ВЫСШЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В. В. АТУРИН, В. В. ГОДИН

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 51:33(075.8)
ББК 22.1:65я73
А929

Рецензенты:
засл. деят. науки России, д-р техн. наук, проф. *З. Г. Салихов*
(зав. кафедрой «Компьютерные информационные и управляющие системы автоматики» Государственного технического университета «Московский институт стали и сплавов»);
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Р. Филонович* (декан Высшей школы менеджмента Государственного университета «Высшая школа экономики»)

Атурин В. В.
А929 Высшая математика. Задачи с решениями для студентов экономических специальностей : учеб. пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / В. В. Атурин, В. В. Годин. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. — 304 с.
ISBN 978-5-7695-6905-0

В учебном пособии представлены задачи с решениями, а также приведены краткие теоретические сведения по основным разделам курсов «Высшая математика» и «Прикладная математика»: теория множеств, функции и отображения, линейная алгебра, математический анализ, финансовая математика, теория вероятностей и математическая статистика.

Адресная направленность данного учебного пособия предполагает экономическое содержание представленных задач.

Для студентов учреждений высшего профессионального образования. Может быть полезно широкому кругу читателей, интересующихся возможностью применения традиционных курсов математики на практике.

УДК 51:33(075.8)
ББК 22.1:65я73

ISBN 978-5-7695-6905-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для решения широкого круга практических задач, совершенствования методов управления всеми отраслями экономики и повышения эффективности их функционирования необходимо использовать математические методы.

Цели настоящего учебного пособия — во-первых, выработать у студентов навыки формализации и решения конкретных экономических задач, связанных с реальными жизненными ситуациями, и, во-вторых, пробудить интерес студентов к изучению высшей и прикладной математики.

Надо отметить, что в настоящее время сборников задач по высшей и прикладной математике, ориентированных на студентов экономических и управленческих специальностей, недостаточно.

Необходимость публикации данного учебного пособия объясняется следующим.

Большинство учебных планов различных специальностей вузов содержит в том или ином виде курсы, связанные с математикой и прикладной математикой. И это понятно, поскольку методы этих наук могут широко применяться на практике. Однако формирование математической культуры у студентов, навыков математической формализации осуществляется непросто. Отсутствие возможности у студента интерпретировать математические понятия в терминах избранной специальности является существенным минусом для освоения математики. Если рассматривать появление и развитие некоторых разделов математики как ответ на практические потребности людей, занимающихся торговлей, землеустройством, строительством и т. п., то правильно было бы это демонстрировать студентам, формируя у них навыки формализации и решения конкретных экономических задач.

Учебное пособие авторов, опубликованное в 1995 г., требовало обновления задач и расширения их перечня, что нашло отражение в данном издании. Практически все задачи приведены с решениями, поэтому задачник может быть использован для самостоятельной работы. Одни задачи предназначены для отработки навыков применения готовых формул, другие требуют включения логического мышления.

При подготовке пособия авторы использовали задачи, разработанные и успешно применяемые ими в преподавании соответствующих

дисциплин в Государственном университете управления. Некоторые материалы любезно разрешил использовать коллега — профессор Университета г. Мюнстер (Германия) — Ф. Колберг. Авторы выражают ему свою признательность.

Авторы также благодарят рецензентов учебного пособия — профессора З. Г. Салихова и профессора С. Р. Филоновича за ценные замечания, которые были по возможности учтены при доработке рукописи, и аспиранта кафедры «Мировая экономика» Государственного университета управления К. Г. Григоряна за помощь, оказанную при подготовке рукописи к изданию.

РАЗДЕЛ I
ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ТЕМА 1. **МНОЖЕСТВА**

Общие сведения

Множество является первичным неопределяемым понятием. В то же время его иногда «определяют» как совокупность (класс, собрание, семейство) объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Объекты, из которых состоит множество, называют ***элементами*** (точками) множества и обозначают строчными буквами. Множества, элементами которых являются числа, называют ***числовыми***.

Примеры числовых множеств:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm n, ...\}$ — множество целых чисел;

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \colon m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \right\}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел.

Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, пустое множество — $\varnothing$, универсальное множество — U.

Множества A и B равны, если $\forall x\big((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)\big)$.

