

Предисловие .....	3
Глава 1. Основные уравнения математической физики .....	5
1.1. Уравнения математической физики и описываемые ими процессы .....	5
1.1.1. Распространение теплоты в стержне. Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной .....	5
1.1.2. Уравнение теплопроводности с тремя пространственными переменными .....	10
1.1.3. Уравнение диффузии .....	12
1.1.4. Стационарное уравнение теплопроводности: уравнения Лапласа и Пуассона .....	14
1.1.5. Уравнения стационарного растяжения и продольных колебаний упругого стержня .....	17
1.1.6. Уравнения поперечных колебаний струны и мембраны. Звуковые волны в пространстве .....	20
1.1.7. Уравнение неразрывности. Уравнение потенциального течения жидкости .....	23
1.1.8. Система уравнений Максвелла .....	29
1.1.9. Уравнение Гельмгольца .....	32
1.1.10. Уравнение Кортвега — де Фриза .....	35
1.2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Приведение их к канонической форме .....	36
1.2.1. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка .....	36
1.2.2. Классификация уравнений, линейных относительно старших производных, с двумя независимыми переменными .....	37

1.2.3. Классификация уравнений, линейных относительно старших производных, с $n$ независимыми переменными .....	39
1.2.4. Классификация уравнений общего вида на фиксированном решении .....	40
1.2.5. Характеристики. Классификация уравнений с двумя независимыми переменными с помощью уравнения характеристик.....	41
1.2.6. Типы основных уравнений .....	44
1.3. Задача Коши. Роль характеристик в постановке задачи. Теорема Ковалевской .....	46
1.3.1. Задача Коши.....	46
1.3.2. Случай уравнений первого порядка .....	52
1.3.3. Теорема Ковалевской .....	56
Задачи для самостоятельного решения .....	58

<b>Глава 2. Задачи с начальными и краевыми условиями для уравнения теплопроводности.....</b>	<b>62</b>
2.1. Математические модели процессов распространения теплоты. Постановки задач для уравнения теплопроводности .....	62
2.1.1. Краевые условия.....	62
2.1.2. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Определения их классических решений.....	65
2.1.3. Асимптотические случаи задач для уравнения теплопроводности .....	68
2.1.4. Понятие корректности задачи .....	69
2.2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения. Единственность и устойчивость решения первой начально-краевой задачи .....	70
2.2.1. Принцип максимума.....	70
2.2.2. Принцип экстремума .....	71
2.2.3. Теоремы сравнения.....	72
2.2.4. Единственность решения первой начально-краевой задачи.....	73

2.2.5. Устойчивость решения первой начально-краевой задачи.....	74
2.3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности методом разделения переменных .....	75
2.3.1. Редукция начально-краевых задач.....	75
2.3.2. Метод разделения переменных в задачах для однородного уравнения .....	77
2.3.3. Ортогональность системы собственных функций .....	79
2.3.4. Зависимость системы собственных функций от краевых условий.....	80
2.3.5. Метод разделения переменных в задачах для неоднородного уравнения.....	80
2.3.6. Функция Грина начально-краевой задачи.....	82
2.3.7. Построение формального решения начально-краевой задачи в прямоугольном параллелепипеде .....	83
2.3.8. Построение формального решения начально-краевой задачи в круговом цилиндре .....	86
2.4. Доказательство существования классического решения первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.....	88
2.4.1. Достаточные условия почленного дифференцирования тригонометрических рядов Фурье .....	88
2.4.2. Существование классического решения .....	90
2.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности, единственность ее решения.....	92
2.6. Интеграл Пуассона. Существование и устойчивость классического решения задачи Коши. Функция Грина .....	95
2.6.1. Интеграл Пуассона; интуитивные соображения о его выводе. Функция Грина.....	95
2.6.2. Существование классического решения задачи Коши .....	99

2.6.3. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения .....	103
2.6.4. Свойства функции Грина. Ее физический смысл.....	103
2.6.5. Сведение начально-краевых задач на луче к задачам Коши на прямой .....	105
2.7. Понятие обобщенной функции. $\delta$ -Функция и функция Грина. Понятие обобщенного решения .....	107
2.7.1. Об аппроксимационном подходе к определению обобщенных решений.....	107
2.7.2. Понятие обобщенной функции. Использование $\delta$ -функции в некоторых задачах для уравнения теплопроводности .....	108
2.7.3. Обобщенные решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Интегральные тождества .....	114
Задачи для самостоятельного решения .....	119

