}^{ks}(Л)$ ($P_{ij}^{kt}(П)$) долю времени s -й ($s = \overline{1, m_1}$) учебной пары часов, отводимой на рассмотрение $Л_j$ ($j = \overline{1, 4}$), и t -й ($t = \overline{1, m_2}$) пары часов, отводимой на отработку $П_j$ ($j = \overline{1, 9}$) i -й темы A_i ($i = \overline{1, n}$) k -й компетенции B_k ($k = \overline{1, l}$) (таблица).

Учебная составляющая Темы, компетенции	$Л_1$...	$Л_4$	$П_1$...	$П_9$
A_1, B_1	$P_{11}^{11}(Л)$...	$P_{14}^{11}(Л)$	$P_{11}^{11}(П)$...	$P_{19}^{11}(П)$
A_1, B_2	$P_{11}^{21}(Л)$...	$P_{14}^{21}(Л)$	$P_{11}^{21}(П)$...	$P_{19}^{21}(П)$
...
A_1, B_l	$P_{11}^{ls}(Л)$...	$P_{14}^{ls}(Л)$	$P_{11}^{lt}(П)$...	$P_{19}^{lt}(П)$
...
A_n, B_l	$P_{n1}^{lm_1}(Л)$...	$P_{n4}^{lm_1}(Л)$	$P_{n1}^{lm_2}(П)$...	$P_{n9}^{lm_2}(П)$

Пусть согласно опросу экспертов имеем: $\alpha_{ij}^{ks}(Л)$ $P_{ij}^{ks}(Л)$ $\beta_{ij}^{ks}(Л)$; $\alpha_{ij}^{kt}(П)$ $P_{ij}^{kt}(П)$ $\beta_{ij}^{kt}(П)$. Данный раздел содержит $m_1 + m_2$ пар учебных часов. Предположим, что на реализацию k -й компетенции в i -й теме требуется не менее α_i^k и не более β_i^k долей от $m_1 + m_2$ пар часов.

Тогда

$$\alpha_i^k = \sum_{s=1}^{m_1} \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij}^{ks}(Л) + \sum_{t=1}^{m_2} \sum_{j=1}^9 \alpha_{ij}^{kt}(П); \beta_i^k = \sum_{s=1}^{m_1} \sum_{j=1}^4 \beta_{ij}^{ks}(Л) + \sum_{t=1}^{m_2} \sum_{j=1}^9 \beta_{ij}^{kt}(П). \quad (4.17)$$

Обозначим через $x_{ij}^k(Л)$ долю пар часов, отводимую на $Л_j$ в рамках темы i и компетенции k ; аналогично $x_{ij}^k(П)$ – доля пар часов, отводимая на $П_j$ темы i и компетенции k . Имеем следующую систему неравенств:

$$\alpha_i^k \leq \sum_{j=1}^4 x_{ij}^k(Л) + \sum_{j=1}^9 x_{ij}^k(П) \leq \beta_i^k, \quad (4.18)$$

где $k = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, n}$, причем

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 x_{ij}^k(Л) + \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^9 x_{ij}^k(П) = 1. \quad (4.19)$$

В то же время каждая доля, $x_{ij}^k(L)$ и $x_{ij}^k(\Pi)$, вносит свой вклад в качество обучения, что выражается через соответствующие весовые коэффициенты, которые можно назвать *коэффициентами значимости* данной доли учебных часов. Будем обозначать эти коэффициенты через $\gamma_{ij}^k(L)$ и $\gamma_{ij}^k(\Pi)$ соответственно.

Тогда сумма L произведений указанных долей на соответствующие коэффициенты должна стремиться к максимуму:

$$L = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 \gamma_{ij}^k(L) x_{ij}^k(L) + \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^9 \gamma_{ij}^k(\Pi) x_{ij}^k(\Pi) \rightarrow \max. \quad (4.20)$$

Таким образом, имеем задачу линейного программирования с максимизируемой целевой функцией L при ограничениях (4.18) и (4.20). Данная задача может быть решена симплекс-методом.

Мы рассмотрели случай, когда учебные составляющие распределяются по темам и компетенциям. Аналогичное распределение можно получить по разделам, параграфам, пунктам, часам занятий. В ряде случаев можно рассматривать меньшее количество составляющих.

Например, разбор определений и демонстрацию примеров можно считать как одну составляющую, а изучение утверждений и разбор решений задач – в качестве второй составляющей. Для практических занятий могут быть рассмотрены отдельно контрольные мероприятия, а также рефераты, а остальное время распределяется между тремя составляющими: проверкой знаний основных определений и выполнения домашнего задания, решением задач по новой теме и закреплением материала.

Пусть распределение осуществляется в пределах часа (параграфа, пункта) и для двух компетенций, причем условие (4.20) отсутствует, а условия (4.18) имеют вид односторонних неравенств с левой частью α .

На малом промежутке времени задача сводится к отысканию двух составляющих лекции (практического занятия), которые, с одной стороны, наиболее важны (весомы в долевым соотношении), а с другой – наиболее быстро реализуют формируемые компетенции. Отыскание соответствующих долей $x_{ij}^k(L)$ ($x_{ij}^k(\Pi)$) можно осуществлять геометрически (рис. 4.2), используя следующий алгоритм.

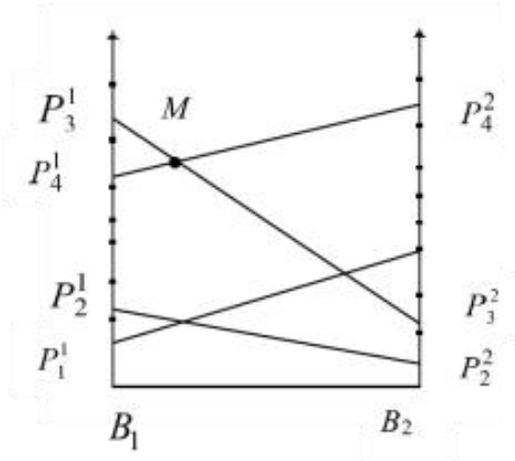


Рис. 4.2

Не нарушая общности, будем считать, что $n = 1$, $l = 2$ и определяются $x_{ij}^k(JL)$.

Строим две параллельные прямые (рис. 4.2), соответствующие двум компетенциям – B_1 и B_2 . На каждой прямой откладываем в масштабе доли $P_{ij}^k(JL)$ ($i = 1; k = 1, 2; j = \overline{1, 4}$). Во избежание громоздкости будем обозначать $P_{1j}^k(JL)$ через $P_1^k, P_2^k, P_3^k, P_4^k$. Начало отсчета идет от отрезка B_1B_2 , длина которого условно принята за единицу. Соединяем соответствующие точки P_i^1 и P_i^2 на данных двух прямых отрезками. M – нижняя точка верхней ломаной – связана с компетенциями B_1 и B_2 .

Для отыскания соответствующих значений $x_{1j}^k(JL)$ решаем матричную игру 2×2 в смешанных стратегиях. Выбираем те точки на прямых, соответствующие отрезки которых дают в пересечении точку M .

Для рис. 4.2 находим:

$$x_{13}^1 = \frac{P_3^2 - P_4^1}{P_3^1 + P_3^2 - P_4^1 - P_4^2};$$

$$x_{13}^2 = \frac{P_3^1 - P_4^2}{P_3^1 + P_3^2 - P_4^1 - P_4^2};$$

$$x_{14}^1 = \frac{P_3^2 - P_4^2}{P_3^1 + P_3^2 - P_4^1 - P_4^2};$$

$$x_{14}^2 = \frac{P_3^1 - P_4^1}{P_3^1 + P_3^2 - P_4^1 - P_4^2}.$$

Следовательно, x_{13}^1 100 % лекционного времени в пределах данного учебного часа (при изучении данного параграфа или пункта изучаемой дисциплины) отводится на рассмотрение (доказательство) утверждений (теорем), связанных с реализацией компетенции B_1 ; x_{13}^1 100 % – с реализацией компетенции B_2 ; x_{14}^1 100 % лекционного времени отводится на разбор решений задач по реализации компетенции B_1 ; x_{14}^2 100% – на разбор решений задач по реализации компетенции B_2 .

Если P_i^k не заданы, для них можно использовать ограничения $\alpha_i^k P_i^k \beta_i^k$, где α_i^k и β_i^k – экспертные оценки, либо использовать метод решения матричных игр в нечетных смешанных стратегиях [93].

Аналогично решается вопрос относительно планирования практических занятий. Предложенный метод планирования учебного времени относительно учебных составляющих лекции и практического занятия позволяет находить оптимальное соответствие между их процентным соотношением, а также процентным соотношением между соответствующими компетенциями.

Если $x_{ij}^k(J)$ и $x_{ij}^k(\Pi)$ найдены как решение задачи линейного программирования с целевой функцией (4.20) при ограничениях (4.18), (4.19), то для $k = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, n}$ можно найти значения $P_{ij}^{ks}(J)$ и $P_{ij}^{kt}(\Pi)$.

Действительно, вместо неравенств (4.18) можно рассматривать равенства вида

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij}^k(J) + \sum_{j=1}^9 x_{ij}^k(\Pi) = \sum_{s=1}^{m_1} P_{ij}^{ks}(J) + \sum_{t=1}^{m_2} P_{ij}^{kt}(\Pi). \quad (4.21)$$

Пусть $\delta_{ij}^k(J)$ и $\delta_{ij}^k(\Pi)$ – весовые коэффициенты долей $P_{ij}^{ks}(J)$ и $P_{ij}^{kt}(\Pi)$ соответственно. Сумма L произведений этих долей на соответствующие коэффициенты должна стремиться к максимуму:

$$L = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^{m_1} \delta_{ij}^{ks}(J) P_{ij}^{ks}(J) + \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^9 \sum_{t=1}^{m_2} \delta_{ij}^{kt}(\Pi) P_{ij}^{kt}(\Pi) \rightarrow \max. \quad (4.22)$$

Следовательно, имеем задачу линейного программирования с максимизируемой целевой функцией L при ограничениях (4.21). Задача решается симплекс-методом.

Рассмотрен метод нахождения задачи оптимального распределения учебных составляющих лекции и практического занятия при четкой информации о весовых коэффициентах. В случае нечеткой информации используется метод решения систем уравнений с нечеткими коэффициентами.

§ 4.4. Организация сбалансированной системы самостоятельной работы учащихся

Процесс обучения заключается в изучении учащимися учебного материала по данным дисциплинам в течение фиксированного промежутка времени (недели, месяца, семестра и т. п.) и осуществляется во время аудиторных часов занятий и часов самостоятельной работы. Часы самостоятельной работы, можно сказать, имеют несколько степеней свободы:

1) в направлении количества изучаемых дисциплин данным обучаемым (возможна такая ситуация, когда данный учащийся вообще не рассматривает некоторые дисциплины во время самостоятельной работы по причине хорошего освоения данного материала на аудиторных занятиях либо, наоборот, из-за полного непонимания данного предмета и нежелания им заниматься;

2) в направлении распределения часов самостоятельной работы между изучаемыми данным учащимся дисциплинами.

Таким образом, имеются приоритеты относительно желания изучить тот или иной предмет и необходимости изучения. Данную ситуацию можно представить структурной матрицей предпочтений за рассматриваемый промежуток времени. Это дает возможность рассматривать изучение дисциплин в комплексе с учетом ограниченности временного фактора как в аудиторные часы, так и в часы самостоятельной работы. При комплексном подходе к организации самостоятельной работы, включающем в себя учет отношения обучаемых к учебным дисциплинам, проявляется *синергетический эффект*.

Рассмотрим постановку задачи в общем случае. Пусть в данный период изучается n дисциплин: D_1, D_2, \dots, D_n , на изучение которых данный обучаемый по оценке преподавателя (или самого обучаемого) должен затратить соответственно x_1, x_2, \dots, x_n условных единиц времени ($x_i > 0$). Пусть коэффициент $a_{i,j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) обозначает частоту предпочтения данным учащимся изучения дисциплины D_i дисциплине D_j в силу его матрицы предпочтений или при приближающемся контрольном мероприятии по дисциплине D_i . Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4.23)$$

Структурная матрица предпочтений A записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

В соответствии с уравнением (4.23) сумма элементов любого столбца матрицы A равна 1. Согласно определению коэффициентов a_{ij} для любой дисциплины D_i фактическое время t_i , затрачиваемое на ее изучение (за рассматриваемый промежуток времени), вычисляется по формуле

$$t_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n. \quad (4.25)$$

Будем считать систему предпочтений *сбалансированной*, если для любой дисциплины D_i время t_i не меньше, чем x_i , т. е. $t_i \geq x_i$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Тогда на основе выражений (4.24) и (4.25) можно показать, что t_i будет равно x_i . Получается матричное уравнение

$$AX = X, \quad (4.26)$$

где X обозначает вектор-столбец с положительными координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Задача сводится к отысканию собственного вектора матрицы A при собственном значении $\lambda = 1$.

Рассмотрим для примера матрицу A вида

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

для трех дисциплин – D_1, D_2, D_3 . Решая уравнение $(A - E) \cdot X = 0$ (здесь E – единичная матрица, 0 – нулевая матрица) или систему

$$\begin{aligned} -1/2 x_1 + 1/2 x_2 + 1/4 x_3 &= 0 \\ 1/3 x_1 - 1/2 x_2 + 1/2 x_3 &= 0, \\ 1/6 x_1 - 3/4 x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

находим: $x_1 = 4,5C$; $x_2 = 4C$; $x_3 = C$, где C – произвольная положительная константа. Таким образом, сбалансированность системы предпочтений в изучении данных трех дисциплин достигается при временном векторе $\bar{x} = (4,5C; 4C; C)$, т. е. при соотношении временных затрат $4,5 : 4 : 1$ или соотношении $9 : 8 : 2$.

Структурная матрица системы предпочтений и временной вектор \bar{x} условия ее сбалансированности зависят, прежде всего, от степени интереса обучаемого к той или другой изучаемой дисциплине, от его коэффициента интеллекта, а также от психологических особенностей индивидуума, выраженных, например, его *функцией полезности*.

На основе опроса данного количества учащихся определяются:

1) выборочная усредненная структурная матрица предпочтений \bar{A} , каждый элемент $\bar{a}_{i,j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) которой вычисляется как среднее арифметическое соответствующих элементов $a_{i,j}$ по всем рассматриваемым матрицам A опрошенных учащихся;

2) матрица разброса S с элементами $s_{i,j}$ ($i, j = \overline{1, n}$), где $s_{i,j}$ представляет собой разброс значений $a_{i,j}$ относительно $\bar{a}_{i,j}$. Пусть $a_{i,j}^{\Gamma}$ обозначает генеральную среднюю, $\sigma_{i,j}$ – генеральное среднее квадратическое отклонение случайной величины, значения которой представляют собой элементы $a_{i,j}$ матриц A всей совокупности рассматриваемого множества обучаемых. Для данных числовых характеристик можно найти интервальные оценки, обладающие определенными точностью и надежностью.

Отметим, что вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ может иметь не только временную трактовку. Это может быть вектор, координата x_i ($i, j = \overline{1, n}$), которого характеризует общее количество ситуаций, когда вместо дисциплины D_j учащийся занимается (в силу личной заинтересованности или учебной необходимости) изучением дисциплин D_i ($i = \overline{1, n}$).

Сбалансированность системы будет достигаться при положительном решении системы типа (4.27). В противном случае необходимо изменять данные структурной матрицы предпочтений A .

При формировании матрицы A , а также вектора \bar{x} существенную помощь может оказать понятие когнитивного стиля [93], который характеризуется, в частности, предпочтением необработанных или агрегированных данных, числом применяемых правил интеграции информации, числом генерируемых альтернатив, использованием качественной или количественной информации.

Мы рассмотрели задачу организации сбалансированной системы самостоятельной работы учащихся. Очевидно, аналогичным образом решаются подобные задачи организации сбалансированной системы изучения данных дисциплин при совокупном рассмотрении всех учебных часов, отводимых на изучение дисциплин.

Существуют и другие методы решения рассмотренной задачи. Например, в [35] предложен метод оптимального планирования учебных часов между изучаемыми дисциплинами на основе эконометрического моделирования.

Предложенный в данном параграфе метод обладает достаточной простотой, наглядностью и универсальностью. Его использование позволяет преподавателю контролировать и корректировать структурные матрицы предпочтений учащихся, ориентируясь на эталонную матрицу, в качестве которой может рассматриваться, например, выборочная усредненная структурная матрица.

§ 4.5. Моделирование точек насыщения в учебном процессе

Одним из важных вопросов в образовательном процессе является учет темпа изложения учебного материала преподавателем и определение скорости получения и формирования устойчивых знаний обучающимися. Решение данного вопроса позволяет формировать индивидуальные траектории обучения. Рассматриваемой проблеме посвящено большое количество научных публикаций. Так, в работе [127] отмечается, что формирование индивидуальных образовательных траекторий является инструментом совершенствования учебного процесса и внедрения инновационных педагогических технологий, методов и форм обучения. В статье [5] приведены варианты типовых графиков траекторий студентов и преподавателей, отражающих качественный процесс усвоения нового материала (вид кривой) и необходимое количество прилагаемых для этого усилий (площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс).

Цель данного параграфа состоит в разработке подхода к моделированию точек насыщения в учебном процессе.

Скорость процесса получения и усвоения знаний в разные моменты времени, в зависимости от сложности учебного материала и мотивации изучения, у разных обучаемых (групп обучаемых) может изменяться по-разному. Наиболее часто встречающиеся варианты показаны на рис. 4.3, 4.4.

Здесь t_0 – начало отсчета, а t_n – время, когда происходит насыщение полученной информацией и ее усвоение. Далее следует спад и снижение скорости процесса. Это происходит индивидуально и зависит от субъективных и объективных обстоятельств, прежде всего от подготовки обучаемых, мастерства преподавателей, сложности учебного материала и мотивации для его изучения.