Множество A является подмножеством множества B, если

$$\forall x\big((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\big).$$

Операции, проводимые с множествами

- *объединение множеств*
  $C = A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}$;
- *пересечение множеств*
  $C = A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}$;
- *вычитание множеств*
  $A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \notin B\}$;
- *дополнение множеств*
  $\overline{A} = \{x\colon x \in U \text{ и } x \notin A\} = U \setminus A$;
- *симметрическая разность множеств*
  $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Логические обозначения

Символ	Пояснение
$\forall$	Квантор общности, заменяет слова: «для всякого», «для любого», «для всех», «для каждого»
$\exists$	Квантор существования, заменяет слова «существует», «найдется»
:	Заменяет слова «имеет место», «такое, что»
$\Rightarrow$	Знак следования (импликации): $A \Rightarrow B$ означает, что A влечет B или из A следует B
$\Leftrightarrow$	Знак равносильности (эквивалентности): $A \Leftrightarrow B$ означает, что A равносильно B; A тогда и только тогда, когда B
$\subset$	Знак операции включения: $A \subset B$ означает, что A является подмножеством B
$\in$ ($\notin$)	Знак принадлежности (непринадлежности) элемента множеству: запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A; $a \notin A$ — a не является элементом множества A

1.1. Существуют множества:
M: жителей бывшего СССР;
A: жителей бывшего СССР, живущих в России;
B: жителей бывшего СССР, живущих на Украине;
C: жителей бывшего СССР, живущих в странах СНГ.

а) Устно опишите дополнительные подмножества к множеству M: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

б) Как соотносятся друг с другом подмножества: M, A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$?

1.2. На автозаводе были выпущены автомобили трех типов. Автомобили I типа окрашены частично в красный, частично в синий цвета; II типа — все белого цвета; III типа — частично желтые, частично красные. Множество M включает все автомобили, выпущенные автозаводом. Подмножества A_1, A_2, A_3 множества M включают автомобили I, II и III типов соответственно. Подмножества K, C, $Б$, $Ж$ множества M включают автомобили красного, синего, белого и желтого цвета соответственно.

а) Как соотносятся друг с другом перечисленные подмножества?

б) Какие пары подмножеств не пересекаются?

1.3. Существует:
M: множество всех жителей России, владеющих акциями.

При этом существуют подмножества:

A: владельцев банковских акций;

B: владельцев страховых акций;

C: владельцев акций промышленных предприятий.

Опишите, используя термины теории множеств, следующие множества:

а) множество владельцев банковских, страховых акций и акций промышленных предприятий;

б) множество владельцев акций, у которых есть банковские акции, но нет акций промышленных предприятий; обладателей банковских, страховых и промышленных акций одновременно; владельцев банковских акций и акций промышленных предприятий;

в) множество жителей, обладающих банковскими акциями и акциями промышленных предприятий; страховыми акциями и акциями промышленных предприятий, но не всеми тремя видами акций одновременно.

1.4. Станки T_1, T_2, T_3 обрабатывают изделия A_1, ..., A_{10} следующим образом: станок T_1 обрабатывает изделия A_1, A_3, A_5, A_6, A_7, A_{10}; станок T_2 — изделия A_2, A_3, A_6, A_7, A_8, A_9; станок T_3 — изделия A_3, A_9, A_{10}; M_1, M_2, M_3 — это множества, элементами которых являются изделия, обработанные станками T_1, T_2, T_3 соответственно.

Опишите следующие множества в терминах теории множеств, а затем дайте их численные характеристики:

а) множество изделий, обработанных на станке T_1 или T_2;

б) множество изделий, обработанных только на станке T_1;

в) множество изделий, обработанных только на станках T_1 и T_2;

г) множество изделий, обработанных только на станке T_3;

д) множество изделий, не обработанных ни на одном из станков.

1.5. Правление концерна состоит из четырех человек (N, L, K, T). Для принятия решения правлением необходимо присутствие, по крайней мере, трех человек. Опишите множество с элементами всех без исключения вариантов состава правления, решения которого будут правомочны. В какое множество входят указанные варианты состава правления?

1.6. Наблюдательный совет предприятия состоит из шести человек, трое из них входят в группу $A = \{A_1, A_2, A_3\}$, трое — в группу $B = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Совет принимает решение, только если на заседании присутствуют хотя бы четыре человека, причем среди этих четырех, по меньшей мере, два человека должны быть представителями одной группы.