### Глава 3. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона .....

125

3.1. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Пример Адамара.....	125
3.1.1. Краевые условия.....	125
3.1.2. Внутренняя задача Дирихле.....	127
3.1.3. Внутренняя задача Неймана.....	127
3.1.4. Внутренняя третья краевая задача .....	128
3.1.5. Внешние краевые задачи.....	129
3.1.6. Пример некорректной задачи .....	130
3.2. Формулы Грина в ограниченной области .....	130
3.2.1. Первая формула Грина в области $D \subset \mathbb{R}^3$ .....	130
3.2.2. Вторая формула Грина в $D \subset \mathbb{R}^3$ .....	131
3.2.3. Третья (основная) формула Грина в $D \subset \mathbb{R}^3$ ....	132
3.2.4. Формулы Грина в области на плоскости $(D \subset \mathbb{R}^2)$ .....	134
3.3. Основные свойства гармонических функций .....	135

3.3.1. Свойство гармонической функции.....	135
3.3.2. Формула среднего значения .....	136
3.3.3. Бесконечная дифференцируемость .....	137
3.3.4. Принцип максимума (минимума) гармонической функции.....	137
3.4. Единственность классических решений внутренних краевых задач для уравнения Лапласа.....	139
3.4.1. Единственность решения внутренней задачи Дирихле.....	139
3.4.2. Характер единственности решения внутренней задачи Неймана .....	140
3.4.3. Единственность решения третьей внутренней краевой задачи.....	141
3.5. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области, внешней к ограниченной.....	143
3.5.1. Регулярные на бесконечности функции трех переменных .....	143
3.5.2. Регулярные на бесконечности функции двух переменных .....	147
3.6. Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность их классических решений.....	149
3.6.1. Внешняя задача Дирихле в пространстве $(D' \subset \mathbb{R}^3)$ .....	149
3.6.2. Внешняя задача Неймана в пространстве $(D' \subset \mathbb{R}^3)$ .....	150
3.6.3. Внешняя третья краевая задача в пространстве $(D' \subset \mathbb{R}^3)$ .....	151
3.6.4. Внешняя задача Дирихле на плоскости $(D' \subset \mathbb{R}^2)$ .....	152
3.6.5. Внешняя задача Неймана на плоскости $(D' \subset \mathbb{R}^2)$ .....	154
3.6.6. Внешняя третья краевая задача на плоскости $(D' \subset \mathbb{R}^2)$ .....	155
3.7. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в областях простой геометрической формы методом разделения переменных .....	156

3.7.1. Задача Дирихле в прямоугольнике .....	156
3.7.2. Задача Дирихле в прямоугольном параллелепипеде .....	159
3.7.3. Задача Дирихле в полуполосе (частный случай) .....	160
3.7.4. Задача Дирихле в круге .....	162
3.7.5. Задача Дирихле вне круга .....	163
3.7.6. Задачи Неймана в круге и вне круга .....	164
3.7.7. Задача Дирихле в круговом кольце .....	165
3.7.8. Задача Дирихле в круговом секторе .....	165
3.8. Функция Грина внутренней задачи Дирихле .....	166
3.8.1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области $D \subset \mathbb{R}^3$ .....	166
3.8.2. Свойства функции Грина внутренней задачи Дирихле .....	170
3.8.3. Построение функции Грина методом зеркальных изображений .....	172
3.8.4. Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области на плоскости ( $D \subset \mathbb{R}^2$ ) .....	172
3.9. Поверхностные потенциалы двойного и простого слоев. Объемный потенциал .....	173
3.9.1. Потенциалы .....	173
3.9.2. Поверхностный потенциал двойного слоя .....	175
3.9.3. Логарифмический потенциал двойного слоя .....	179
3.9.4. Поверхностный потенциал простого слоя .....	179
3.9.5. Логарифмический потенциал простого слоя .....	182
3.9.6. Объемный потенциал .....	182
3.9.7. Логарифмический потенциал .....	184
3.10. Бигармонические функции .....	184
3.11. Внутренние краевые задачи для уравнения Гельмгольца; случаи единственности и неединственности их решений .....	186
3.12. Принцип Дирихле .....	188