Скорость $v(t)$ определяется числом усвоенных знаний (понятий, алгоритмов и т. п.) за выделенный промежуток времени.

Площади под графиками $v(t)$ представляют собой объемы $Q(t)$ полученных и усвоенных знаний: чем больше площадь, тем больше объем. Таким образом, используя понятие скорости получения и усвоения знаний, можно определить индивидуальные траектории обучаемых и говорить о проделанной работе.

Графики на рис. 4.5–4.8 по форме повторяют графики, связанные с анализом психологических характеристик индивидуумов [28]. Графики на рис. 4.5 и 4.6 характеризуют соответственно несклонность / склонность к риску, график на рис. 4.8 характеризует человека, безразличного к риску. Возникает вопрос о коррелированности данных, по которым построены графики. Поэтому психологическим службам можно было бы собрать статистический материал по этому вопросу для установления связи психологических характеристик с траекториями обучения на временных отрезках достижения точек насыщения.

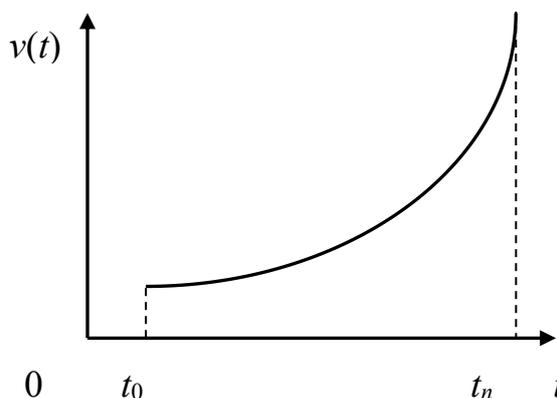


Рис. 4.3

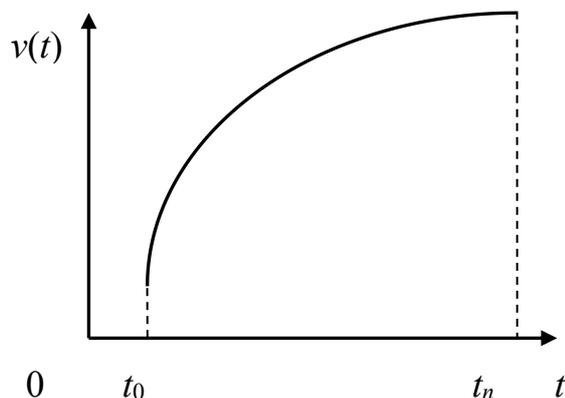


Рис. 4.4

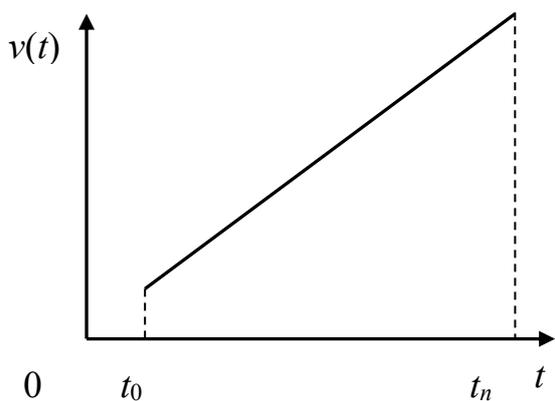


Рис. 4.5

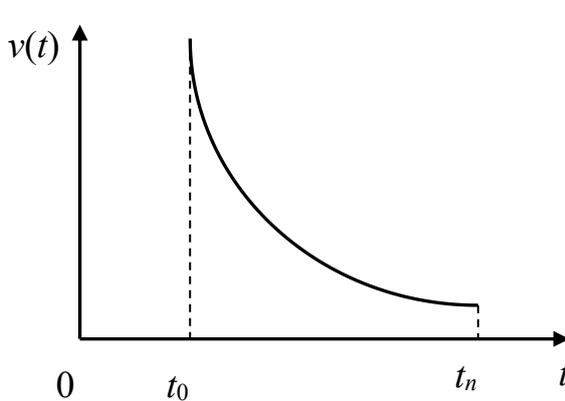


Рис. 4.6

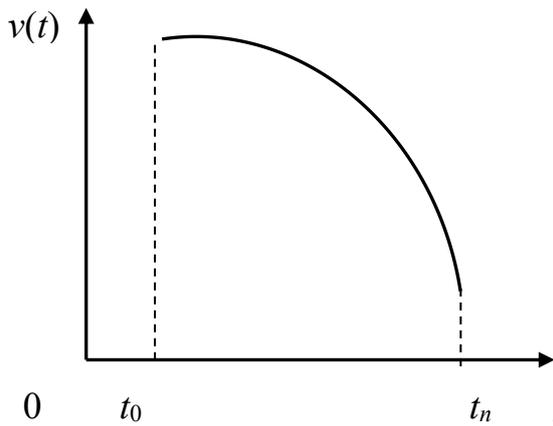


Рис. 4.7

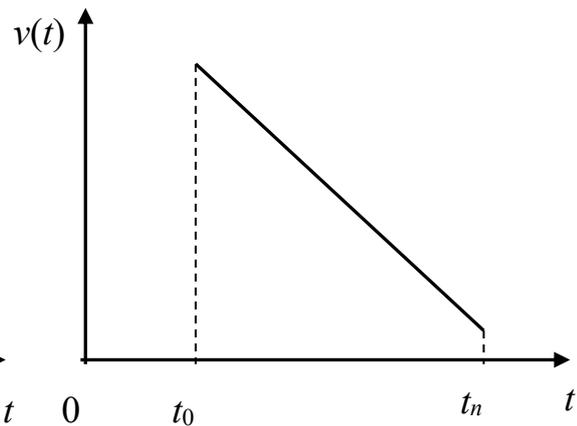


Рис. 4.8

Таким образом, с каждым пунктом, параграфом, каждой главой изучаемого материала для каждого учащегося (группы учащихся) можно построить последовательность линий, которая позволяет в индивидуальном порядке определить наиболее сложные для освоения понятия (фрагменты). С учетом их коррелированности представляется возможным прогнозировать «срывы» и «взлеты», чтобы оптимальным образом выстраивать процесс обучения.

Сравнение и идентификация графиков разных учащихся позволяет делить их на группы согласно психологическим особенностям, способностям и мотивации.

В процессе получения и усвоения знаний учащийся (учащиеся) совершает определенную работу, пропорциональную объему полученных знаний. В то же время работа $A(t)$ равна произведению силы $F(t)$ (в учебном процессе – усилий) на пройденный путь (в учебном процессе – путь, пройденный по траектории знаний со скоростью $v(t)$). Таким образом,

$$Q(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt = P(t) A(t) = F(t) S(t) = F(t) \int_{t_0}^t P(t) S(t) dt, \quad (4.28)$$

где $P(t)$ – коэффициент пропорциональности, равный, например, свертке коэффициентов интеллекта, трудолюбия учащегося и мастерства преподавателя. Эти коэффициенты можно оценить на основе статистических данных опроса (учащихся, преподавателей, психологической службы) с последующим построением эконометрической модели или использовать специальные расчетные формулы [34].

Из формулы (4.29) находим функцию $F(t)$:

$$F(t) = Q(t) \int_{t_0}^t P(t) S(t) dt, \quad (4.29)$$

которая является характеристикой совместных усилий преподавателя и учащегося в учебном процессе.

Исходя из найденных точек насыщения можно по формуле (4.29) определить значение максимального усилия, после которого учащийся должен иметь на некотором промежутке времени щадящий режим получения и усвоения понятий.

Для повышения мотивации в точке насыщения желательно каким-либо образом поощрить учащегося (например, поставить соответствующую оценку, даже если он пока не «дотянул» до нее).

§ 4.6. Инновационная технология оптимизации учебного процесса

Внедрение проектного метода в образовательный процесс требует разработки инновационной технологии оценивания успеваемости учащихся. Оценки следует рассматривать с позиций стоимости получаемых знаний (в смысле значимости), учебные дисциплины – как конкурирующие проекты. В этом случае можно рассматривать портфель оценок и рассчитывать его характеристики по аналогии с портфелем проектов в экономике [88, с. 75].

Пусть на данном курсе обучения изучается n учебных дисциплин. Обозначим через $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ вектор учебных часов, отводимых соответственно на данные дисциплины, включая часы самостоятельной работы, при этом $\sum_{i=1}^n a_i = a$, где a – значение по федеральным государственным общеобразовательным стандартам (ФГОС).

Разумеется, вектор \bar{a} – это не догма в учебном процессе, а руководство к действию. Поэтому его координаты представляют собой переменные величины, варьируемые с учетом значения по ФГОС \bar{a} . Ясно, чем больше часов a_i отводится на изучение i -й дисциплины, тем лучше успеваемость по данной дисциплине как отдельных обучаемых, так и группы в целом, что наглядно выражается в соответствующих баллах. На основе \bar{a} можно определить *портфель баллов* по этим дисциплинам:

$$\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

При этом X_i – случайные величины, которые получаются по итогам проверки знаний учащихся. Так, X_i может быть средним баллом учебной

группы по дисциплине. Назовем случайную величину $W = \sum_{i=1}^n X_i$ стоимостью портфеля оценочных баллов.

При $t = 0$ все величины, X_i и W , фиксированы, поэтому можно считать их неслучайными. Примем, что $X_i = C_i$ и $W = C$ (C_i и C – заданные величины и $C = \sum_{i=1}^n c_i$).

Величину $d_p(\Delta t) = \frac{W(\Delta t) - C}{C}$ назовем доходностью портфеля за время Δt , а $d_i(\Delta t) = \frac{X_i(\Delta t) - C_i}{C_i}$ – доходностью i -й компоненты портфеля [15, с. 270]. Пусть $\lambda_i = C_i / C$, тогда

$$d_p(\Delta t) = \sum_{i=1}^n d_i(\Delta t) \lambda_i. \quad (4.30)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d_p(\Delta t) &= \frac{W(\Delta t)}{C} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(\Delta t)}{\sum_{i=1}^n C_i} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i(\Delta t) - C_i)}{\sum_{i=1}^n C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i(\Delta t) - C_i}{\sum_{i=1}^n C_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{X_i(\Delta t) - C_i}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i(\Delta t) - C_i}{C_i} \lambda_i = \sum_{i=1}^n d_i(\Delta t) \lambda_i. \end{aligned}$$

Таким образом, доходность портфеля равна сумме доходностей всех его составляющих.

Пусть $x_i^{(j)}$ – значения случайной величины $X_i(\Delta t)$ ($j = \overline{1, n_i}$); $P_i^{(j)}$ – вероятность того, что $X_i(\Delta t)$ примет значение $x_i^{(j)}$; $d_k^{(s)}$ – значения случайной величины $d_k(\Delta t)$ ($s = \overline{1, m_i}$); $P_k^{(s)}$ – вероятность принятия случайной величиной $d_k(\Delta t)$ значения $d_k^{(s)}$. Имеем:

среднее значение $X_i(\Delta t)$

$$M[X_i(\Delta t)] = \sum_{j=1}^{n_i} x_i^{(j)} P_i^{(j)}; \quad (4.31)$$

среднее значение $d_k(\Delta t)$

$$M[d_k(\Delta t)] = \sum_{s=1}^{m_i} d_k^{(s)} P_k^{(s)}; \quad (4.32)$$

дисперсия $X_i(\Delta t)$

$$D X_i(\Delta t) = \sum_{j=1}^{n_i} (x_i^{(j)} - M[X_i(\Delta t)])^2 P_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{n_i} (x_i^{(j)})^2 P_i^{(j)} - (M X_i(\Delta t))^2; \quad (4.33)$$

среднее квадратическое отклонение $X_i(\Delta t)$

$$\sigma [X_i(\Delta t)] = \sqrt{D[X_i(\Delta t)]}; \quad (4.34)$$

дисперсия $d_k(\Delta t)$

$$\begin{aligned} D[d_k(\Delta t)] &= \sum_{s=1}^{m_i} (d_k^{(s)} - M[d_k(X\Delta t)])^2 P_k^{(s)} = \\ &= \sum_{s=1}^{m_i} (d_k^{(s)})^2 p_k^{(s)} - (M[d_k(\Delta t)])^2; \end{aligned} \quad (4.35)$$

среднее квадратическое отклонение $d_k(\Delta t)$

$$\sigma [d_k(\Delta t)] = \sqrt{D[d_k(\Delta t)]}. \quad (4.36)$$

Рассчитаем числовые характеристики случайной величины – доходности портфеля оценочных баллов. Математическое ожидание

$$M d_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i M d_i(\Delta t). \quad (4.37)$$

Эту величину назовем *эффективностью портфеля*. Имеют место соотношения

$$M d_i(\Delta t) = M \frac{X_i(\Delta t) - C_i}{C_i} = \frac{1}{C_i} M [X_i(\Delta t) - C_i] = \frac{M X_i(\Delta t) - C_i}{C_i},$$

т. е.

$$M d_i(\Delta t) = \frac{M X_i(\Delta t) - C_i}{C_i}. \quad (4.38)$$

Дисперсия доходности портфеля

$$D d_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 D d_i(\Delta t) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j K_{ij}, \quad (4.39)$$

где K_{ij} – момент корреляции $d_i(\Delta t)$ и $d_j(\Delta t)$.

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma [d_p] = \sqrt{D[d_p]}. \quad (4.40)$$

Эту величину *риском* портфеля. Она определяется по формуле

$$D d_i(\Delta t) = D \frac{X_i(\Delta t) - C_i}{C_i} = \frac{1}{C_i^2} D [X_i(\Delta t) - C_i] = \frac{1}{C_i^2} D X_i(\Delta t),$$

т. е.

$$D d_i(\Delta t) = \frac{1}{C_i^2} D X_i(\Delta t). \quad (4.41)$$

Пример. В первом семестре портфель оценочных баллов по 12-балльной шкале для 8 дисциплин составил

$$\bar{X}^0 = (8,1; 7,9; 6,25; 7,8; 9,2; 10,1; 6,5; 8,9),$$

где координаты – средние баллы экзаменуемых групп. Во втором семестре для этих групп данный вектор преобразовался в вектор средних баллов: (8,15; 9; 6,1; 7,7; 9,2; 10,1; 6,5; 8,9) при векторе дисперсий

$$(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8) = (4,5; 3,0; 3,1; 3,8; 5,3; 5,8; 3,3; 4,9).$$

Определить эффективность и риск портфеля за этот период, если $r_{23} = 0,2$, $r_{15} = 0,5$, а остальные коэффициенты корреляции равны 0.

Решение

Последовательно находим:

$$M d_1(0,5 \text{ года}) = \frac{8,15 - 8,1}{8,1} = 0,006; \quad M d_2(0,5 \text{ года}) = \frac{9 - 7,9}{7,9} = 0,139;$$

$$M d_3(0,5 \text{ года}) = \frac{6,1 - 6,25}{8,1} = -0,024; \quad M d_4(0,5 \text{ года}) = \frac{7,7 - 7,8}{7,8} = -0,013;$$

$$M d_5(0,5 \text{ года}) = \frac{9,2 - 9,2}{9,2} = 0; \quad M d_6(0,5 \text{ года}) = \frac{10,1 - 10,1}{10,1} = 0;$$

$$M d_7(0,5 \text{ года}) = \frac{6,5 - 6,5}{6,5} = 0; \quad M d_8(0,5 \text{ года}) = \frac{9 - 8,9}{8,9} = 0,011;$$

$$C = 8,1 + 7,9 + 6,25 + 7,8 + 9,2 + 10,1 + 6,5 + 8,9 = 64,75;$$

$$\lambda_1 = \frac{8,1}{64,75} = 0,125; \quad \lambda_2 = \frac{7,9}{64,75} = 0,122; \quad \lambda_3 = \frac{6,25}{64,75} = 0,097; \quad \lambda_4 = \frac{7,8}{64,75} = 0,12;$$

$$\lambda_5 = \frac{9,2}{64,75} = 0,142; \quad \lambda_6 = \frac{10,1}{64,75} = 0,156; \quad \lambda_7 = \frac{6,5}{64,75} = 0,1; \quad \lambda_8 = \frac{8,9}{64,75} = 0,137.$$

Эффективность портфеля

$$M d_p = 0,125 \cdot 0,006 + 0,122 \cdot 0,139 - 0,097 \cdot 0,024 - 0,12 \cdot 0,013 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0,137 \cdot 0,011 = 0,02. \quad (4.42)$$

Таким образом, эффективность данного портфеля составляет всего 2 %. Дело в том, что часть составляющих этого портфеля имеет отрицательную доходность, так как по условию задачи во втором семестре по некоторым дисциплинам имеется снижение балла. Дадим рекомендации относительно эффективности портфеля. Преобразуем формулу (4.37) с учетом формулы (4.38) и определения λ_i :

$$M d_p = \frac{M[X_1] - C_1}{C_1} \frac{C_1}{C} + \frac{M[X_2] - C_2}{C_2} \frac{C_2}{C} + \dots + \frac{M[X_n] - C_n}{C_n} \frac{C_n}{C} = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^n (M[X_i] - C_i) \frac{1}{C} \min(M[X_i] - C_i) n; \quad (4.43)$$

$$\frac{1}{C} \max(M[X_i] - C_i) n \leq M[d_p] \leq \frac{1}{C} \min(M[X_i] - C_i) n. \quad (4.44)$$

На основе неравенств (4.44) имеем:

$$\min_i (M[X_i] - C_i) \frac{C}{n} \leq M[d_p] \leq \frac{C}{n} \max_i (M[X_i] - C_i). \quad (4.45)$$

Рассчитаем риск портфеля для рассматриваемого примера:

$$K_{ij} = \sigma_i \sigma_j r_{ij} = \sqrt{D_i} \sqrt{D_j} r_{ij},$$

далее воспользуемся формулами (4.39) и (4.40).