а) Когда решение совета правомочно? Опишите все варианты состава наблюдательного совета, при которых возможно принятие решения.

б) По одному из проектов первоначально известно, что в случае своего присутствия на заседании члены совета A_1 и B_2 этот проект отклонят, а все остальные члены совета, в случае присутствия, одобрят. Опишите возможные варианты состава совета, которые одобрят данный проект.

1.7. В экономическом союзе существуют следующие правила формирования комиссий из членов правления:

1) финансовая комиссия формируется только из членов исполнительного комитета;

2) членом финансовой комиссии считается каждый, кто является одновременно членом и плановой комиссии, и исполнительного комитета;

3) член только плановой комиссии не может быть членом финансовой комиссии.

а) Формализуйте эти правила в терминах теории множеств.

б) Существуют ли члены правления, работающие в двух комиссиях и комитете одновременно?

в) Существуют ли члены правления, работающие как в финансовой комиссии, так и в исполнительном комитете? (Предполагается, что любая комиссия состоит, по крайней мере, из одного члена правления.)

ТЕМА 2. **ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ**

Общие сведения

На множестве $D \subset R$ задана числовая ***функция***, если $\forall x \in D$ поставлен в соответствие по некоторому правилу или закону один и только один $y \in E \in R$. Множество D называют *областью определения* функции, множество E — *областью значений* функции.

Обратимая функция

Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in D$. Если функция f такова, что каждому значению $y_0 \in E$ соответствует только одно значение $x_0 \in D$, то эту функцию называют обратимой.

Понятию «функция» синонимично понятие ***«отображение»***. Так, числовую функцию часто определяют как отображение одного множества чисел в другое. Функцию (отображение) обозначают так: $y = f(x)$, $f: X \to Y$, $x \to f(x)$ или $f: \{a, b, c, ...\}: \Rightarrow \{d, e, f, ...\}$.

Отображение *однозначно*, если каждому x соответствует единственный y. Отображение *взаимно-однозначно*, если оно отображает все множество X на все множество Y и определяет однозначное обратное отображение $y \to x$.

Каждый элемент x сам может быть функцией. Числовая функция, определенная на некотором множестве функций (например, интеграл), называется *функционалом*.

Простейшая классификация отображений

Отображение $f: X \to Y$:

1) инъективно (инъекция), если

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

2) сюръективно (сюръекция, т. е. отображение X на Y), если

$$f(x) = Y;$$

3) биективно (биекция, т. е. взаимно-однозначное отображение), если оно инъективно и сюръективно.

Обратное отображение

$f^{-1}: Y \to X$, определяемое для биекции $f: X \to Y$ следующим образом: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$, т. е.

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x\ \forall x \in X,\ f\Big(f^{-1}(y)\Big) = y\ \forall y \in Y.$$

Композиция* (*суперпозиция*) *отображений

Если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, то их композицией называют отображение $g \circ f$: $X \to Z$, определяемое формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$. Причем $g \circ f \neq f \circ g$, а $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.

$F(x) = f(v(x))$ — сложная функция.

Способы задания функции

Существуют следующие способы задания функций:
- аналитический (формульный);
- графический;
- табличный;
- словесный.

2.1. Продавец хочет выставить четыре различные книги $б_1$, $б_2$, $б_3$, $б_4$ на витрину в ряд на места 1, 2, 3, 4. При этом в любом случае рядом с книгой $б_1$ должна стоять $б_2$, а $б_3$ не должна стоять рядом с $б_1$.

Как будет выглядеть упорядоченное отображение f: $\{б_1, б_2, б_3, б_4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, которое характеризует различные варианты перестановок?

2.2. Предприятие намерено трижды последовательно разместить в журнале три различных рекламных текста. Нанятое предприятием рекламное агентство разработало пять различных рекламных текстов на выбор. При этом тексты A_1, A_2, A_3 относятся к изделию A, а тексты B_1 и B_2 — к изделию B. Предприятие выдвигает требование, чтобы рекламные тексты B_1 и B_2 изделия B появлялись попеременно.