3.12.1. Интеграл Дирихле и задача его минимизации ..	188
3.12.2. Интеграл Дирихле в круге .....	190
3.12.3. Экстремальное свойство гармонической функции .....	192
Задачи для самостоятельного решения .....	193
<b>Глава 4. Задачи для волнового уравнения .....</b>	<b>199</b>
4.1. Задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны. Формула Даламбера. Корректность задачи Коши .....	199
4.1.1. Классическое решение задачи Коши на прямой. Формула Даламбера .....	199
4.1.2. Корректность задачи Коши .....	202
4.1.3. Множество зависимости решения от начальных условий .....	203
4.1.4. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения .....	205
4.1.5. Примеры обобщенных решений задачи Коши .....	207
4.2. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний на луче. Построение их решений методом продолжения. Распространение влияния краевого режима .....	208
4.2.1. Краевые условия .....	208
4.2.2. Начально-краевые задачи на луче и их сведение к задаче Коши на прямой .....	210
4.2.3. Распространение волны, вызванной краевым режимом .....	215
4.3. Задачи Коши для волнового уравнения в пространстве и на плоскости. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Метод спуска .....	216
4.3.1. Классическое решение задачи Коши в пространстве .....	216
4.3.2. Классическое решение задачи Коши на плоскости. Метод спуска .....	222
4.3.3. Плоские волны .....	223

4.3.4. Качественные различия формул Кирхгофа, Пуассона и Даламбера.....	225
4.4. Начально-краевые задачи для волнового уравнения в ограниченной области изменения пространственных переменных. Построение формальных решений методом разделения переменных. Задачи о резонансе .....	229
4.4.1. Пример постановки начально-краевой задачи ...	229
4.4.2. Классическое решение начально-краевой задачи.....	231
4.4.3. Метод разделения переменных .....	233
4.4.4. Задачи о резонансе .....	238
4.5. Интеграл энергии. Единственность решений начально-краевых задач для волнового уравнения.....	242
4.5.1. Энергия колеблющейся системы.....	242
4.5.2. Единственность решений начально-краевых задач.....	245
4.6. Доказательство существования классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебаний струны на отрезке .....	249
4.7. Задачи об установившихся колебаниях в неограниченной области, условия единственности их решений .....	253
4.7.1. Амплитуда установившихся колебаний. Расходящиеся в бесконечность волны .....	253
4.7.2. Условия излучения Зоммерфельда.....	255
4.8. Задача Коши с данными на кривой без характеристических точек. Задача Гурса с данными на характеристиках. Функция Римана.....	259
4.8.1. Задача Коши.....	259
4.8.2. Формально сопряженные дифференциальные операции. Формула Грина .....	263
4.8.3. Формула Римана .....	264
4.8.4. Задача Гурса.....	266
4.8.5. Функция Римана.....	268



4.8.6. Смысл формулы Римана: множество зависимости решения задачи Коши от начальных данных .....	269
4.8.7. Нелинейные задачи Коши и Гурса.....	270
Задачи для самостоятельного решения .....	271
<b>Типовые задачи для контрольных работ по курсу .....</b>	<b>277</b>
<b>Ответы.....</b>	<b>281</b>
<b>Приложения (некоторые справочные сведения).....</b>	<b>292</b>
Приложение 1. Формула среднего значения (интегральная теорема о среднем) .....	292
Приложение 2. Ротор, дивергенция, градиент. Формула Остроградского .....	292
Приложение 3. Аналитическая функция .....	296
Приложение 4. Квадратичные формы, их канонический вид. Закон инерции .....	296
Приложение 5. Гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ .....	298
Приложение 6. Первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений .....	299
Приложение 7. Некоторые функциональные пространства .....	300
Приложение 8. Признак Вейерштрасса .....	300
Приложение 9. Поверхность Ляпунова $S \subset \mathbb{R}^3$ .....	301
Приложение 10. Теоремы Фредгольма .....	301
Приложение 11. Формула (правило) Лейбница дифференцирования по параметру $p$ интеграла, зависящего от этого параметра .....	304
Список литературы .....	305