Имеем:

$$\begin{aligned} D d_p &= (0,125)^2 \frac{4,5}{(8,1)^2} + (0,122)^2 \frac{3,9}{(7,9)^2} + (0,097)^2 \frac{3,1}{(6,25)^2} + (0,12)^2 \frac{3,1}{(7,8)^2} + \\ &+ (0,142)^2 \frac{5,3}{(9,2)^2} + (0,156)^2 \frac{5,8}{(10,1)^2} + (0,1)^2 \frac{3,3}{(6,5)^2} + (0,137)^2 \frac{4,9}{(8,9)^2} + \\ &+ 2 \cdot 0,122 \cdot 0,097 \frac{1,97}{7,9} \frac{1,76}{6,25} + 2 \cdot 0,125 \cdot 0,142 \frac{2,12}{8,1} \frac{2,3}{9,2} \cdot 0,5 = 0,0097; \\ \sigma d_p &= \sqrt{0,0097} = 0,098 \approx 0,1. \end{aligned}$$

Любая учебная организация заинтересована в снижении риска портфеля оценочных баллов при поддержании его эффективности на определенном уровне. Рассмотрим основные рекомендации по снижению риска портфеля. Преобразуем $D d_p$, используя формулы (4.39) и (4.41):

$$D d_p = \frac{C_1^2 D_1}{C^2 C_1^2} + \frac{C_2^2 D_2}{C^2 C_1^2} + \dots + \frac{C_n^2 D_n}{C^2 C_n^2} + \frac{2 \sum_{i < j} C_i C_j K_{ij}}{C^4} = \frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^n D_i + \frac{2}{C^4} \sum_{i < j} C_i C_j K_{ij}. \quad (4.46)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^n D_i + \frac{2}{C^4} \sum_{i < j} C_i C_j K_{ij} &\geq \frac{\max_i D_i n}{\min_i C_i^2 n^2} + \frac{\max_{i < j} (C_i C_j) \max_{i < j} K_{ij} n(n-1)}{\min_i C_i^4 n^4} \\ &= \frac{\max_i D_i}{\min_i C_i^2 n} + \frac{\max_{i < j} K_{ij}}{\min_i C_i^2 n^2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

В то же время

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^n D_i + \frac{2}{C^4} \sum_{i < j} C_i C_j K_{ij} &\leq \frac{\min_i D_i n}{\max_i C_i^2 n^2} + \frac{\min_{i < j} (C_i C_j) \min_{i < j} K_{ij} n(n-1)}{\max_i C_i^4 n^4} \\ &= \frac{\min_i D_i}{\max_i C_i^2 n} + \frac{\min_{i < j} K_{ij}}{\max_i C_i^2 n^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Из (4.47) и (4.48) получаем:

$$D[d_p] \geq \frac{\min_i D_i}{\max_i C_i^2 n} + \frac{\min_{i < j} K_{ij}}{\max_i C_i^2 n^2} \quad (4.49)$$

Таким образом, неравенства (4.45) и (4.49) дают нижнюю и верхнюю оценки соответственно для эффективности и риска портфеля оценочных баллов. Рассмотрим возможную аппроксимацию среднего балла.

Предложим следующие аппроксимирующие формулы:

$$X_i = \frac{\Phi_i a_i}{\Omega_i} b_i, \quad (4.50)$$

где Φ_i – коэффициент увлеченности; Ω_i – сложность дисциплины; a_i – число часов, отводимых на изучение дисциплины; Φ_i , Ω_i – случайные величины; a_i , b_i – неслучайные величины; b_i – коэффициент;

$$X_i = b_i^0 \Phi_i + b_i^1 a_i + \frac{b_i^2}{\Omega_i}, \quad (4.51)$$

где b_i^0 , b_i^1 , b_i^2 – неслучайные коэффициенты;

$$X_i = b_i^0 \Phi_i a_i + \frac{b_i^1}{\Omega_i}; \quad (4.52)$$

$$X_i = b_i^0 \Phi_i \frac{1}{\Omega_i} + b_i^1 a_i; \quad (4.53)$$

$$X_i = b_i^0 a_i \frac{1}{\Omega_i} + b_i^1 \Phi_i. \quad (4.54)$$

Следовательно, можно утверждать, что снижение риска портфеля связано:

- а) с увеличением коэффициента увлеченности;
- б) с увеличением числа часов, отводимых на дисциплину;
- в) с уменьшением коэффициента сложности дисциплины.

В целом, анализируя полученные рекомендации, можно сделать вывод о существенном влиянии на риск портфеля оценочных баллов разброса в усвоении знаний разными учащимися, количества отводимых на дисциплину часов, сложности усвоения изучаемого материала и увлеченности обучаемых.

Вопросы, связанные с увлеченностью обучаемых и сложностью усвоения материала, рассмотрены в [39, с. 53]. Оптимальное планирование учебных часов, отводимых на изучение данных n дисциплин, связано с решением оптимизационной задачи нелинейного программирования.

Предположим, что аппроксимация стохастической зависимости между коэффициентами увлеченности Φ_i , сложности Ω_i , количеством часов a_i , отводимых на i -ю дисциплину, и баллом X_i в начальный момент времени осуществляется по формуле (4.50).

От случайных величин X_i , Φ_i и Ω_i переходим соответственно к их значениям x_i , ω_i и ω_i . Тогда формула (4.50) примет вид

$$x_i = \frac{\omega_i a_i}{\omega_i} b_i. \quad (4.55)$$

В этом случае указанную зависимость можно рассматривать как функциональную. Оптимизационная задача формулируется следующим образом. Ищется максимальное значение функции $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ при ограничениях:

$$x_i = \frac{\varphi_i a_i}{\omega_i}; \quad i = 1, \dots, n; \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = a. \quad (4.56)$$

Здесь a и коэффициенты b_i ($i = 1, \dots, n$) заданы, неизвестными являются $x_i, a_i, \varphi_i, \omega_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Таким образом, портфель оценочных баллов можно использовать в качестве обобщенной характеристики эффективности учебного процесса. Новая инновационная технология оптимизации заключается в следующем:

- 1) оценки по дисциплинам рассматриваются в рамках единого портфеля проектов (дисциплин);
- 2) рассчитываются характеристики портфеля;
- 4) портфель оптимизируется.

ГЛАВА 5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННО-КОНСУЛЬТАЦИОННОЙ СЛУЖБЫ И ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

§ 5.1. Матричная игра рационального размещения консультационных пунктов

Одной из важных задач в развитии аграрно-промышленного комплекса является создание рынка консультационных услуг с целью повышения эффективности аграрного производства, улучшения социально-экономических условий жизни на селе, обеспечения большей занятости сельского населения (особенно молодежи), организации квалифицированной работы по оказанию консультационной помощи производителям сельскохозяйственной продукции [121]. Рациональное размещение консультационных пунктов позволяет экономить силы и средства как организатора консультационных услуг, так и потенциальных их потребителей.

В консультационных пунктах проводятся консультации, например, по вопросам сельскохозяйственного производства, социального развития села и альтернативой занятости сельского населения, бизнес-планирования в рамках инвестиционного кредитования, анализа финансово-хозяйственной деятельности, организации, управления и технологии производства,

маркетинга, предоставления правовой, экономической и методической помощи и т. п.

Сформулируем постановку задачи.

Допустим, имеется два конкурирующих плана: план 1 и план 2, которые связаны с размещением консультационных пунктов в одном из k населенных пунктов: N_1, N_2, \dots, N_k . Не нарушая общности, будем считать, что $k = 4$. Согласно каждому плану должно быть по одному консультационному пункту в одном из этих городов.

Взаимное расположение населенных пунктов, расстояние между ними и численность населения заданы. Обозначим через $K(N_i)$ число жителей в населенном пункте $N_i (i = \overline{1, k})$.

Результативность каждого плана зависит от численности населения и степени удаленности консультационных пунктов от места жительства потенциальных клиентов. Специально проведенное исследование показало, что результативность (за данный промежуток времени) будет распределяться между планами следующим образом (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Консультационный пункт плана 1 по сравнению с консультационным пунктом плана 2 расположен от города	Соотношение результативности между планами	
	План 1	План 2
Ближе	Приблизительно α_1 %	Приблизительно $(1 - \alpha_1)$ %
На одинаковом расстоянии	Приблизительно α_2 %	Приблизительно $(1 - \alpha_2)$ %
Дальше	Приблизительно α_3 %	Приблизительно $(1 - \alpha_3)$ %

Например, если консультационный пункт согласно плану 1 расположен к городу N_1 ближе, чем по плану 2, то результативность посещения распределится так: приблизительно α_1 % получит план 1, остальные посещения получит план 2. Нечеткие понятия «приблизительно α_i %» ($i = 1, 2, 3$) нужно определить с применением нечетных множеств [2].

Один из возможных подходов следующий. На множестве $\alpha_i \pm S (i = \overline{1, 3}, S = \overline{1, 4})$ определим функцию принадлежности $\mu_i(x)$ следующим образом (табл. 5.2).

Таблица 5.2

x	$\alpha_i - 4$	$\alpha_i - 3$	$\alpha_i - 2$	$\alpha_i - 1$	α_i	$\alpha_i + 1$	$\alpha_i + 2$	$\alpha_i + 3$	$\alpha_i + 4$
$\mu_i(x)$	$P_i^{(1)}$	$P_i^{(2)}$	$P_i^{(3)}$	$P_i^{(4)}$	$P_i^{(5)}$	$P_i^{(6)}$	$P_i^{(7)}$	$P_i^{(8)}$	$P_i^{(9)}$

В этой таблице $P_i^{(5)} = 1$ ($i = \overline{1, 3}$), все $P_i^{(l)}$ – дробные числа ($l = \overline{1, 4; 6, 9}$), кроме $P_i^{(5)}$, причем чем ближе l к 5, тем больше значение $P_i^{(l)}$. Степени принадлежности $P_i^{(l)}$ определяются согласно правилу минимального значения для каждого i и l по всем оценкам респондентов.

Имеем задачу теории стратегических игр о рациональном размещении консультационных пунктов. Для ее решения составляется платежная матрица. Стратегии по обоим планам: располагать свой консультационный пункт в городах N_1, N_2, \dots, N_k .

Элементы матрицы показывают результативность плана 1 (в у.е.), которая, как предполагается, пропорциональна числу посетителей (причем с одним и тем же коэффициентом). Величина этого коэффициента, как следует из дальнейших рассуждений, значения не имеет, поэтому примем его равным единице. Платежная матрица имеет вид

\	План 1	N_1	N_2	N_3	N_4
План 2					
N_1		R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}
N_2		R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}
N_3		R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}
N_4		R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}

Покажем расчет элементов платежной матрицы на примере ситуации (N_1, N_2) , которая означает, что по плану 1 консультационный пункт должен находиться в N_1 , по плану 2 – в N_2 .

Для этой ситуации число посетителей из N_1 определяется как $0,(\alpha_1 \pm S) P_1^{(5 \pm S)} K(N_1)$, из N_2 – как $0,(\alpha_2 \pm S) P_2^{(5 \pm S)} K(N_2)$, из N_3 – как $0,(\alpha_2 \pm S) P_2^{(5 \pm S)} K(N_3)$, из N_4 – как $0,(\alpha_2 \pm S) P_2^{(5 \pm S)} K(N_4)$. Общая сумма будет $0,(\alpha_1 \pm S) P_1^{(5 \pm S)} K(N_1) + 0,(\alpha_2 \pm S) P_2^{(5 \pm S)} K(N_2) + 0,(\alpha_2 \pm S) P_2^{(5 \pm S)} K(N_3) + 0,(\alpha_2 \pm S) P_2^{(5 \pm S)} K(N_4)$.

Аналогично рассчитываются остальные элементы. Следовательно, получается 9 платежных матриц в зависимости от значения параметра S . С использованием доминирования происходит упрощение этих матриц. В общем случае для каждой матрицы задача сводится к задаче линейного программирования, которая решается симплекс-методом, например, с использованием средства «Поиск решения» MS Excel. Пусть

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ – смешанная стратегия согласно плану 1, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ – то же самое для плана 2. Результативность от реализации плана определяется как цена игры. В случае смешанных стратегий результат трактуется так: β_1 – часть времени консультационный пункт должен находиться в N_1 ; β_2 – в N_2 , β_3 – в N_3 , β_4 – в N_4 . По плану 2: γ_1 -ю часть времени консультационный пункт должен находиться в N_1 , γ_2 -ю – в N_2 , γ_3 -ю – в N_3 , γ_4 -ю – в N_4 .

Затем составляется матрица размера 9×4 смешанных стратегий плана 1 и плана 2, и для каждого $i = \overline{1,4}$ вычисляются средние значения элементов β_i и γ_i по всем 9 строкам, после чего для $i = \overline{1,4}$ ищется средняя арифметическая полученных значений. Затем из 4 полученных значений выбирается наибольшее, которое будет определять город N_i ($i = \overline{1,4}$), в котором целесообразно расположить консультационный пункт согласно усредненному плану, полученному на основе планов 1 и 2 с использованием рассмотренного метода.

В детерминированном случае указываются точные значения процентных соотношений α_i . Поэтому в этом случае для рассмотренного выше примера элемент платежной матрицы R_{12} будет рассчитываться по формуле

$$0, \alpha_1 K(N_1) + 0, \alpha_2 K(N_2) + 0, \alpha_3 K(N_3) + 0, \alpha_4 K(N_4). \quad (5.1)$$

По аналогии рассчитываются остальные элементы. В результате будет только одна платежная матрица и одна соответствующая задача линейного программирования, дающая две оптимальные стратегии $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ для плана 1 и плана 2 соответственно. Для соответствующих координат этих стратегий находятся средние арифметические, и максимальная из них соответствует городу N_i , в котором должен быть расположен консультационный пункт в соответствии с усредненным планом.

Наличие седловой точки – частный случай рассмотренной ситуации для детерминированного и стохастического вариантов, когда только одно из значений α_i (β_j) не равно 0, а остальные – нули.

Итак, игровая модель рационального размещения консультационных пунктов построена.

Однако каждый план по размещению консультационных пунктов представляет собой результат планирования разработчиков данного консультационного пункта. Поэтому необходимо учитывать и психологический фактор, а именно: можно говорить 1) о неопытном, но склонном к риску разработчике консультационных пунктов; 2) об осторожном разработчике; 3) о достаточно опытном разработчике консуль-

тационных пунктов при решении задачи выбора лучшего пункта, а также о других типах личности. Обычно считается, что неопытный и склонный к риску индивид (группа индивидов) будет руководствоваться максимальной стратегией, осторожный индивид выберет решение по минимальному принципу, а опытный будет ориентироваться на средний выигрыш.

Для описания указанных психологических характеристик обычно используются функции принадлежности типа γ, t [114], заданные соответственно как

$$\gamma(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{для } a < x < b; \\ 1 & \text{для } x > b; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$t(x, a, b, c) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{для } a < x < b; \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{для } b < x < c; \\ 0 & \text{для } x > c, \end{cases} \quad (5.3)$$

где a – минимальный элемент множества, характеризующего данное психологическое свойство; b – максимальный элемент этого множества для функции γ , для функции t элемент b – промежуточный, c – максимальный. Например, если разработчик плана неопытный, то можно считать, что число разработок у него подобных планов составляет не более двух, а если опытный, то это число будет не менее 10. Тогда функция принадлежности множеству $A = \{\text{опытный разработчик}\}$ будет иметь вид функции γ при $a = 2, b = 10$. Если разработчик плана составляет подобный план в девятый раз, то степень принадлежности его классу A составляет $\frac{9-2}{10-2} = \frac{7}{8}$. Степень принадлежности классу $\bar{A} = \{\text{неопытный разработчик}\}$ будет равна $\frac{1}{8}$. Не нарушая общности, будем считать в данной задаче, что разработчики обоих планов – опытные работники.

Типы личности согласно их отношению к риску подробно рассмотрены в [20], где для каждого типа предложены разные варианты конкретных функций полезности $U(x)$ при ожидаемой оценке исхода x .

Так, для несклонного к риску индивида функция полезности может быть описана как $U(x) = \sqrt{x}$ или $U(x) = \ln(x+1)$. Если «разработчик» – это коллектив авторов, то может рассматриваться средняя функция

полезности. Для платежной матрицы значения ожидаемой оценки исхода – это значения ее элементов R_{ij} при разных ситуациях.

С учетом психологических аспектов решается игра с платежной матрицей $[U_1(R_{ij}) \mu_A^{(1)} + U_2 (\sum_{i=1}^k N_i - R_{ij}) \mu_A^{(2)}] / (\mu_A^{(1)} + \mu_A^{(2)})$, где $\mu_A^{(1)}$ и $\mu_A^{(2)}$ – весовые коэффициенты функций принадлежности разработчиков к множеству $A = \{\text{опытный разработчик}\}$ планов 1 и 2. Эта игра решается совершенно аналогично рассмотренной игре с матрицей $\{R_{ij}\}$.

Итак, впервые предложен игровой подход рационального размещения консультационных пунктов, впервые рассмотрено решение игры с учетом нечеткой информации и психологических характеристик индивидуумов.

Предложенный метод может найти применение в задачах принятия решений в экономике, социологии, юриспруденции и т. п. В частности, в образовательной сфере весьма актуальной является задача рационального размещения консультационных пунктов, прежде всего для информирования населения сельской местности.

§ 5.2. Разработка интеллектуальной информационно-консультационной службы

При развитии цифровой экономики большое внимание должно уделяться организации информационно-консультационной службы (ИКС) агропромышленного комплекса (АПК). Эта служба обеспечивает оказание квалифицированных и качественных консультационных услуг сельскохозяйственным товаропроизводителям и населению, проживающему в сельской местности.

Современная система сельскохозяйственного консультирования должна использовать передовые информационные технологии, базы данных и знаний, экспертные системы, хранилища и средства обработки больших данных.