Дайте упорядоченное описание отображения f: $\{1, 2, 3\} \to \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2\}$ таким образом, чтобы соблюдались требования предприятия как относительно очередности появления рекламы изделий A и B, так и относительно появления рекламных текстов в журнале.

2.3. Предприятие по прокату автомобилей имеет свои филиалы в Петербурге, Твери и Самаре. Автомобиль, взятый напрокат в одном из городов, может быть возвращен фирме в любом филиале, кроме того, в котором он был взят.

а) Изобразите стрелками на диаграмме все способы, которыми можно взять автомобиль напрокат и вернуть его обратно в различных городах. Можно ли считать эту диаграмму отображением?

б) Если П, Т и С — сокращения от названий соответствующих городов, то как будет выглядеть упорядоченное описание отображения f: {П, Т, С} $\to$ K({П, Т, С}), включающее в себя все возможности аренды и сдачи автомобиля в различных городах? Изобразите это на стрелочной диаграмме.

2.4. Цена товаров T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5 составляет 5; 6; 4,5; 5,5 и 4,75 у.е. за единицу.

Если цены на товары указаны соответственно, является ли это соответствие отображением?

2.5. Фирма A поставляет станки типа T_1, T_2, T_3, T_4 на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$, причем станки T_1 — на завод $З_2$, станки T_2 — на заводы $З_2$ и $З_3$, станки T_3 — на завод $З_4$ и станки T_4 — на заводы $З_1$, $З_3$, $З_4$.

а) Покажите систему поставок на стрелочной диаграмме. Является ли эта диаграмма отображением?

б) Как будет выглядеть упорядоченное описание отображения f: $\{T_1, T_2, T_3, T_4\} \to f(\{З_1, З_2, З_3, З_4\})$, определяющее систему поставок?

2.6. Фирмы оптовой торговли O_1, O_2, O_3 поставляют товары в магазины P_1, P_2, P_3 и P_4, причем фирма O_1 — в магазины P_1 и P_3, фирма O_2 — в P_2, P_3, P_4, а фирма O_3 — в P_1 и P_4.

а) Как будет выглядеть отображение f: $\{O_1, O_2, O_3\} \to B$ и его область значений $B = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, описывающих данную систему поставок?

б) Существует ли обратное отображение f^{-1}?

в) Опишите обратное отображение f^{-1}.

2.7. Страны $А$, $Б$, $В$, $Д$ экспортируют товары в страны $Е$, $Г$, $Ф$, при этом страна $А$ экспортирует товары в страны $Е$ и $Ф$; страна $Б$ — в страны $Е$ и $Г$; страна $В$ — в страны $Е$, $Ф$, $Г$; страна $Д$ — в страны $Ф$ и $Г$.

а) Как выглядит упорядоченное отображение f: $\{А, Б, В, Д\} \to K(\{Е, Ф, Г\})$, описывающее данную систему экспортных поставок?

б) Как выглядит отображение g, описывающее импортные поставки между странами $Е$, $Ф$, $Г$ и $А$, $Б$, $В$, $Д$ для указанных экспортных поставок?

2.8. Система поставок от заводов $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ на точки продажи T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 и далее к покупателям $П_1$, $П_2$, $П_3$ организована следующим образом:

завод $З_1$ поставляет товары на точки T_1 и T_2;
завод $З_2$ — на точки T_3 и T_4;
завод $З_3$ — на точки T_2 и T_3;
завод $З_4$ — на точки T_1, T_3, T_5.
Магазины T_1 и T_2 продают товары покупателю $П_1$;
магазины T_2 и T_3 — покупателям $П_2$ и $П_3$;
магазин T_4 — покупателю $П_1$;
магазин T_5 — покупателю $П_3$.

а) Как будет выглядеть отображение f: $\{З_1, З_2, З_3, З_4\} \rightarrow K(\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\})$, описывающее отношения между заводами и продавцами?

б) Как будет выглядеть отображение g: $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\} \rightarrow K(\{П_1, П_2, П_3\})$, описывающее отношения между покупателями и продавцами?

в) Как будет выглядеть отображение h: $\{З_1, З_2, З_3, З_4\} \rightarrow K(\{П_1, П_2, П_3\})$, описывающее отношения между заводами и покупателями?

г) Существует ли такое отображение, как $g \circ f$ (композиция двух отображений)?

