

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тверской государственный технический университет»  
(ТвГТУ)

**Б.И. Марголис**  
**П.К. Кузин**

## **МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Тверь 2022

УДК 517.977.5(075.8)

ББК 32.965.9я7

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, профессор кафедры ИС ТвГТУ Богатиков В.Н.; кандидат технических наук первый заместитель генерального директора НИИ «Центрпрограммсистем» (АО НИИ ЦПС) Карпов В.В.

Марголис Б.И., Кузин П.К. Методы оптимального управления: учебное пособие. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2022. 84 с.

Составлено для самостоятельной работы студентов, а также для использования на занятиях по дисциплине «Методы оптимального управления». Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Изложены основы вариационного исчисления, знание которых необходимо для решения задач оптимального управления.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 27.03.04 Управление в технических системах.

**Борис Иосифович Марголис  
Павел Константинович Кузин**

## **Методы оптимального управления**

Учебное пособие

Редактор М.Б. Юдина  
Корректор С.В. Борисов

Подписано в печать 06.05.2022

Формат 60×84/16

Физ. печ. л. 5,25

Тираж 70 экз.

Усл.-печ. л. 4,88

Заказ № 29

Бумага писчая

Уч-изд. л. 4,57

С – 28

Редакционно-издательский центр  
Тверского государственного технического университета  
170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, 22

ISBN 978-5-7995-1211-8

© Тверской государственный  
технический университет, 2022  
© Марголис Б.И., Кузин П.К., 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Постановка задачи оптимального управления .....	6
1.1. Задача оптимального управления .....	6
1.2. Формализация задачи оптимального управления .....	6
1.2.1. Математическая модель объекта управления.....	6
1.2.2. Краевые условия .....	9
1.2.3. Критерий оптимальности .....	9
1.2.4. Интегральные критерии оптимальности .....	10
1.2.5. Терминальные функционалы .....	12
2. Основы вариационного исчисления .....	13
2.1. Задачи, приводящие к решению экстремальных проблем .....	13
2.2. Основные определения .....	15
2.3. Вариации функционала .....	17
2.4. Необходимое условие экстремума функционала .....	22
2.5. Задачи с фиксированными границами .....	24
2.5.1. Уравнение Эйлера .....	24
2.5.2. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера....	26
2.5.3. Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задачах с фиксированными границами .....	27
2.5.4. Задачи для самостоятельного решения .....	28
2.6. Задачи с подвижными границами .....	30
2.6.1. Постановка задачи .....	30
2.6.2. Поиск решения задачи .....	33
2.6.3. Алгоритм решения задачи с подвижными концами .....	37
2.6.4. Задачи для самостоятельного решения .....	39
3. Оптимальное управление детерминированными системами .....	40
3.1. Нахождение оптимального программного управления .....	40
3.1.1. Постановка задачи нахождения оптимального программного управления.....	41

3.1.2. Формальная постановка задачи нахождения оптимального управления .....	42
3.1.3. Классификация задач оптимального управления .....	43
3.1.4. Принцип максимума Понтрягина .....	44
3.1.5. Алгоритм применения принципа максимума Понтрягина .....	45
3.1.6. Задачи для самостоятельного решения .....	49
3.2. Нахождение оптимального управления с полной обратной связью .....	51
3.2.1. Постановка задачи .....	51
3.2.2. Достаточные условия оптимальности .....	53
3.2.3. Алгоритм поиска оптимального управления с полной обратной связью .....	54
3.2.4. Задачи для самостоятельного решения .....	58
3.3. Оптимальное управление линейными системами в пространстве состояний .....	59
3.3.1. Программное управление (разомкнутая автоматическая система).....	59
3.3.2. Нахождение оптимального управления с полной обратной связью .....	63
3.3.3. Задачи для самостоятельного решения .....	69
3.4. Оптимальное по быстродействию управление .....	70
3.4.1. Оптимальное по быстродействию программное управление ....	70
3.4.2. Оптимальное по быстродействию программное управление для линейных систем .....	73
3.4.3. Синтез оптимального по быстродействию линейного регулятора с полной обратной связью .....	82
3.4.4. Задача для самостоятельного решения .....	83
Библиографический список .....	84