Перечислим основные задачи сельскохозяйственного консультирования, решаемые при организации эффективной деятельности ИКС АПК:

1) сбор, обработка, агрегирование и доведение до потенциальных пользователей информации об инновационных проектах, перспективных способах ведения хозяйственной деятельности, перспективах развития цифрового сельского хозяйства, сведениях ноу-хау, передовом опыте, методах приобретения и развития навыков практического использования новых, перспективных технологий в АПК, передовых информационно-

телекоммуникационных технологиях дистанционного консультирования и обмена информацией;

2) повышение осведомленности сельхозпроизводителей по различным аспектам аграрного сектора, распространение передового опыта производства сельскохозяйственной продукции и оказание помощи в его освоении;

3) проведение консультаций по всем вопросам, связанным с ведением производственной, финансово-хозяйственной, маркетинговой (в том числе сбытовой) деятельности непосредственных производителей сельскохозяйственной продукции;

4) разработка и реализация планов обучения, переподготовки и повышения квалификации кадров АПК, а также формирование резерва кадров работников ИКС;

5) организация и совершенствование связей с федеральными, региональными и местными органами власти и управления; сотрудничество с научно-образовательными учреждениями, библиотеками.

В научной литературе обстоятельно раскрыты вопросы актуальности, значения и роли консультационных услуг в принятии сельхозпроизводителями решений по внедрению инноваций в производство продукции и формированию ее конкурентоспособности [128, 132, 133]. Проведен анализ современного состояния сельскохозяйственного консультирования, определены направления его развития [2]. Исследовано влияние информационно-консультационного обеспечения на инновационное развитие сельского хозяйства [120].

Отмечается необходимость повышения эффективности функционирования ИКС [124].

Проблема цифровизации консультационной службы агропромышленного комплекса освещается с точки зрения развития информационного обеспечения деятельности консультационных служб (баз данных и программных продуктов, информационно-телекоммуникационных средств) [87]. В работе [125] систематизированы современные технологии организации информационных ресурсов и баз данных в сфере АПК и работы с ними, задачи представления полнотекстовых документов в базах данных. Концептуальная модель организации региональной системы информационно-консультационного обслуживания предложена в статье [111]. Разработан новый функциональный и организационно-финансовый механизм деятельности системы аграрного консультирования.

При этом в научной литературе не уделяется достаточного внимания вопросу интеллектуализации консультационной службы АПК. Только в работе [29] рассмотрена задача рационального размещения консультационных пунктов на основе игрового подхода. Поэтому имеется необходимость разработки интеллектуальной ИКС АПК.

В данном исследовании рассмотрен метод оптимального размещения информационно-консультационных центров (ИКЦ) как задача нахождения минимальных нечетких внешне устойчивых множеств, определено оптимальное размещение ИКЦ, рассчитана *степень обслуживания территории*.

Целью исследования является разработка метода оптимального размещения ИКЦ в условиях неопределенности информации о деятельности и потребностях работников АПК.

Предлагаемый метод решения данного класса задач заключается в следующем:

- 1) разрабатывается математическая модель задачи в виде нечеткого ориентированного графа;
- 2) находятся все нечеткие множества с наибольшей степенью внешней устойчивости;
- 3) среди найденных множеств выбираются минимальные;
- 4) определяется оптимальное размещение ИКЦ и степень обслуживания территории.

Задача размещения консультационных пунктов является в общем случае задачей оптимального размещения центров, нечетко покрывающих данную территорию, и сводится к нахождению минимальных нечетких внешне устойчивых множеств. Степень обслуживания пользователей должна быть максимальной.

Приведем основные определения.

Рассмотрим понятие нечеткого внешне устойчивого множества графа $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$ [4].

Пусть X – произвольное подмножество множества вершин X . Для каждой вершины y из $X \setminus X$ определим $\gamma(y) = \max_{x \in X} \mu_{ij}(y, x)$. Тогда нечетким внешне устойчивым множеством для вершины y со степенью внешней устойчивости $\beta(X) = \min_{y \in X \setminus X} \gamma(y) = \min_{y \in X \setminus X} \max_{x \in X} \mu_{ij}(y, x)$ будет подмножество $X \setminus X$, если для любого подмножества $X \setminus X$ выполняется неравенство $\beta(X \setminus X) < \beta(X)$.

Рассмотрим задачу размещения консультационных пунктов для 10 районов Тверской области (рис. 5.1). Цифрами обозначены районы: 1 – Спировский, 2 – Кесовогорский, 3 – Лихославльский, 4 – Кашинский, 5 – Торжокский, 6 – Калязинский, 7 – Старицкий, 8 – Калининский, 9 – Оленинский, 10 – Зубцовский.

Как видно из рисунка, территориальное деление ИКЦ может неточно совпадать с административными границами районов, т. е. пункты нечетко покрывают заданную территорию.

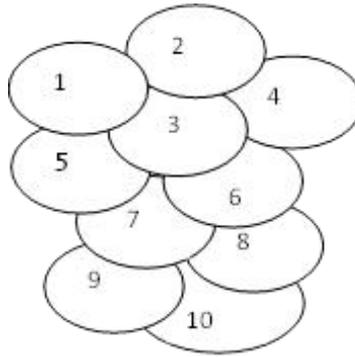


Рис. 5.1

Моделью данной задачи является нечеткий ориентированный граф размещения ИКЦ (рис. 5.2). Вершинами графа будут регионы, ориентированные ребра – связи между регионами. Нумерация вершин соответствует нумерации районов на рис. 5.1. Предполагается, что информационно-коммуникационные связи охватывают только территориально близкие районы и не распространяются на удаленные между собой территории.

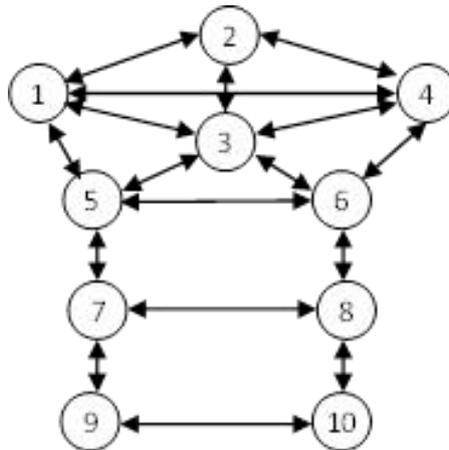


Рис. 5.2

Граф размещения ИКЦ является нечетким, так как имеется неопределенность информации о связях между его вершинами (сельское население может обращаться в ИКЦ не по принципу административного деления, а по соображениям территориальной близости, дружбы, общих интересов и т. д.).

Пусть матрица $M_{ij} = \begin{matrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{110} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{210} \\ \mu_{10,1} & \mu_{10,2} & \dots & \mu_{10,10} \end{matrix}$ определяет степень

обслуживания i -го района в случае нахождения консультационного пункта в j -м районе.

Алгоритм нахождения всех минимальных нечетких внешне устойчивых множеств нечеткого графа $\tilde{G}=(X, \tilde{U})$ с наибольшей степенью внешней устойчивости заключается в следующем:

1. Пусть T – некоторое нечеткое внешне устойчивое множество нечеткого графа $\tilde{G}=(X, \tilde{U})$. Каждой вершине $x_i \in X$ нужно поставить в соответствие булеву переменную p_i , $p_i = 1$ при $x_i \in T$, в противном случае $p_i = 0$.

2. Записать высказывание $\Phi_T = \bigwedge_{i,j} (\xi_{ij} p_j)$, где $\xi_{ij} = \mu_u(x_i, x_j)$.

3. Представить Φ_T с использованием правила нечеткого поглощения в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ).

4. Для каждого дизъюнктивного слагаемого записать минимальные внешне устойчивые множества вершин.

5. Из полученных минимальных внешне устойчивых множеств выбрать множества либо по критерию минимального количества элементов, либо по критерию максимальной степени внешней устойчивости.

Применим данный алгоритм к задаче размещения ИКЦ.

Согласно описанному выше общему алгоритму находим все минимальные внешне устойчивые множества Φ_T для 10 вершин графа, представленного на рис. 5.2:

$$\begin{aligned} \Phi_T = & (\mu_{11}p_1 \ \mu_{12}p_2 \ \mu_{13}p_3 \ \mu_{15}p_5) \ (\mu_{21}p_1 \ \mu_{22}p_2 \ \mu_{23}p_3 \ \mu_{24}p_4) \\ & (\mu_{31}p_1 \ \mu_{32}p_2 \ \mu_{33}p_3 \ \mu_{34}p_4 \ \mu_{35}p_5 \ \mu_{36}p_6) \\ & (\mu_{41}p_1 \ \mu_{42}p_2 \ \mu_{43}p_3 \ \mu_{44}p_4 \ \mu_{46}p_6) \ (\mu_{51}p_1 \ \mu_{53}p_3 \ \mu_{55}p_5 \ \mu_{56}p_6 \ \mu_{57}p_7) \\ & (\mu_{63}p_3 \ \mu_{64}p_4 \ \mu_{65}p_5 \ \mu_{66}p_6 \ \mu_{68}p_8) \ (\mu_{75}p_5 \ \mu_{77}p_7 \ \mu_{78}p_8 \ \mu_{79}p_9) \\ & (\mu_{86}p_6 \ \mu_{87}p_7 \ \mu_{88}p_8 \ \mu_{8,10}p_{10}) \ (\mu_{97}p_7 \ \mu_{99}p_9 \ \mu_{9,10}p_{10}) \\ & (\mu_{10,8}p_8 \ \mu_{10,9}p_9 \ \mu_{10,10}p_{10}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Пусть на основе экспериментальных данных, полученных в результате проведенного обследования условий получения информационно-консультационных услуг сельхозпроизводителями исследуемого региона, матрица степеней обслуживания равна (числа условные):

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0 & 1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_T = & (p_1 \ 0,5p_2 \ 0,5p_3 \ 0,5p_4 \ 0,5p_5) \ (0,5p_1 \ p_2 \ 0,5p_3 \ 0,5p_4) \\ & (0,9p_1 \ 0,9p_2 \ p_3 \ 0,9p_4 \ 0,9p_5 \ 0,9p_6) \ (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_6) \\ & (p_1 \ p_3 \ p_5 \ p_6 \ p_7) \ (0,5p_3 \ 0,5p_4 \ 0,5p_5 \ p_6 \ 0,5p_8) \ (5.5) \\ & (0,5p_5 \ p_7 \ 0,5p_8 \ 0,5p_9) \ (0,5p_6 \ 0,5p_7 \ p_8 \ 0,5p_{10}) \\ & (0,9p_7 \ p_9 \ 0,9p_{10}) \ (p_8 \ p_9 \ p_{10}). \end{aligned}$$

Для упрощения данного выражения используем правила нечеткого поглощения: $a \ a \ b = a$, $a \ b \ a \ \bar{b} = a$, $\xi \ a \ \xi \ a \ b = \xi \ a$, если $\xi \ \xi$ и $\xi, \xi \in [0,1]$, $a, b \in \{0,1\}$.

Получим:

$$\begin{aligned} \Phi_T = & 0,5p_1p_4p_5p_7p_8 \ 0,5p_1p_6p_7p_8 \ 0,5p_1p_4p_7p_8 \ 0,9p_1p_2p_6p_7p_8 \ (5.6) \\ & 0,5p_3p_7p_8 \ 0,5p_5p_7p_8p_9 \ 0,5p_4p_5p_7p_8 \ 0,5p_2p_7p_8. \end{aligned}$$

Таким образом, 5 ИКЦ (первый, второй, шестой, седьмой и восьмой районы) в совокупности обеспечивают максимальную степень обслуживания региона, равную 0,9.

Количество ИКЦ, равное 3 или 4, в различных конфигурациях, позволяет достичь невысокой степени обслуживания, равной 0,5.

В результате решения получено, что оптимальным количеством ИКЦ для обеспечения информационно-консультационными услугами данной территории, является 5 пунктов.

В разобранном примере для обеспечения наглядности выкладок охвачены не все муниципальные районы Тверской области (10 из 35). Рассмотренная задача легко может быть распространена на все муниципальные районы, а также охватывать и соседние экономически связанные регионы (на северо-западе – районы Новгородской области, на востоке – Ярославской, на западе – Псковской, на юге – Смоленской). В этом случае ИКЦ превращаются в специализированные ИКС, охватывающие не только местный и региональный, но и федеральный уровни. Задача расчета степени обслуживания сельхозпроизводителей, а также оптимального территориального размещения ИКЦ в этом случае существенно усложняется.

По исследуемой проблеме (разработка интеллектуальных систем консультирования) к данной работе наиболее близка статья [29], в которой предложена нечеткая игровая модель определения рационального территориального размещения консультационных пунктов исходя из численности производителей сельхозпродукции. Задача решается при использовании четких (детерминированных и структурированных) данных, а также по нечеткой (неточно сконструированной) информации.

В данном исследовании, в отличие от указанной статьи, использован другой математический аппарат: разработана графовая модель оптимизации размещения ИКЦ, обеспечивающая обслуживание региона минимальным количеством центров.

По применяемому математическому аппарату (нахождения минимальных нечетких внешне устойчивых множеств) к данному исследованию наиболее близки работы [4, 112]. В первом из этих источников разработан общий алгоритм нахождения минимальных нечетких внешне устойчивых множеств. Во втором источнике показано решение задачи оптимального размещения ретрансляторов мобильной связи, нечетко обслуживающих сотовой связью городскую территорию, с помощью модели минимальных нечетких внешне устойчивых множеств нечеткого графа.

В данном параграфе разработан метод оптимального размещения ИКЦ районов Тверской области. Полученная в результате нахождения минимальных нечетких внешне устойчивых множеств схема расположения ИКЦ является оптимальной по критерию минимума количества пунктов, обеспечивающих заданное качество обслуживания пользователей.

Дальнейшим развитием затронутых вопросов является разработка консалтинговой системы в АПК Тверской области. Интеллектуальные консалтинговые системы АПК обеспечивают управление знаниями (включая их создание, получение, хранение, систематизация, обработку, анализ и применение) в сельскохозяйственной сфере.

Предлагаемый метод может найти практическое применение для размещения не только ИКЦ, но и автозаправочных станций, пунктов скорой медицинской помощи, ремонтных мастерских сельскохозяйственной техники, территориальных органов службы МЧС, а также в сетевом маркетинге, сотовой связи и т. д.

§ 5.3. Математическая модель профориентационной работы

В области исследования вопросов учебного процесса большая роль отводится математическому моделированию [101]. Одна из актуальных задач исследования образовательных систем заключается в построении модели профориентационной работы, которая наиболее точно описывает развитие данного процесса во времени с учетом индивидуальных особенностей учащихся и специфики конкурирующих организаций, в частности, быстроты и точности реакции, отражающих эффективность профориентационной работы [91]. Для построения моделей профориентационной деятельности используются разнообразные математические методы и модели.

Например, в [98] использована модель Лотки – Вольтерры для описания динамики изменения ежегодной численности приема абитуриентов. Исследование дифференциальных моделей для описания профориентационной работы приведено в [99]. В работе [100] рассмотрен упрощенный вариант модели Ланчестера, при котором выполняется квадратичный закон $Bu^2 - Cx^2 = N$, где x и y – число хороших и недобросовестных студентов соответственно ($x + y = N$). Для профориентации студентов вузов в [101] предложена дифференциальная модель, встречающаяся в теории эпидемий. В статье [102] получена логистическая кривая, которая описывает зависимость числа учащихся, участвующих в профориентационной работе, от общего числа и заданного промежутка времени агитационной работы. Примеры визуального и имитационного моделирования профориентационной деятельности учебного подразделения вуза приведены в статье [107]. Математическая модель вероятностного прогнозирования профессионального выбора учащихся предпрофильных классов рассмотрена в работе [115], а в [122] для решения данной задачи используется дискриминантный анализ.

Большой интерес представляет применение модели Ланчестера для описания конкуренции вузов в процессе профориентационной работы. Основной трудностью является получение аналитического решения в условиях неоднородности потоков абитуриентов. Явного решения задачи нет, однако для получения решения с достаточной степенью точности можно использовать метод, разработанный в [49] для системного представления процесса усвоения учебного материала в виде противоборства правильно и неправильно понятых фрагментов учебного материала. При этом рассмотрен общий случай, когда эффективности, определяемые как плотности пуассоновских потоков, умноженные на вероятности, зависят от времени и фрагментов изучаемого материала. Решена система дифференциальных неравенств на основе интегрального исчисления.

В данном параграфе рассмотрена *модифицированная модель Ланчестера* для описания профориентационной работы среди школьников – будущих абитуриентов при наличии нескольких противоборствующих сторон, представляющих конкурирующие вузы, где сторона I – данный вуз, сторона II – другие рассматриваемые вузы.

Рассмотрим общий случай зависимости эффективности сторон от времени (при любой функциональной зависимости) и от индивидуальных особенностей учащихся [42]. Такая общность приводит к замене уравнений Ланчестера линейными алгебраическими неравенствами, определяемыми для данного момента по рекуррентной формуле с любой

точностью. При малом интервале времени Δt имеется возможность практически непрерывно наблюдать изменение средних численностей учащихся, отдающих предпочтение стороне I или стороне II, и оценивать во времени превосходство той или другой стороны.

Предложенный метод позволяет описывать с любой степенью точности изменение численности сторон без использования принципа квазирегулярности.

Цель работы – получение и решение системы дифференциальных неравенств для описания средних численностей сторон, анализ решения, оценка основных характеристик системы.