д) Опишите отображение g^*: $K(\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}) \rightarrow K(\{П_1, П_2, П_3\})$ таким образом, чтобы ограничения на g^* на множестве T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 накладывались отображением g из п. б данной задачи.

е) Определено ли таким образом отображение $g^* \circ f$? Если да, то опишите $g^* \circ f$ и проверьте, истинно ли равенство $g^* \circ f = h$.

2.9. Если x — множество производственных факторов E, а y — множество полуфабрикатов, то производственная функция выглядит следующим образом: f: $R_{\geq 0} \rightarrow R$ при этом $y = f(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{2}{3}}$.

Из полуфабриката в процессе производства получается конечный продукт P. Вторая производственная функция g: $R_{\geq 0} \rightarrow R$, при этом $z = g(y) = \frac{2}{5} y^{\frac{3}{5}}$.

Опишите функцию $f \circ g$, получаемую композицией двух производственных функций. Каково экономическое содержание данной функции?

2.10. Фирма производит три вида товаров T_1, T_2, T_3. Товар T_2 должен продаваться по фиксированной цене 5 усл. ед. за единицу товара. Цены $Ц_1$ и $Ц_3$ на товары T_1 и T_3 соответственно устанавливаются в зависимости от множеств X_1 и X_3, включающих количество проданных единиц этих товаров в соответствии с функциями цен f_1: $[0; 20]$[1] $\rightarrow R$ при этом $P_1 = f_1(x_1) = 40 - 2x_1$; f_3: $[0; 10] \rightarrow R$, при этом $P_3 = f_3(x_3) = 50 - \frac{1}{2} x_3^2$.

а) Найдите совокупный доход, полученный от реализации каждого вида товаров.

б) Опишите функцию g, которая определяет совокупный доход предприятия в зависимости от x_1, x_2, x_3.

2.11. Если X_1, X_2, X_3 — множества производственных факторов E_1, E_2, E_3, а Y_1 и Y_2 — количество изделий P_1 и P_2, то производ-

[1] Для краткости обозначений в дальнейшем запись, например, $[0; 20] \rightarrow R$ понимается как $D(f) = [0; 20]$ и $E(f) = R$.

ственная функция выглядит следующим образом: f: $R^3_{\geq 0} \to R^2$; при этом $(X_1, X_2, X_3) \to (Y_1, Y_2)$, причем $Y_1 = f_1(X_1, X_2, X_3) = 5\sqrt[7]{x_1^5 x_2^3 x_3^4}$, $Y_2 = f_2(X_1, X_2, X_3) = \frac{2}{3}\sqrt[9]{x_2^7 x_3^5}$.

Из изделий P_1 и P_2 производится конечный продукт P. Производственная функция g: $R^2_{\geq 0} \to R$, при этом $z = g(y_1, y_2) = \sqrt[11]{y_1^6 y_2^7}$.

Опишите функцию $g \circ f$, получаемую композицией двух указанных функций. Определите ее экономический смысл.

2.12. Для функции цены g: $[0, 10] \to B$, где $p = g(x) = 50 - \frac{1}{2}x^2$, найдите множество значений $B(E(g))$.

Определите соответствующую функцию спроса как обратную функцию $g^{-1}(p)$ и постройте графики $g(x)$ и $g^{-1}(p)$.

2.13. Для функции спроса f: $[0; 8] \to B$, где $x = f(p) = \sqrt{64 - p^2}/2p$, найдите соответствующую функцию цены как обратную функции $f^{-1}(x)$. Постройте графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

2.14. Пусть p_1, p_2 — цены; x_1, x_2 — количество продаваемых товаров первого и второго вида, а функции цены выглядят следующим образом:

g: $[0; 3] \times [0; 4] \to B$ при том, что $(x_1, x_2) \to (p_1, p_2)$, где $p_1 = g_1(x_1, x_2) = 3 - x_1 + x_2$; $p_2 = g_2(x_1, x_2) = 4 + 2x_1 - x_2$.

а) Изобразите точечное множество B в декартовой системе координат.

б) Определите соответствующую функцию спроса $g^{-1}(x)$ как обратную функцию $g(x)$.

в) Определите функцию совокупного дохода.