5.3.1. Постановка задачи. Построение размеченных графов состояний противоборствующих сторон

Пусть все N учащихся (будущие абитуриенты) пронумерованы, например, согласно алфавитному списку. Каждому учащемуся с номером i будем ставить в соответствие двумерный вектор $(Y_I^{(i)}, Y_{II}^{(i)})$, где $Y_I^{(i)}$ – i -й учащийся, находящийся под влиянием агитации стороны I (данного вуза) и в состоянии осмысления полученной информации; $Y_{II}^{(i)}$ – i -й учащийся, находящийся под влиянием и обдумыванием информации, полученной от стороны II (от остальных рассматриваемых вузов). Таким образом, сторона I характеризуется единицами (будущими абитуриентами):

$$Y_I^{(1)}, Y_I^{(2)}, \dots, Y_I^{(N)}, \quad (5.7)$$

сторона II, соответственно:

$$Y_{II}^{(1)}, Y_{II}^{(2)}, \dots, Y_{II}^{(N)}. \quad (5.8)$$

Пусть $p_1^{01}, \dots, p_1^{0N}$; $p_2^{01}, \dots, p_2^{0N}$, первоначальные вероятности, соответственно отражающие предпочтения учащихся поступать в вуз стороны I и в вузы стороны II, причем $p_1^{0i} + p_2^{0i} = 1$ ($i = \overline{1, N}$). Тогда

$N_1 = \sum_{i=1}^N p_1^{0i}$ и $N_2 = \sum_{i=1}^N p_2^{0i}$ – начальные численности сторон I и II. Будем считать, что $N_1 > 0$, $N_2 > 0$.

Каждый i -й учащийся представляет собой две противоборствующие единицы, $Y_I^{(i)}$ и $Y_{II}^{(i)}$, причем под воздействием агитационных потоков информации одна единица со временем уничтожает другую. Если уничтожается i -я единица последовательности (5.7), то это означает, что данный учащийся решил поступать в вуз, рекламируемый стороной II; если же это единица последовательности (5.8), то данный учащийся решил

поступать в вуз, рекламируемый стороной I. Для упрощения выкладок считаем, что в начальный момент каждый учащийся еще не определился, какой стороне отдать предпочтение.

В общем случае учащиеся общаются друг с другом относительно будущего поступления в вуз, поэтому могут оказывать влияние друг на друга, т. е. i -й и j -й учащиеся (i, j) также могут образовывать противоборствующую пару $(Y_I^{(i)}, Y_{II}^{(i)})$.

Возможность существования подобных противоборствующих пар, как будет показано далее, определяется через соответствующую вероятность $p_{ij}^{(1)}$ или $p_{ij}^{(2)}$.

Рассмотрим противоборство сторон I и II.

Обе стороны в течение данного периода (например, учебного года) проводят различные мероприятия (беседы, консультации, экскурсии и т. д.) по привлечению будущих абитуриентов. Мероприятия взвешиваются согласно их важности по данным экспертов. Таким образом определяются плотности агитационных мероприятий. При этом может использоваться интернет-общение и проводиться периодический опрос учащихся относительно желания поступить в тот или иной вуз, выраженного в долях единицы, т. е. через вероятность того, что учащийся будет поступать в данный вуз, с целью корректировки через агитацию этой вероятности в нужном направлении.

Пусть агитационный поток единицы i ($i = \overline{1, N_1}$) стороны I относительно единицы стороны II является пуассоновским с плотностью $\lambda_{ij}^{(1)}(t)$, поток единицы j ($j = \overline{1, N_2}$) стороны II также является пуассоновским с плотностью $\lambda_{ij}^{(2)}(t)$, где $\lambda_{ij}^{(2)}(t)$ равна сумме плотностей агитационных потоков вузов стороны II.

Успешные потоки, заканчивающиеся возможной положительной агитацией стороны I и II, также будут пуассоновскими с плотностями $\alpha_{ij}^{(1)}(t) = \lambda_{ij}^{(1)}(t) \cdot p_{ij}^{(1)}(t)$ и $\alpha_{ij}^{(2)}(t) = \lambda_{ij}^{(2)}(t) \cdot p_{ij}^{(2)}(t)$ соответственно, где $p_{ij}^{(1)}(t)$ – вероятность убедить единицей i стороны I единицу j стороны II; $p_{ij}^{(2)}(t)$ – вероятность убедить единицей j стороны II единицу i стороны I.

Величины $\alpha_{ij}^{(1)}(t)$ и $\alpha_{ij}^{(2)}(t)$ будем называть *эффективностями единиц I и II сторон* соответственно.

Будем считать, что любая единица одной стороны может подлежать агитации любой единицей другой стороны. Считаем также, что временем, затрачиваемым на одно агитационное мероприятие, можно пренебречь ввиду длительности процесса агитации. Это позволяет считать, что процесс развития агитации является *марковским*.

Согласно методу Ланчестера [25], сторону I будем рассматривать как систему (рис. 5.3), которая в любой момент времени t может находиться в одном из возможных состояний $E_k^{(1)}$, где k – число единиц последовательности (5.7) стороны I на момент времени t ($k = N, N-1, N-2, \dots, 1, 0$).

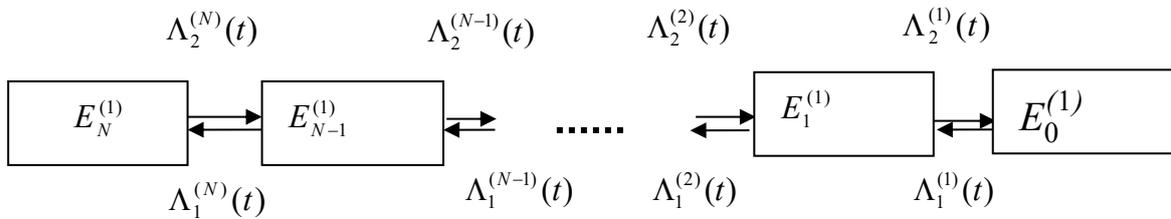


Рис. 5.3

Обозначим через $P_k^{(1)}(t)$ вероятность нахождения стороны I в момент t в состоянии $E_k^{(1)}$ ($k = N, N-1, N-2, \dots, 1, 0$), $\Lambda_2^{(N-k)}(t)$, $\Lambda_1^{(N-k)}(t)$ – плотность потока, переводящего систему из состояния $E_{N-k}^{(1)}$ в состояние $E_{N-k-1}^{(1)}$ (из состояния $E_{N-k-1}^{(1)}$ в состояние $E_{N-k}^{(1)}$).

Аналогичным графом можно представить состояния стороны II с той разницей, что верхняя и нижняя плотности меняются местами.

Заметим, что $\Lambda_2^{(N-k)}(t)$ зависит не только от времени, но и от числа S единиц последовательности (5.8), оказывающих воздействие на единицы последовательности (5.7). Аналогичное замечание справедливо и для $\Lambda_2^{(N-k)}(t)$. Однако во избежание громоздкости записи второй аргумент будем опускать.

В [25] для описания данной зависимости используется принцип *квазирегулярности*, погрешность которого определяется произведением суммарной интенсивности противоположной стороны на $1 - e^{-m_1}$, где m_1 – средняя численность данной стороны. Принцип квазирегулярности не будет использован. Зависимость плотностей от количества оказывающих воздействие единиц будет реализована за счет замены равенств системы Ланчестера [25] на неравенства, о чем пойдет речь в разделах 5.3.2–5.3.4 (формулы (5.14), (5.15), (5.20), (5.21)).

5.3.2. Определение плотностей переводящих потоков и эффективности единиц

Сторона I переходит из состояния с большим номером в состояние с меньшим номером в результате того, что сторона II за малый промежуток времени Δt на рубеже $E_{N-k}^{(1)}$ производит одну успешную агитацию (ординарность потока) с вероятностью $1 - e^{-a_2^{(N-k)}(t, \Delta t)}$.

Здесь $a_2^{(N-k)}(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \Lambda_2^{(N-k)}(t) dt$ – среднее число единиц потока стороны II на отрезке $[t, t + \Delta t]$. При малом Δt в промежутке $[t, t + \Delta t]$ плотность $\Lambda_2^{(N-k)}(t)$ для данного k можно считать равной значению в правой границе этого промежутка, тогда $a_2^{(N-k)}(t, \Delta t) = \Lambda_2^{(N-k)}(t) \Delta t$. Здесь $a_2^{(N-k)}$ также зависит от S .

С точностью до членов первого порядка по Δt эта вероятность равна $\Lambda_2^{(N-k)}(t) \Delta t$, т. е.

$$1 - e^{-\Lambda_2^{(N-k)}(t) \Delta t} = \Lambda_2^{(N-k)}(t) \Delta t. \quad (5.9)$$

Погрешность равна $\frac{1}{2} \max_{[t, t+\Delta t]} (\Lambda_2^{(N-k)}(t) \Delta t)^2$.

Вероятность того, что единица j стороны II за время Δt не сделает ни одной успешной агитации по отношению к единице i стороны I, равна $e^{-\alpha_{ij}^{(2)}(t, \Delta t)}$, где $\alpha_{ij}^{(2)}(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \lambda_{ij}^{(2)}(t) p_{ij}^{(2)} dt$, причем для малого Δt на участке $[t, t + \Delta t]$ можно считать, что $\lambda_{ij}^{(2)}$ и $p_{ij}^{(2)}$ не зависят от t , и в этом случае $\alpha_{ij}^{(2)}(t, \Delta t) = \alpha_{ij}^{(2)}(t) \Delta t$.

Эта вероятность с точностью до членов первого порядка по Δt равна $1 - \alpha_{ij}^{(2)}(t) \Delta t$. Погрешность составляет $\frac{1}{2} \max (\alpha_{ij}^{(2)}(t) \Delta t)^2$.

Допустим, что в момент t у стороны II имеется в последовательности (5.5) l сохранившихся единиц. Тогда вероятность того, что ни одна из этих единиц не проведет ни одного успешного агитационного мероприятия, составит

$$\prod_{s=1}^l (1 - \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t) \Delta t) = 1 - \sum_{s=1}^l \alpha_{i_s j_s}^{(2)}(t) \Delta t \quad (5.10)$$

с точностью до членов первого порядка по Δt , так как остальные слагаемые выражаются через произведения α_{i,j_s} , причем каждый сомножитель ограничен величиной $\max_{[t,t+\Delta t]} \alpha_{i,j_s}^{(2)}(t)\Delta t$.

Пусть $\alpha_{\max}^{(2)}(t) = \max_{1 \leq i \leq N_1} \max_{1 \leq j \leq N_2} \alpha_{ij}^{(2)}(t)$, $\bar{\alpha}_{\min}^{(2)}(t) = \min_{1 \leq i \leq N_1} \min_{1 \leq j \leq N_2} \bar{\alpha}_{ij}^{(2)}(t)$ ненулевых элементов $\alpha_{ij}^{(2)}(t)$ на временном промежутке $[t, t + \Delta t]$. Тогда правая часть формулы (5.10) не меньше чем $1 - \bar{\alpha}_{\max}^{(2)}(t)\Delta t$ и не больше чем $1 - \bar{\alpha}_{\min}^{(2)}(t)\Delta t$.

В любой момент t сторона II может находиться в любом состоянии $E_l^{(2)}$ с вероятностью $P_l^{(2)}(t)$. Поэтому вероятность того, что за Δt у стороны II не будет успешных агитационных мероприятий, не больше

$$P_{\max}^{(2)}(t, \Delta t) = \sum_{l=1}^N P_l^{(2)}(t) [1 - \bar{\alpha}_{\min}^{(2)}(t)\Delta t] \quad (5.11)$$

и не меньше $P_{\min}^{(2)}(t, \Delta t)$, которая получается из (5.11) заменой $\alpha_{\min}^{(2)}(t)$ на $\alpha_{\max}^{(2)}(t)$.

Тогда вероятность того, что за Δt у стороны II будет одно успешное агитационное мероприятие, не больше чем

$$1 - P_{\min}^{(2)}(t, \Delta t) = 1 - \sum_{l=0}^N P_l^{(2)}(t) + \alpha_{\max}^{(2)}(t)\Delta t \sum_{l=0}^N l P_l^{(2)}(t) \quad (5.12)$$

и не меньше чем $1 - P_{\max}^{(2)}(t, \Delta t)$.

В формуле (5.12) суммирование по l начинается с 0, поскольку если начальные численности сторон N_1 и N_2 достаточно велики, то можно предположить, что в момент времени t у обеих сторон количество единиц больше 0. В силу этого $P_0^{(1)} = 0$, $P_0^{(2)} = 0$.

Обозначим через $m_2(t)$ математическое ожидание $\sum_{l=0}^N l P_l^{(2)}(t)$ числа определившихся к моменту t единиц стороны II.

Обратим внимание, что $\sum_{l=0}^N P_l^{(2)}(t) = 1$. С учетом этого уравнение (5.12) преобразуется к виду

$$1 - P_{\min}^{(2)}(t, \Delta t) = \alpha_{\max}^{(2)}(t) \Delta t m_2(t). \quad (5.13)$$

Аналогично $1 - P_{\max}^{(2)}(t, \Delta t) = \alpha_{\min}^{(2)}(t) \Delta t m_2(t)$.

Из формул (5.9) и (5.13) получаем:

$$\bar{\alpha}_{\min}^{(2)}(t) m_2(t) = \Lambda_2^{(N-k)}(t) \bar{\alpha}_{\max}^{(2)}(t) m_2(t) \quad (5.14)$$

для $k = \overline{0, N-1}$.

Аналогично получаем:

$$\alpha_{\min}^{(1)}(t) m_1(t) \quad \Lambda_1^{(N-k)}(t) \quad \alpha_{\max}^{(1)}(t) m_1(t) \quad (5.15)$$

для $k = \overline{0, N-1}$.

5.3.3. Дифференциальная модель средних численностей сторон

Для графа, изображенного на рис. 5.3, запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{dP_N^{(1)}(t)}{dt} &= -\Lambda_2^{(N)}(t) P_N^{(1)}(t) + \Lambda_1^{(N)}(t) P_{N-1}^{(1)}(t); \\ \frac{dP_k^{(1)}(t)}{dt} &= \Lambda_2^{(k)}(t) (P_{k+1}^{(1)}(t) - P_k^{(1)}(t)) + \\ &+ \Lambda_1^{(k)}(t) (P_{k-1}^{(1)}(t) - P_k^{(1)}(t)), \quad k = \overline{1, N-1}; \\ \frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt} &= \Lambda_2^{(1)}(t) P_1^{(1)}(t) - \Lambda_1^{(1)}(t) P_0^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Умножим первое уравнение данной системы на N , второе на $N-1$ и т. д., последнее – на 0 и сложим соответственно левые и правые части полученных после умножения уравнений. Тогда левая часть суммарного

уравнения будет представлять собой производную $\sum_{k=0}^N kP_k^{(1)}(t)$ мате-

матического ожидания $\sum_{k=0}^{N_1} kP_k^{(1)}(t)$ числа не поддавшихся агитации аби-

туриентов стороны I к моменту t . Обозначим это значение через $m_1(t)$.

Правая часть суммарного уравнения будет иметь вид

$$\begin{aligned} & -\Lambda_2^{(N)}(t) N P_N^{(1)}(t) + \Lambda_1^{(N)}(t) N P_{N-1}^{(1)}(t) + \Lambda_2^{(N-1)}(t) (N-1) P_{N-1}^{(1)}(t) + \\ & + \Lambda_2^{(N)}(t) (N-1) P_N^{(1)}(t) - \Lambda_1^{(N-1)}(t) (N-1) P_{N-1}^{(1)}(t) + \Lambda_1^{(N-2)}(t) (N-1) P_{N-2}^{(1)}(t) + \dots - \\ & -\Lambda_2^{(1)}(t) P_1^{(1)}(t) + \Lambda_2^{(2)}(t) P_2^{(1)}(t) + 0 \Lambda_2^{(1)}(t) P_1^{(1)}(t) - 0 \Lambda_1^{(1)}(t) P_0^{(1)}(t). \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.3.4. Рекуррентная формула средних численностей сторон

Получим рекуррентную формулу средних численностей сторон. Пусть $\Lambda_{\min}^{(2)}(t) (\Lambda_{\max}^{(2)}(t))$ – минимум (максимум) по k и S , которые изменяются в границах от 1 до N в зависимости от соответствующей плотности

потока. Аналогично представляется $\Lambda_{\min}^{(1)}(t)(\Lambda_{\max}^{(1)}(t))$. Тогда правая часть суммарного уравнения (5.16) будет не больше чем

$$\begin{aligned} -\Lambda_{\min}^{(2)} P_N^{(1)} + P_{N-1}^{(1)} + \dots + P_1^{(1)} + \Lambda_{\max}^{(1)} P_N^{(1)} + P_{N-1}^{(1)} + \dots + P_1^{(1)} &= \\ = -\Lambda_{\min}^{(2)} (1 - P_0^{(1)}) + \Lambda_{\max}^{(1)} (1 - P_0^{(1)}) &= -\Lambda_{\min}^{(2)} + \Lambda_{\max}^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Отсюда получаем, что правая часть суммарного уравнения (5.18) ограничена сверху выражением $-\Lambda_{\min}^{(2)}(t) + \Lambda_{\max}^{(1)}(t)$, а снизу – выражением $-\Lambda_{\max}^{(2)}(t) + \Lambda_{\min}^{(1)}(t)$.

Аналогичное неравенство получается для стороны II. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\min}^{(1)}(t) - \Lambda_{\max}^{(2)}(t) & m_1(t) & -\Lambda_{\min}^{(2)}(t) + \Lambda_{\max}^{(1)}(t); \\ \Lambda_{\min}^{(2)}(t) - \Lambda_{\max}^{(1)}(t) & m_2(t) & -\Lambda_{\min}^{(1)}(t) + \Lambda_{\max}^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Пусть T – время полного периода агитации, положим $L = T / \Delta t$, причем Δt достаточно мало и $\Lambda_{\max}^{(2)}(t) - \Lambda_{\max}^{(2)}(t_l)$, $\Lambda_{\min}^{(1)}(t) - \Lambda_{\min}^{(1)}(t_l)$ на участке $[t_l, t_l + \Delta t]$, $l = \overline{1, L}$, $t_l = t_{l-1} + \Delta t$, t_0 - начало, $i = 1, 2$. Имеем:

$$\Lambda_{\min}^{(1)}(t_l) - \Lambda_{\max}^{(2)}(t_l) \quad m_1(t_l)\Delta t \quad -\Lambda_{\min}^{(2)}(t_l) + \Lambda_{\max}^{(1)}(t_l)$$

или

$$\int_{t_l}^{t_l + \Delta t} (\Lambda_{\min}^{(1)}(t) - \Lambda_{\max}^{(2)}(t)) dt \quad \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} m_1(t) dt \quad \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} (-\Lambda_{\min}^{(2)}(t) + \Lambda_{\max}^{(1)}(t)) dt,$$

при этом для $i = 1, 2$:

$$\int_{t_l}^{t_l + \Delta t} \Lambda_{\max}^{(i)}(t) dt = \Lambda_{\max}^{(i)}(t_l) \Delta t; \quad \int_{t_l}^{t_l + \Delta t} \Lambda_{\min}^{(i)}(t) dt = \Lambda_{\min}^{(i)}(t_l) \Delta t.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} m_1(t_l) + \Lambda_{\min}^{(1)}(t_l)\Delta t - \Lambda_{\max}^{(2)}(t_l)\Delta t & m_1(t_l + \Delta t) \\ m_1(t_l) - \Lambda_{\min}^{(2)}(t_l)\Delta t + \Lambda_{\max}^{(1)}(t_l)\Delta t. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} m_2(t_l) + \Lambda_{\min}^{(2)}(t_l)\Delta t - \Lambda_{\max}^{(1)}(t_l)\Delta t & m_2(t_l + \Delta t) \\ m_2(t_l) - \Lambda_{\min}^{(1)}(t_l)\Delta t + \Lambda_{\max}^{(2)}(t_l)\Delta t. \end{aligned} \quad (5.21)$$

С учетом (5.14) и (5.15) неравенства (5.20) и (5.21) запишутся соответственно в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{\min}^{(1)}(t_l) m_1(t_l) \Delta t + m_1(t_l) - \alpha_{\max}^{(2)}(t_l) m_2(t_l) \Delta t & m_1(t_l + \Delta t) \\ m_1(t_l) - \alpha_{\min}^{(2)}(t_l) m_2(t_l) \Delta t + \alpha_{\max}^{(1)}(t_l) m_1(t_l) \Delta t; \\ \alpha_{\min}^{(2)}(t_l) m_2(t_l) \Delta t + m_2(t_l) - \alpha_{\max}^{(1)}(t_l) m_1(t_l) \Delta t & m_2(t_l + \Delta t) \\ m_2(t_l) - \alpha_{\min}^{(1)}(t_l) m_1(t_l) \Delta t + \alpha_{\max}^{(2)}(t_l) m_2(t_l) \Delta t. \end{aligned} \quad (5.22)$$

В то же время $m_1(t_l) = N - m_2(t_l)$, $l = \overline{1, L}$. Тогда

$$\begin{aligned}
& m_2(t_l)(1 + \alpha_{\min}^{(2)}(t_l)\Delta t + \alpha_{\max}^{(1)}(t_l)\Delta t) - N\alpha_{\max}^{(1)}(t_l)\Delta t \quad m_2(t_l + \Delta t) \\
& m_2(t_l)(1 + \alpha_{\max}^{(2)}(t_l)\Delta t + \alpha_{\min}^{(1)}(t_l)\Delta t) - N\alpha_{\min}^{(1)}(t_l)\Delta t.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Неравенства (5.23) представляют собой рекуррентную формулу. Обозначим правую часть (5.23) через $m_2^{\text{II}}(l\Delta t)$, левую – через $m_2^{\text{I}}(l\Delta t)$, здесь $l\Delta t = t_l$ ($l = \overline{1, L}$). Тогда (5.23) запишется в виде

$$\begin{aligned}
& m_2^{\text{II}}(l\Delta t) \quad m_2(t_l + \Delta t) \quad m_2^{\text{I}}(l\Delta t); \\
& N - m_2^{\text{II}}(l\Delta t) \quad m_1(t_l + \Delta t) \quad N - m_2^{\text{I}}(l\Delta t).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

5.3.5. Определение численностей сторон

Не нарушая общности, будем считать, что профориентационная работа проводится $T = 40$ недель в течение учебного года с частотой $\Delta t = 1$ неделя. Соответствующие мероприятия: беседы, консультации, типовые задания с последующей проверкой, экскурсии и т. п. Эксперты дают оценки указанных мероприятий, которые проводятся раз в две недели, при этом возможно использование дистанционного формата общения через интернет.

Будем считать (для упрощения выкладок), что $\lambda_{ij}^{(1)}$ и $\lambda_{ij}^{(2)}$ постоянны на протяжении каждого промежутка $[t_l, t_l + \Delta t]$, в конце данного промежутка происходит изменение плотностей. Плотность определяется как произведение средней частоты проведения мероприятий в неделю (это, например, 1 мероприятие) на приведенную экспертную оценку данного мероприятия. Тогда плотности будут зависеть от экспертных оценок их значимости.

Следовательно, для каждой стороны имеем 40 приведенных оценок, сумма которых равна 1. В то же время все указанные типы мероприятий можно приближенно считать одинаково значимыми. Поэтому каждая экспертная оценка будет ненамного отличаться от значения $1/40 = 0,025$, отсюда плотности информационных потоков стороны I будут близкими к $0,025 r$, где r – количество вузов стороны II.

В конце каждого промежутка $[t_l, t_l + \Delta t]$ проводится опрос обучаемых относительно вероятностей $p_{ij}^{(1)}(t_l + \Delta t)$ и $p_{ij}^{(2)}(t_l + \Delta t)$, где $t_l + \Delta t$ – конец рассматриваемого промежутка. Вероятности предлагается выбирать из множества $\{0; 0,1; 0,2; \dots; 0,9; 1\}$.

Кроме того, для каждого i -го учащегося выясняется вопрос относительно влияния на него других учащихся с соответствующими плотностями $\lambda_{ij}^{(1)} = 0,025 q$ и $\lambda_{ij}^{(2)} = 0,025 r q$, если агитация была q раз, и нулевыми плотностями, если агитации не было.

Следующим шагом определяется матрица целераспределения $(\alpha_{ij}^{(1)}(l\Delta t), \alpha_{ij}^{(2)}(l\Delta t))$, где $i = \overline{1, m_1(l\Delta t)}$, $j = \overline{1, m_2(l\Delta t)}$, и на ее основе находятся соответствующие минимальное и максимальное значения эффективностей к моменту $(l+1)\Delta t$. Затем используется формула (5.20), после чего происходит переход к следующему временному промежутку, и весь процесс повторяется.

Рассмотрим возможный способ определения вероятностей. Эти вероятности задают сами учащиеся, т. е. i -й учащийся оценивает в долях единицы свое желание поступать в определенный вуз и оказанное на него влияние со стороны j -го учащегося в этом направлении, в том числе в решении заданий, предложенных данным вузом в рамках профориентационной работы.

Для некоторых учеников такое оценивание может быть трудной задачей. В помощь можно предложить следующую таблицу (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Сила влияния	Почти отсутствует	Очень слабое влияние	Слабое влияние	Почти среднее	Среднее
Вероятность p_{ij}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Сила влияния	Почти большое	Большое	Почти сильное	Сильное	Очень сильное
Вероятность p_{ij}	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9

Положительная сторона данного способа состоит в том, что, во-первых, указанный подход имеет игровой оттенок и вызывает интерес и, во-вторых, учащиеся получают навыки оценивания при нечетких условиях.

Во избежание субъективности возможен такой подход. Работники вуза, согласно школьному рейтингу учащихся, взвешивают данные

табл. 5.3, полагая $p_{ij}(i_l) = p_{ij} \frac{R_i(t_l)R_j(t_l)}{R_{\max}^2(t_l)}$, где $R_i(t_l), R_j(t_l)$ – рейтинги

соответственно i -го и j -го учащихся к моменту t_l ; $R_{\max}(t_l)$ – максимально возможный балл к моменту t_l .

Такой подход оправдан тем, что чем лучше подготовлен учащийся, тем лучше он ориентируется в информационно-агитационном материале.

Если i -й учащийся к концу промежутка $[t_l, t_l + \Delta t]$ с вероятностью 1 принял решение выбрать, например, вуз стороны I, а перед этим вероятность выбрать вуз стороны II для него была равна P , то полагаем

$$m_1(t_l + \Delta t) = m_1(t_l) + P \text{ и } m_2(t_l + \Delta t) = m_2(t_l) - P. \quad (5.25)$$

Такой учащийся не исключается из дальнейшего рассмотрения, поскольку в будущем он может изменить свое решение. Его влияние на других учащихся и их влияние на него по-прежнему учитывается в матрице целераспределения.

Отметим, что рассмотренная ситуация может быть обобщена следующим образом. Во-первых, кроме агитационных потоков вузов и абитуриентов, могут существовать агитационные потоки вне этой системы (со стороны родителей, знакомых и т. д.) Эти влияния на i -го учащегося можно учитывать, изменяя соответствующим образом плотность его потока λ_{ii} . Опрос относительно результатов этого влияния происходит в конце каждого промежутка $[t_l, t_l + \Delta t]$. При этом если в конце данного промежутка вероятность изменилась в q раз, то целесообразно во столько же раз изменить соответствующую плотность.

Возможна ситуация, когда слишком назойливый j -й одноклассник каждый день агитирует своего i -го товарища. Тогда соответствующая плотность, вначале равная 0,025, может увеличиться в 7 раз. Это может уменьшить значимость агитации вуза. Поэтому для более частого общения с абитуриентами можно Δt взять равным 1 дню, тогда $T = 280$ дней. В этом случае рассматриваются плотности потоков в день, которые в данном случае составят 0,0071 и 0,0071 r .

Рассмотрим подробнее формулу (5.22). Имеем:

$$\begin{aligned} m_1^I(l\Delta t) &= m_1((l-1)\Delta t)(1 + \alpha_{\min}^{(1)}((l-1)\Delta t)\Delta t + \alpha_{\max}^{(2)}((l-1)\Delta t)\Delta t - N\alpha_{\max}^{(2)}((l-1)\Delta t)\Delta t; \\ m_1^{II}(l\Delta t) &= m_1((l-1)\Delta t)(1 + \alpha_{\max}^{(1)}((l-1)\Delta t)\Delta t + \alpha_{\min}^{(2)}((l-1)\Delta t)\Delta t - N\alpha_{\min}^{(2)}((l-1)\Delta t)\Delta t; \\ m_2^I(l\Delta t) &= m_2((l-1)\Delta t)(1 + \alpha_{\min}^{(2)}((l-1)\Delta t)\Delta t + \alpha_{\max}^{(1)}((l-1)\Delta t)\Delta t - N\alpha_{\max}^{(1)}((l-1)\Delta t)\Delta t; \\ m_2^{II}(l\Delta t) &= m_2((l-1)\Delta t)(1 + \alpha_{\max}^{(2)}((l-1)\Delta t)\Delta t + \alpha_{\min}^{(1)}((l-1)\Delta t)\Delta t - N\alpha_{\min}^{(1)}((l-1)\Delta t)\Delta t. \end{aligned} \quad (5.26)$$

При этом $m_2(0) = N_2$, $m_1(0) = N_1 = N - N_2$ и для любого $l = \overline{1, L}$, $m_1(l\Delta t) = N - m_2(l\Delta t)$.

Пусть $m_i^{(II)}(l\Delta t)$ – истинное число учащихся, принявших к моменту времени $l\Delta t$ решение о поступлении в вуз стороны I (при $i = 1$) или II (при $i = 2$). Тогда относительная ошибка для $i = 1, 2$ составит:

$$\frac{[m_i^{(II)}(l\Delta t) - m_i(l\Delta t)]}{m_i^{(II)}(l\Delta t)} \min \left\{ 1 - \frac{m_i(l\Delta t)}{m_i^{II}((l-1)\Delta t)}, \frac{m_i(l\Delta t)}{m_i^{II}((l-1)\Delta t)} - 1 \right\}. \quad (5.27)$$

Пусть для определенности минимум будет $1 - \frac{m_i(l\Delta t)}{m_i^{II}((l-1)\Delta t)} = \gamma_i(l\Delta t)$ и $\gamma_i(l\Delta t) < 1$, тогда

$$(1 - \gamma_i(l\Delta t))m_i^{II}((l-1)\Delta t) = m_i(l\Delta t). \quad (5.28)$$

Выясним, при каких условиях определение (5.28) корректно в том смысле, что

$$m_i(l\Delta t) = m_i^{(l)}((l-1)\Delta t). \quad (5.29)$$

Действительно, пусть $\frac{m_i^{(l)}((l-1)\Delta t)}{m_i^{(l-1)}((l-1)\Delta t)} = \beta_i(l\Delta t) \geq 1$. С учетом формулы (5.28):

$$(1 - \gamma_i(l\Delta t))\beta_i(l\Delta t)m_i^{(l)}((l-1)\Delta t) = m_i(l\Delta t). \quad (5.30)$$

Отсюда для выполнения условия (5.29) получаем:

$$(1 - \gamma_i(l\Delta t))\beta_i(l\Delta t) \geq 1, \text{ или } \gamma_i(l\Delta t) \leq 1 - \frac{1}{\beta_i(l\Delta t)}, \quad (5.31)$$

причем $\beta_i(l\Delta t) \geq 1$.

Кроме того, должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} m_2^{(l)}(l\Delta t) &= N - m_1(l\Delta t) = m_2^{(l)}(l\Delta t); \\ m_1^{(l)}(l\Delta t) &= N - m_2(l\Delta t) = m_1^{(l)}(l\Delta t). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Пусть $\gamma_i(l\Delta t)$ – заданная относительная ошибка. Если, например, для данного $\gamma_2(l\Delta t)$ неравенство (5.28) не выполняется, то увеличиваем, как следует из (5.22), $\beta_2(l\Delta t)$ либо за счет уменьшения $\alpha_{\min}^{(2)}((l-1)\Delta t)$, либо за счет увеличения $\alpha_{\max}^{(2)}((l-1)\Delta t)$, либо за счет уменьшения $\gamma_2(l\Delta t)$ и тем самым увеличиваем $m_2(l\Delta t)$.

Таким образом, с учетом неравенства (5.27) истинные численности оцениваются на основе выражений:

$$\begin{aligned} m_2(l\Delta t) &= m_2^{(l)}(l\Delta t) = m_2(l\Delta t) \frac{1}{1 - \gamma_2(l\Delta t)}; \\ m_1^{(l)}(l\Delta t) &= N - m_2^{(l)}(l\Delta t). \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3.6. Практическое применение модели профориентационной работы

Рассмотрим **пример**.

Пусть $N = 50$, $N_1 = 18 = m_1(0)$, $N_2 = 32 = m_2(0)$, $t_0 = 0$, $\Delta t = 1$ неделя, $\alpha_{\max}^{(2)}(0) = 0,03$, $\alpha_{\min}^{(1)}(0) = 0,0025$, $\alpha_{\min}^{(2)}(0) = 0,005$.

По формуле (5.26) находим: $m_2^{(l)}(0) = 31,76$; $m_2^{(l)}(0) = 32,92$; $m_1^{(l)}(0) = 17,09$; $m_1^{(l)}(0) = 18,24$. Тогда $\beta(1) = \frac{32,92}{31,76} = 1,04$. Пусть $\gamma_2(1) = 0,02$,

т. е. погрешность определения численности учащихся зададим 2 %, что соответствует повышенной точности [2].

По формуле (5.28) находим $m_2(1) = 0,98 \cdot 32,92 = 32,26$, следовательно, $m_1(1) = 17,74$. Отсюда $32,26 \leq m_2^{(l)}(1) \leq 32,26 \frac{1}{0,98} = 32,92$ и $17,09 \leq m_1^{(l)}(1) \leq 17,74$.

Таким образом, абсолютная погрешность составляет 0,6 учащегося, относительная – 1,2 %.

Теперь зададимся значением $l = 2$ (конец второй недели) при тех же эффективностях. Тогда

$$m_2^I(1) = 33,13; m_2^II(1) = 33,18; \beta_2(2) = 1,002; \gamma_2(2) = 0,002,$$

т. е. погрешность составляет менее 0,2 %, что соответствует повышенной точности [2]. Из (5.28) находим: $m_2(2) = 0,998 \cdot 33,18 = 33,11$.

Отсюда $m_1(2) = 16,83$. Истинное число учащихся будет $33,18$ $m_2^{(II)}(2) = 33,25$; $16,75$ $m_1^{(II)}(2) = 16,82$.

Таким образом, средняя численность (также численность) сторонников стороны I уменьшается. Для ее увеличения должна уменьшиться средняя численность сторонников стороны II. Согласно формуле (5.28), для этого должна увеличиться величина $\gamma_2(l\Delta t)$ или величина $m_2^II((l-1)\Delta t)$. Для уменьшения последней, согласно формуле (5.26), сторона I должна увеличить $\alpha_{\min}^{(1)}(l-1)\Delta t$. Кроме того, как следует из формулы (5.26), $m_1(l\Delta t)$ увеличивается с увеличением $\alpha_{\max}^{(1)}((l-1)\Delta t)$ и с уменьшением $\alpha_{\min}^{(1)}((l-1)\Delta t)$.

Соответствующие эффективности находятся из (5.28). Для этого для заданных $m_1(\Delta t)$, $\gamma_i(l\Delta t)$, $\alpha_{\min}^{(2)}(l-1)\Delta t$, $\alpha_{\max}^{(2)}(l-1)\Delta t$ находятся:

1) $\beta_1(l\Delta t)$ – формула (5.31);

2) $m_1^II((l-1)\Delta t)$ – из неравенства (5.30);

3) $\alpha_{\min}^{(2)}(l-1)\Delta t$ – по значениям β_1 и m_1^II ;

4) значения $\alpha_{\min}^{(1)}(l-1)\Delta t$ и $\alpha_{\max}^{(1)}(l-1)\Delta t$ – из первых двух уравнений системы (5.26) находятся необходимые.