ТЕМА 3. **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

3.1. Матрицы и операции над ними

Общие сведения

Матрица размера $m \times n$ — прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Матрицы размеров $n \times 1$ и $1 \times n$ именуются соответственно вектор-столбцом и вектор-строкой.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n-го порядка.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ — квадратная матрица 3-го порядка.

Элементы, находящиеся на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют ***главную диагональ***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

$$B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ — диагональная матрица.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной*** и обозначается буквой E.

$$E_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — единичная матрица.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

$$D_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — треугольная матрица.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называют ***нулевой*** и обозначают символом 0.

Произведение матрицы A на число λ — матрица $B = \lambda A$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Операции над матрицами

Для единичной матрицы справедливо:

$$EA = AE = A.$$

Для обратной матрицы A^{-1} справедливо:

$$AA^{-1} = E.$$

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица

$$C = A + B,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Разность двух матриц одинакового размера определяется через операции:

$$A - B = A + (-1)B.$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Произведение матриц $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ — матрица $C_{m\times n}$, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^T транспонирована относительно матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если матрица A имеет размер $m \times n$, то размер транспонированной матрицы A^T — $n \times m$.

Свойства матриц

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- $A(B + C) = AB + AC$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
- $A(BC) = (AB)C$;
- $0 \cdot A = 0$;
- $1 \cdot A = A$;
- $(A \cdot B)^T = B^T A^T$.

Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) — известные числа; $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные. Индекс i — номер уравнения; j — номер неизвестного, при котором стоит коэффициент.

Коэффициенты при неизвестных записываются в виде матрицы (матрица системы). Числа, стоящие в правых частях уравнений (b_1, ..., b_m), — *свободные члены*.

Исходная система линейных уравнений в матричной форме записывается в следующем виде:

$$A \cdot X = B$$

Решение матричного уравнения

$$X = A^{-1}B.$$

3.1. Предприятие производит изделия E_1, E_2, E_3, которые поставляются покупателям K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Годовые поставки осуществляются поквартально в соответствии со схемами:

I квартал

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
E_1	2	1	3	4	0
E_2	1	5	3	1	0
E_3	0	2	3	4	10

II квартал

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
E_1	0	1	3	1	6
E_2	4	2	3	2	7
E_3	5	1	6	0	1

III квартал

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
E_1	12	1	0	3	4
E_2	3	1	0	3	4
E_3	4	2	4	4	4

IV квартал

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
E_1	8	9	0	0	2
E_2	4	4	18	6	1
E_3	3	7	5	1	5

Эти схемы представляют собой матрицы сбыта A_1, A_2, A_3, A_4 по каждому кварталу.

а) Какая связь существует между матрицами A_1, A_2, A_3, A_4 и матрицей годового сбыта A?

б) Рассчитайте элементы матрицы A.

в) Сколько единиц изделий E_1, E_2, E_3 следует производить в среднем ежемесячно, чтобы выполнить годовой план сбыта?

3.2. Фирма имеет пять складов a, b, c, d, e, на которых хранятся изделия A, B, C в соответствии с матрицей складских запасов L_1:

Изделие	*Склад*				
	a	*b*	*c*	*d*	*e*
A	100	50	200	50	150
B	60	100	10	60	100
C	40	200	15	100	50

Результаты рыночного исследования показали, что такая схема хранения не является оптимальной.

Матрица оптимального расположения складских запасов L_2 выглядит следующим образом:

Изделие	*Склад*				
	a	*b*	*c*	*d*	*e*
A	0	200	100	0	250
B	120	50	60	100	0
C	140	100	0	100	100

Фирма хочет перераспределить запасы и перейти к оптимальной матрице L_2.

а) Какая связь существует между матрицей T, описывающей требуемое перераспределение, и матрицами L_1 и L_2?

б) Рассчитайте элементы матрицы T.

3.3. Предприятие производит изделия X, Y, Z из сырья P_1 и P_2. На производство единицы изделия X требуется 10 ед. сырья P_1 и 30 ед. сырья P_2; изделия Y — 20 ед. сырья P_1 и 0 ед. сырья P_2; Z — 15 ед. сырья P_1 и 15 ед. сырья P_2.

а) Составьте матрицу A, элементы a_{ij} которой показывают, какое количество сырья вида i требуется для производства одной единицы изделия вида j.