Для увеличения данных эффективностей по матрице целераспределения определяются те учащиеся, которым соответствуют эти эффективности. Пусть, например, $\alpha_{i_0 j_0}^{(1)}(l-1)\Delta t = \min_{1 \leq i \leq N_1} \min_{1 \leq j \leq N_2} \alpha_{ij}^{(1)}(l-1)\Delta t$. Если $i_0 = j_0$, то с учащимся с номером i_0 проводится индивидуальная агитационная работа. Если $i_0 \neq j_0$, то с учащимся с номером i_0 проводится беседа с целью повышения плотности его общения с учащимся с номером j_0 для увеличения вероятности поступления последнего в вуз

стороны I. При этом результативность профориентационной агитации может существенно повыситься при учете психологического портрета обучаемых [3, 4], составленного по данным преподавателей школы.

5.3.7. Оценка основных характеристик системы

Рассмотрим числовые характеристики системы для конкурирующих вузов в период проведения профориентационной работы. Речь пойдет о *потребном наряде сил*, представляющем собой первоначальное количество единиц N_1 (N_2), при котором средние численности сторон достигнут заданных значений к данному моменту времени t ; о периоде (*потребном времени*), по истечении которого число сохранившихся единиц обеих сторон в последовательностях (5.7) и (5.8) будет не более (не менее) заданного; об *оценке эффективности* и о коэффициенте превосходства, необходимом для *оценки превосходства* одной стороны над другой.

Пусть момент времени t , численности m_1 и m_2 в момент t и интервал Δt заданы и $l = t / \Delta t$. При этом

$$\begin{aligned} m_1^{\Pi}(l\Delta t) & m_1 & m_1^{\Pi}(l\Delta t); \\ m_2^{\Pi}(l\Delta t) & m_2 & m_2^{\Pi}(l\Delta t). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Совершая l раз итерацию относительно правых и левых частей данных неравенств, последнюю систему преобразуем к виду

$$\begin{aligned} a_1 N_1 + a_2 N_2 & m_1 & b_1 N_1 + b_2 N_2; \\ c_1 N_1 + c_2 N_2 & m_2 & d_1 N_1 + d_2 N_2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Решая эту систему, находим множество точек (N_1, N_2) с целыми координатами, которые соответствуют потребному числу обеих сторон в начальный момент времени, чтобы средние численности в момент t составили m_1 и m_2 учащихся.

Пусть задан интервал Δt . Не нарушая общности, оценим время t , при котором

$$m_1(t) = m_1; \quad m_2(t) = m_2. \quad (5.36)$$

Сначала полагаем $l = 1$. Находим, например, $m_2^{\Pi}(\Delta t)$ и $N - m_2^{\Pi}(\Delta t)$ и сравниваем полученные значения с m_2 и m_1 соответственно. Если выполнены неравенства (5.35), то $t = \Delta t$. В противном случае переходим к значению $l = l + 1$ и весь процесс повторяется до тех пор, пока не будут выполнены неравенства (5.35). Как только это произойдет для некоторого l , полагаем $t = l\Delta t$.

Эффективности несложно определяются из (5.26).

Для оценки превосходства, например стороны I над стороной II в момент $t = (l + 1)\Delta t$, найдем разность

$$m_1^{II}(l\Delta t) - m_2^{II}(l\Delta t). \quad (5.37)$$

Очевидно, эта разность положительна тогда и только тогда, когда имеется превосходство стороны I в момент времени $t = (l+1)\Delta t$. Если разность (5.37) равна 0, то имеем равновесие сил. Отсюда условие превосходства стороны I:

$$\frac{m_1^{II}(l\Delta t)}{m_2^{II}(l\Delta t)} > 1. \quad (5.38)$$

Положим $\chi = \frac{m_1^{II}(l\Delta t)}{m_2^{II}(l\Delta t)}$ и назовем коэффициентом превосходства стороны I, если $\chi > 1$; если $\chi < 1$, то превосходство стороны II; если $\chi = 1$ – равновесие сил.

В работе построена модель системного описания процесса противоборства вузов в профориентационный период учебного процесса с использованием системы дифференциальных уравнений Колмогорова, преобразованной в систему дифференциальных неравенств, решение которой находится по рекуррентной формуле с любой степенью точности. Данный метод отличается достаточной простотой и наглядностью и позволяет описывать изменение численности без использования принципа квазирегулярности. Выполнена оценка основных характеристик системы. Предложенные в данной работе модель, ее характеристики и метод расчета численностей сторон без использования квазирегулярности достаточно гибко ориентированы на постоянно изменяющиеся условия противоборства, в частности, зависимость их от времени и соответствующих средних численностей в любой момент времени.

Модели Ланчестера, используемые в данном параграфе, предназначены для описания конфликтных ситуаций. Они применяются прежде всего для моделирования боевых действий (их называют моделями динамики средних, отображающей «высокоорганизованный» бой) и имитационного моделирования альтернатив исторического развития (реконструкция значимых исторических сражений). Однако конфликтные ситуации распространены и в других сферах. Для одной из таких сфер – профориентационной агитации – в данном параграфе представлена модифицированная модель Ланчестера и разработан новый метод решения данного класса задач. Значимыми областями применения моделей Ланчестера являются бизнес (борьба за новые рынки сбыта продукции и ресурсы) и динамические биологические системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии разработаны новые цифровые технологии в интеллектуальном управлении образовательным процессом.

В первой главе на основе системного подхода к управлению образовательным процессом рассмотрены вопросы системного анализа вуза, получения и формирования знаний, формирования личности обучающихся. В основу рассматриваемого подхода положен принцип совершенствования внутренней среды вуза за счет процесса самоорганизации и согласования интересов участников учебного процесса. Для анализа системы управления образовательным учреждением построено дерево целей организации, выполнен математический анализ структуры системы управления, описаны отношения элементов системы. Приведены функциональная схема и критерии функционирования системы (скалярное и векторное поле критериев). Разработана математическая модель системного описания процесса корректировки неправильно понятых фрагментов учебного материала (построены размеченные графы состояний для систем правильно и неправильно понятых фрагментов, получены решения системы дифференциальных неравенств относительно средних численностей не откорректированных к данному моменту времени правильно и неправильно понятых фрагментов). Процесс воспитания и формирования личности обучающихся рассматривается как сложная, динамически развивающаяся система. Эта система описана уравнениями Колмогорова. Рассмотрен вопрос устойчивости данной системы.

Во второй главе разработаны компоненты информационной технологии поддержки решения математических задач. Показано, какими должны быть учебник и учебное пособие, чтобы выступать в качестве обучающей интеллектуальной системы. Обучающая система рассмотрена на примере электронного учебного пособия «Практикум по высшей математике». В качестве примера информационной технологии поддержки решения математических задач приведена технология информатизации решения вероятностных задач. Предложенные в данной главе подходы к построению математической модели учебников и учебных пособий являются новыми. Они основаны на теории марковских цепей (§ 2.3) и аппарате теории формальных грамматик (§ 2.4). Разработаны контекстно-свободная грамматика онтологии и грамматическое описание процесса изучения учебного пособия.

В третьей главе представлены методы и модели планирования оптимальных сроков и содержания контрольных мероприятий. Для решения данной задачи применяются матрично-вероятностное моделирование обучения, теория биматричных игр, метод динамического программирования и теория нечетких графов. Разработан критерий планирования контрольных мероприятий.

Глава 4 посвящена новым цифровым технологиям повышения качества образовательного процесса. Разработаны математические оптимизационные модели задач составления расписания в учебной организации, распределения учебных дисциплин по преподавателям, определения оптимального распределения учебных составляющих лекции и практического занятия, организации сбалансированной системы самостоятельной работы обучаемых. Представлены новые методы оптимизации портфеля оценочных баллов, показано использование новых показателей качества учебного процесса на основе проектного подхода. Рассмотрен новый вопрос интеллектуального управления образовательными организациями – моделирование точек насыщения в учебном процессе. Решение данного вопроса позволит лучше учитывать типологию обучаемых и более качественно формировать их индивидуальные образовательные траектории.

В пятой главе рассмотрены вопросы моделирования ИКС и профориентационной работы. При использовании дистанционных образовательных технологий должны применяться не разовые консультации обучаемых преподавателями, а специализированные ИКС. При этом на региональном уровне возникает проблема оптимизации их территориального размещения. Эта же проблема появляется и при проектировании новых школ, колледжей, вузов, учебных кластеров и т. д. Для решения данной проблемы разработано два вида моделей: на основе игрового подхода (в том числе по нечеткой информации) и нахождения минимальных нечетких внешне устойчивых множеств графа. Разработана математическая модель профориентационной работы на основе модифицированной модели уравнений Ланчестера. Модель предполагает не только имитационное, но и численное решение задачи выбора оптимальных стратегий сторон в конкурентной борьбе с использованием разнотипных средств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акимжанов А.Т., Светличная В.Б. Поиск оптимального варианта подготовки к зачетам методом динамического программирования // Современные наукоемкие технологии, 2014. № 5-2. С. 187–188.
2. Алексеева Е.А. Система консультирования в развитии аграрного сектора экономики региона: проблемы и перспективы // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2-2. С. 392–401.
3. Берестнева О.Г. Системные исследования и информационные технологии оценки компетентности студентов: дис. ... докт. техн. наук. Томск: ТПУ, 2007. 356 с.
4. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие графы и гиперграфы. М.: Научный мир, 2005. 256 с.
5. Борисова Е. Качественное моделирование системы образования // The scientific heritage. 2020. № 51-3 (51). С. 10–16.
6. Брунова Е.Г., Бидуля Ю.В. Алгоритм с элементами формальной грамматики для контент-анализа мнений // Вестник Тюменского государственного университета. Серия: «Физико-математические науки. Информатика». 2014. № 7. С. 242–250.
7. Бужинская Н.В. Игровые методы в подготовке IT-специалистов // Наука и перспективы. 2018. № 1. С. 8–14.
8. Василенко В.Г. Игровые методы проведения учебных занятий в высшей школе // Вестник Российской международной академии туризма. 2014. № 1 (10). С. 84–93.
9. Васильев В.В. Модели управления вузом на основе информационных технологий. Петрозаводск: ПетрГУ, 2000. 164 с.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.
11. Восканян А.Б., Ершова Г.И. Военно-прикладная математика: учебник. Тверь: ВКА ПВО, 1983. 188 с.
12. Вьюга Е.Н. Экспертная система «Электронный сборник упражнений по основам элементарной логики» // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2013. № 9. С. 595–601.
13. Ганичев А.В. Согласование интересов при проектном управлении образовательными системами // Повышение качества образования как фактор конкурентоспособности образовательной организации: материалы научно-практической конференции. Тверь: ТвГТУ, 2015. С. 22–30.
14. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Математическое программирование. Тверь: ТвГТУ, 2017. 88 с.

15. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Способы оптимизации портфеля оценочных баллов // Вестник Тверского государственного технического университета. 2008. № 13. С. 267–273.
16. Ганичев А.В., Ганичева А.В. Теория принятия решений. Тверь: ТвГТУ, 2018. 100 с.
17. Ганичева А.В. Высшая математика. Практикум. Тверь: Тверская ГСХА, 2010. 169 с.
18. Ганичева А.В. Индексный метод менеджмента учебного процесса // Качество. Инновации. Образование. 2011. № 8 (75). С. 2–7.
19. Ганичева А.В. Интеллектуальная информационная система оптимального контроля знаний // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 101. С. 358–374.
20. Ганичева А.В. Исследование влияния психологических характеристик индивидуума на величину страховой суммы // Проблемы анализа риска. 2011. Т. 8. № 5. С. 44–55.
21. Ганичева А.В. Логический метод менеджмента качества образовательного процесса // Информационная среда вуза XXI века: материалы Международной научно-практической конференции. Петрозаводск: ПетрГУ, 2010. С. 77–80.
22. Ганичева А.В. Математика для юристов. СПб.: Лань, 2017. 204 с.
23. Ганичева А.В. Математическая модель планирования мероприятий // В мире научных открытий. Серия: «Экономика и инновационное образование». 2011. № 6 (18). С. 254–260.
24. Ганичева А.В. Математическая модель повышения качества учебного процесса // Естественные и технические науки. 2011. № 2 (52). С. 425–430.
25. Ганичева А.В. Математическая модель профориентационной работы // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. 2019. № 4 (60). С. 14–27.
26. Ганичева А.В. Математические модели и методы оценки бизнеса, имущества, интеллектуальной собственности. Тверь: ЦНИИТ, 2016. 166 с.
27. Ганичева А.В. Математические модели и методы оценки событий, ситуаций и процессов: учебное пособие. СПб.: Лань, 2017. 188 с.
28. Ганичева А.В. Математическое описание типологии учащихся // Мир лингвистики и коммуникации. 2014. № 2 (35). С. 36–42.
29. Ганичева А.В. Матричная игра размещения консультационных пунктов // European Social Science Journal. 2011. № 9 (12). С. 424–429.

30. Ганичева А.В. Матрично-вероятностное моделирование обучения // Электронный научный журнал «Современные исследования социальных проблем». 2011. Т. 7. № 3. С. 23–31.
31. Ганичева А.В. Метод определения оптимальных модулей и компетентности обучаемых // Качество. Инновации. Образование. 2013. № 10. С. 19–23.
32. Ганичева А.В. Методы принятия управленческих решений: учебное пособие. Тверь: ТГСХА, 2020. 88 с.
33. Ганичева А.В. Модели развития учебного процесса // Вопросы современной науки и практики. 2011. № 3 (34). С. 35–41.
34. Ганичева А.В. Моделирование показателей учебного процесса // В мире научных открытий. 2011. № 10-2 (22). С. 1016–1028.
35. Ганичева А.В. Модель менеджмента качества учебных планов // Качество. Инновации. Образование. 2012. № 4 (83). С. 37–41.
36. Ганичева А.В. Об одном алгоритме решения задачи о составлении расписания. Рук. депонирована в ЦСИФ МО РФ. 1992. Вып. 21. Серия Б. № В 2150. 10 с.
37. Ганичева А.В. Обоснование решений методами последовательного анализа и экспертных оценок. Тверь: ВА ПВО, 1994. 40 с.
38. Ганичева А.В. Определение оптимальных сроков инвестирования // Математические методы, модели и информационные технологии в АПК (Немчиновские чтения): материалы Международной научно-практической конференции. М: МСХА им. К.А. Тимирязева, 2011. Вып. 15. С. 112–115.
39. Ганичева А.В. Оптимальное решение и оценка полезности организационных вопросов // Ярославский педагогический вестник. 2011. Т. 3. № 2. С. 53–59.
40. Ганичева А.В. Оптимизационный алгоритм решения задачи о составлении расписания // Устойчивое развитие АПК региона: проблемы и перспективы: материалы Международной научно-практической конференции. Тверь: ТГСХА, 2015. С. 152–155.
41. Ганичева А.В. Организация сбалансированной системы самостоятельной работы учащихся // Синергетика в естественных науках: Восьмые Курдюмовские чтения: материалы Международной междисциплинарной научной конференции. 2012. С. 261–263.
42. Ганичева А.В. Оценка психолого-педагогических портретов преподавателей и обучаемых // Экономические и гуманитарные исследования регионов. 2018. № 5. С. 30–33.
43. Ганичева А.В. Оценка эффективности процесса обучения // Бизнес. Образование. Право. 2014. № 4 (29). С. 301–304.

44. Ганичева А.В. Оценка эффективности процесса обучения // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2011. № 2. С. 134–138.
45. Ганичева А.В. Сетевое планирование и управление формированием компетенций и компетентности // Вестник Тверского государственного университета. 2014. №3. С. 81–90.
46. Ганичева А.В. Системное представление процесса формирования личности // Перспективы развития информационных технологий: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Новосибирск: СИБПРИНТ, 2010. С. 46–50.
47. Ганичева А.В. Системное представление процесса образования // Саморазвивающаяся среда технического вуза: научные исследования и экспериментальные разработки: материалы Всероссийской научно-практической конференции. Тверь: ТвГТУ, 2016. С. 177–183.
48. Ганичева А.В. Системный подход к образовательному процессу // Учебно-методическая деятельность вуза в изменяющихся условиях реализации образовательных программ: материалы Всероссийской научно-методической конференции. Тверь: ТГСХА, 2018. С. 213–216.
49. Ганичева А.В. Системный подход к процессу получения и формирования знаний // В мире научных открытий. 2011. № 12 (24). С. 83–101.
50. Ганичева А.В. Согласование интересов участников учебного процесса // Бизнес. Образование. Право. 2017. № 4 (41). С. 350–355.
51. Ганичева А.В. Структурное описание онтологий в математике // Образование в XXI веке: материалы Всероссийской конференции. Вып. 13. Тверь: ТвГТУ, 2014. С. 74–79.
52. Ганичева А.В. Структурный метод описания и анализа учебного процесса // Синергетика в общественных и естественных науках: Девятые Курдюмовские чтения: материалы Международной научной конференции. Тверь: ТвГУ, 2013. С. 306–310.
53. Ганичева А.В. Теория вероятностей. СПб.: Лань, 2017. 144 с.
54. Ганичева А.В. Универсальный метод решения вероятностных задач в диалоговом режиме «человек – компьютер». Рук. депонирована в ЦСИФ МО РФ, 1992. Вып. 21. Серия Б. № В 2134.
55. Ганичева А.В. Учебник как обучающая система // Современные исследования социальных проблем: электронный научный журнал. 2011. Т. 8. № 4. С. 32–48.
56. Ганичева А.В. Учебное пособие как интеллектуальная система обучения // Перспективы науки и образования. 2018. № 2 (32). С. 224–229.

57. Ганичева А.В. Учебные динамические сцены // Научно-образовательная информационная среда вуза XXI века: материалы Международной научно-практической конференции. Петрозаводск: ПетрГУ, 2014. С. 42–46.

58. Ганичева А.В. Электронное учебное пособие «Практикум по высшей математике» // Инновационные образовательные технологии и методы их реализации в формате ФГОС ВПО: материалы Международной научно-практической конференции. Тверь: ТГСХА, 2014. С. 196–200.

59. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Графо-аналитический метод принятия решений в информационных условиях риска и неопределенности // Радиопромышленность. 1996. № 4. С. 105–111.

60. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Графовый метод анализа текстов // Мир лингвистики и коммуникации. 2016. № 4 (46). С. 66–73.

61. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Дискурсный метод распознавания структурированности текстов // Мир лингвистики и коммуникации. 2016. № 2 (44). С. 31–38.

62. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Игровой подход к учебному процессу // Научные приоритеты в АПК: инновации, проблемы, перспективы развития: материалы Международной научно-практической конференции. Тверь: ТГСХА, 2019. С. 75–80.

63. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Информатизация решения вероятностных задач // Педагогическая информатика. 2020. № 3. С. 69–75.

64. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Информационная технология поддержки решения математических задач // Образование в XXI веке: материалы Всероссийской научной конференции. Тверь: ТвГТУ, 2015. С. 125–130.

65. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Интеллектуальные образовательные технологии в вузе // Актуальные проблемы качества образования в высшей школе: материалы научно-практической конференции. Тверь: ТвГТУ, 2020. С. 18–22.

66. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Методы и модели принятия оптимальных решений. Тверь: ТГСХА, 2016. 117 с.

67. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Математическая модель задачи составления расписания в учебной организации // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8-3 (19-3). С. 224–227.

68. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Модель динамического программирования проведения контрольных мероприятий // Информатизация образования и методика электронного обучения: материалы Международной научной конференции. Красноярск: СФУ, 2019. С. 233–238.

69. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Научно-технологические технологии в образовательном процессе // Актуальные проблемы качества образования в высшей школе: материалы научно-практической конференции. Тверь: ТвГТУ, 2018. С. 53–58.

70. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Оптимальный график контрольных мероприятий // Инновационные технологии в АПК: проблемы и перспективы: материалы Международной научно-практической конференции. Тверь: ТГСХА, 2021. С. 339–341.

71. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Оптимизация распределения учебных дисциплин по преподавателям // Совершенствование методического обеспечения реализации актуализированных образовательных программ высшего образования как условие повышения качества подготовки выпускников: материалы Национальной научно-методической конференции. Тверь: ТГСХА, 2020. С. 260–262.

72. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Системный анализ образовательного процесса // Дистанционные образовательные технологии: Международная научно-практическая конференция. Симферополь: Ариал, 2021. С. 230–235.

73. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Системы в учебном процессе // Образование, инновации, цифровизация: взгляд регионов: материалы Всероссийской (национальной) научно-практической конференции. Тверь: ТГСХА, 2022. С. 479–482.

74. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Совершенствование внутренней среды сельскохозяйственного вуза // Совершенствование методического обеспечения реализации актуализированных образовательных программ высшего образования как условие повышения качества подготовки выпускников: материалы Национальной научно-методической конференции. Тверь: Тверская ГСХА, 2020. С. 254–256.

75. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Структурно-гармонический анализ показателей качества учебного процесса. Качество. Инновации. Образование. 2014. № 1(104). С. 24–30.

76. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Структурное распознавание объектов при коммуникациях // Мир лингвистики и коммуникации. 2012. № 3 (28). С. 50–59.

77. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Структурный метод распознавания динамических сцен // Мир лингвистики и коммуникации. 2013. № 4 (33). С. 55–62.

78. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Управление процессом получения и усвоения знаний // Повышение качества образования как фактор конкурентоспособности образовательной организации: материалы научно-практической конференции. 2015. С. 31–37.

79. Ганичева А.В., Ганичев А.В. Цифровая технология решений задач в образовательном процессе // Цифровая экономика и общество: материалы научно-практической конференции. Тверь: ТвГТУ, 2022. С. 84–88.
80. Ганичева А.В., Козлов В.П. Математика для психологов. М.: Аспект Пресс, 2005. 239 с.
81. Гефан Г.Д., Кузьмин О.В. Типология ошибок и заблуждений, связанных с задачами курса теории вероятностей. Случайные события // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2011. № 12 (71). 187–193.
82. Гнидина Ю.А. О развитии инновационного мышления как интеллектуальной модели // Педагогическая инноватика: инновационное образование, инновационное мышление инновации: материалы Международной научно-практической конференции. Балашиха: Де-По, 2011. С. 62–64.
83. Данилаев Д.П., Маливанов Н.Н. Современные условия и структура взаимодействия вузов, студентов и работодателей // Высшее образование в России. 2017. № 6. С. 29–35.
84. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
85. Дербуш М.В., Скарбич С.Н. Инновационные подходы к использованию информационных технологий в процессе обучения математики // Непрерывное образование: XXI век. 2020. Вып. 2 (30). DOI: 10.15393/j5.art.2020.5689.
86. Дикарева О.Н., Пуштаев Н.Д. Разработка оптимального плана подготовки к зачету методом динамического программирования. Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования // Научная книга. 2016. № 4. С. 63–65.
87. Егоров В.А. Информационное обеспечение деятельности региональной информационно-консультационной службы // Теория и практика мировой науки. 2019. № 5. С. 12–17.
88. Ергалиев Е.К., Мадияров М.Н., Оскорбин Н.М. Математические задачи прикладного портфельного анализа // Известия АлтГУ. Математика и механика. 2019. № 1 (105). С. 75–79.
89. Жуков В.И., Жукова Г.С. Методология математического моделирования управления социальными процессами. М.: Союз, 2006. 280 с.
90. Заболеева-Зотова А.В., Орлова Ю.А. Автоматизация семантического анализа текста технического задания: монография. Волгоград: ВолгГТУ, 2010. 156 с.

91. Кийко П.В. Математическая модель как метод решения проблемы конкурентоспособности вузов и повышение научно-исследовательской компетенции студентов // Омский научный вестник. 2015. № 4 (141). С. 166–169.

92. Коноплев С.А., Иванова И.Н. Игровые методы обучения // Молодежь и наука. 2017. № 3. С. 109.

93. Кочетков В.В., Скотникова Н.Г. Индивидуально психологические проблемы принятия решений. М.: Наука, 1993. 141 с.

94. Краевский Я.П. Повышение эффективности деятельности образовательных учреждений на основе описания бизнес-процессов // Информационная среда вуза XXI века: материалы Международной научно-практической конференции. Петрозаводск: ПетрГУ, 2011. С. 107–110.

95. Исследование операций в экономике: учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.]. М.: ЮНИТИ, 2001. 407 с.

96. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. 543 с.

97. Мониторинг и количественная оценка качества результатов деятельности подразделений университета на основе информационных технологий / В.С. Кузьмичев [и др.] // Информационная среда вуза XXI века: материалы Международной научно-практической конференции. Петрозаводск: ПетрГУ, 2010. С. 146–149.

98. Исследование дифференциальных моделей для описания профориентационной работы / Б.М. Кумицкий [и др.] // Моделирование систем и процессов. 2012. № 3. С. 34–36.

99. Математическое моделирование образовательной деятельности вуза / Б.М. Кумицкий [и др.] // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: материалы Международной научно-практической конференции. 2013. № 5. С. 450–455.

100. Математическое моделирование учебного процесса как способ повышения качества образования / Б.М. Кумицкий [и др.] // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: материалы Международной научно-практической конференции. 2014. № 2-3. С. 291–298.

101. Кумицкий Б.М., Камалова Н.С., Матвеев Н.Н. Математическое моделирование процессов профориентационной работы в вузе // Моделирование систем и процессов. 2012. № 2. С. 48–50.

102. Кумицкий Б.М., Матвеев Н.Н. Об эффективности профориентационной работы // Учебные процессы в высшей школе: материалы конференции. 2011. С. 62–65.

103. Леонтьева О.А. Внутренняя среда вуза: инновационность как фактор повышения конкурентоспособности // Современные наукоемкие технологии. 2007. № 12. С. 105–107.
104. Молокова А.В. Информатизация образовательного процесса - стратегическое направление развития образования // Образование в XXI веке: материалы Всероссийской научной конференции. Вып. 10. Тверь: Купол, 2010. С. 57–59.
105. Морозова О.И. Методы нечеткого управления в адаптивной системе оценивания качества обучения // Радиоэлектронные компьютерные системы. 2011. № 2 (50). С. 89–94.
106. Нахман А.Д. Технологические приемы решения вероятностных задач // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 3. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=9613> (дата обращения: 28.11.2022).
107. Никитина А.А., Щербаков С.М. Визуальное и имитационное моделирование профориентационной деятельности учебного подразделения вуза // Экономика образования. 2017. № 4. С. 54–64.
108. Орлова Ю.А. Расширенная нечеткая атрибутивная грамматика над фреймовой структурой текста технического задания // Известия волгоградского государственного технического университета. Серия: «Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах». Вып. 9: межвузовский сборник научных статей. 2010. № 11. С. 60–63.
109. Перевощикова Е.Н. Диагностика в процессе обучения математике: монография. Н. Новгород: НГПУ, 2010. 172 с.
110. Поваренков Ю.П., Тихомиров А.С., Трошина Т.Л. Использование методов динамического программирования при составлении учебного плана // Ярославский педагогический вестник. 2012. № 1. Т. III. С. 31–35.
111. Помогаев В.М. Развитие региональной системы информационно-консультационных услуг в АПК // Вестник Омского государственного аграрного университета. 2015. № 1 (17). С. 73–79.
112. Радилова К.И., Барышевский С.О. Математическая модель оптимального размещения центров с нечетким обслуживанием заданной области // Студенческий научный форум: материалы Международной студенческой научной конференции. URL: <https://scienceforum.ru/2017/article/2017038008> (дата обращения: 28.11.2022).

113. Ревкова Е.Г. Проектно-ориентированный подход к управлению в сфере системы высшего профессионального образования // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2011. № 2. С. 142–153.
114. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы нечетные системы. М.: Горячая линия-Телеком, 2004. 453 с.
115. Рябинин С.В. Математическая модель профессионального выбора учащихся предпрофильных классов // Современные проблемы науки и образования. 2011. № 6. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=5162> (дата обращения: 27.08.2019).
116. Смирнова Н.В. К автоматизированной проверке решений одного класса задач в следящих интеллектуальных обучающих системах // Управление большими системами. 2014. № 48. С. 172–197.
117. Смыков А.А., Хомутова Е.Г. Проведение анализа модели образовательной деятельности технического вуза с использованием теории графов // Качество. Инновации. Образование. 2011. № 8 (75). С. 7–12.
118. Применение обучающихся программ на игровых платформах для повышения эффективности образования / Е.В. Соболева [и др.] // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. 2017. Т. 7. № 4. С. 7–25. DOI: <http://dx.doi.org/10.15293/2226-3365.1704.01>.
119. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. М.: Русская деловая литература, 1999. 240 с.
120. Фаринюк Ю.Т., Глебова А.Г. Управление инновационным развитием АПК региона. Тверь: Агросфера, 2018. 417 с.
121. Фирсова Е.А., Фаринюк Ю.Т., Глебова А.Г. Развитие информационно-консультационного обслуживания АПК (на примере Тверской области). Тверь: Агросфера, 2011. 45 с.
122. Фисоченко О.Н., Ляхова Е.А. Построение профориентационной модели на основе дискриминантного анализа // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 28. URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=10790> (дата обращения: 20.09.2019).
123. Фомин Г.П. Методы и модели линейного программирования коммерческой деятельности. М.: Финансы и статистика, 2005. 616 с.
124. Фролова О.А., Гришина Т.В., Панина Е.В. Функционирование инновационно-консультационной инфраструктуры в АПК // Вестник НГИЭИ. 2021. №4 (119). С. 81–94. DOI: 10.24412/2227-9407-2021-4-81-94.
125. Чавыкин Ю.И. Технологии формирования и представления электронных информационных ресурсов в сфере сельского хозяйства // Техника и оборудование для села. 2017. № 5. С. 35–38.

126. Шарапова В.М. Семь нот агромаркетинга // Известия Международной академии аграрного образования. 2015. № S25. С. 386–391.

127. Шаталова А.О. Подход к проектированию индивидуальной траектории обучения студента в высшей школе // Наука о человеке: гуманитарные исследования, 2020. Т. 15. № 1. С. 103–108. DOI: 10.17238/issn1998-5320.2021.15.1.12.

128. Carayannis E., Grigoroudis E. Quadruple Innovation Helix and Smart Specialization: Knowledge Production and National Competitiveness. *Foresight and STI Governance*, 2016. 10 (1). P. 31–42. DOI: 10.17323/1995-459x.

129. Chow A.F., Van Hanegham J.P. Transfer of solutions to conditional probability problems: Effects of example problem format, solution format, and problem context. *Educational Studies in Mathematics*, 2016. 93 (1). P. 67–85.

130. Nisansala Vidanapthirana. Agricultural information systems and their applications for development of agriculture and rural community, a review study. *The 35th Information Systems Research Seminar in Scandinavia-IRIS*. 2012. P. 1–14.

131. Parzysz B. Solving Probabilistic Problems with Technologies in Middle and High School: The French Case. *Research in Mathematics Education*. Springer, Cham, 2018. P. 43–79. DOI: 10.1007/978-3-319-99861-9_3.

132. Serskykh N., Britchenko I. Consulting Services in Agriculture. *Modern Development. Paths of Agricultural Production*. 2019. P. 217-222. DOI: 10.1007/978-3-030-14918-5_23.

133. Toma I., Palău E., Dinu C., Redman M. The role of advisory services in farmers' decision making for innovation uptake. *Insights from case studies in Romania AgriLink. Agricultural Knowledge: Linking farmers, advisors and researchers to boost innovation*. 2019. 86 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Системный подход к управлению образовательным процессом	7
§ 1.1. Инновационная система управления вузом	7
1.1.1. Система управления и дерево целей	7
1.1.2. Анализ структуры системы управления вузом	8
1.1.3. Отношение элементов системы.....	14
1.1.4. Функциональная схема системы.....	15
1.1.5. Критерии функционирования системы	16
1.1.6. Скалярное и векторное поле критериев.....	17
§ 1.2. Системный подход к процессу получения и формирования знаний	19
§ 1.3. Системное представление процесса формирования личности	30
§ 1.4. Совершенствование внутренней среды вуза	35
Глава 2. Интеллектуальные цифровые технологии обучения и поддержки решения задач	39
§ 2.1. Информационная технология поддержки решения математических задач	39
2.1.1. Характеристика и назначение систем поддержки решения математических задач	40
2.1.2. Основные компоненты систем поддержки решения математических задач.....	40
§ 2.2. Электронное учебное пособие «Практикум по высшей математике».....	43
§ 2.3. Математическое моделирование учебников и учебных пособий.....	47
§ 2.4. Учебник и учебное пособие как обучающие интеллектуальные системы	58
2.4.1. Описание и анализ структуры учебного пособия с помощью аппарата теории формальных грамматик.....	59
2.4.2. Контекстно-свободная грамматика онтологии	62
2.4.3. Грамматическое представление процесса изучения учебного пособия.....	63
§ 2.5. Информатизация решения вероятностных задач	64
Глава 3. Методы и модели планирования контрольных мероприятий	70
§ 3.1. Матрично-вероятностное моделирование обучения	70
§ 3.2. Критерий планирования контрольных мероприятий	74

§ 3.3. Интеллектуальная информационная система оптимального контроля знаний	76
§ 3.4. Применение теории биматричных игр в учебном процессе	87
§ 3.5. Модель динамического программирования проведения контрольных мероприятий	91
3.5.1. Учебный процесс как управляемая система обучения	92
3.5.2. Оптимизация количества контрольных мероприятий на примере изучения дисциплины «Исследование операций»	93
§ 3.6. Оптимальный график контрольных мероприятий.....	96
Глава 4. Цифровые технологии повышения качества образовательного процесса	99
§ 4.1. Математическая модель задачи составления расписания в учебной организации	99
§ 4.2. Оптимизация распределения учебных дисциплин по преподавателям	102
§ 4.3. Нахождение оптимального распределения учебных составляющих лекции и практического занятия	105
§ 4.4. Организация сбалансированной системы самостоятельной работы учащихся.....	110
§ 4.5. Моделирование точек насыщения в учебном процессе.....	113
§ 4.6. Инновационная технология оптимизации учебного процесса...	116
Глава 5. Моделирование информационно-консультационной службы и профориентационной работы	122
§ 5.1. Матричная игра рационального размещения консультационных пунктов.....	122
§ 5.2. Разработка интеллектуальной информационно-консультационной службы.....	127
§ 5.3. Математическая модель профориентационной работы.....	133
5.3.1. Постановка задачи. Построение размеченных графов состояний противоборствующих сторон.....	135
5.3.2. Определение плотностей переводящих потоков и эффективности единиц.....	138
5.3.3. Дифференциальная модель средних численностей сторон.....	140
5.3.4. Рекуррентная формула средних численностей сторон.....	140
5.3.5. Определение численностей сторон.....	142
5.3.6. Практическое применение модели профориентационной работы	145
5.3.7. Оценка основных характеристик системы.....	147
Заключение.....	149
Библиографический список.....	151

Антонина Валериановна Ганичева
Алексей Валерианович Ганичев

**Цифровые технологии интеллектуального управления
образовательным процессом**

Монография

Редактор М.Б. Юдина
Корректор П.Д. Плотникова

Подписано в печать 10.02.2023

Формат 60×84/16

Физ. печ. л. 10,25

Тираж 50 экз.

Усл. печ. л. 9,53

Заказ № 5

Бумага писчая

Уч.- изд. л. 8,92

С – 5

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22